Вестник Томского государственного университета
Философия. Социология. Политология. 2014. № 2 (26)

ОНТОЛОГИЯ, ЭПИСТЕМОЛОГИЯ, ЛОГИКА

УДК 164.3

Р.Ф. Галимуллин

ПРОБЛЕМА НЕДЕТЕРМИНИЗМА И НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

Рассматривается понятие семантического недетерминизма, проводится анализ и сравнение понятий недетерминированности и нечеткости. Постулируется догадка, что нечеткость – недетерминированная величина. В рамках экспликации недетерминизма в нечеткой логике предложено альтернативное рассмотрение степени принадлежности элемента нечеткому множеству, что приводит к новому взгляду на парадокс кучи.

Ключевые слова: *семантический недетерминизм, нечеткая логика.*

Семантический недетерминизм в логике обусловлен, как правило, недетерминированностью предметной области (базы данных). Элементами такой базы данных являются множества, и выбор конкретного элемента из данного множества происходит случайным образом. Нечеткость же возникает в случае объединения множества объектов с определенным свойством, степень выраженности которого может варьироваться, что ведет к появлению так называемых размытых границ. Как отмечено в [1], недетерминизм представляет собой отношение один-ко-многим, а нечеткость – многие-к-одному. В данной статье ставится вопрос о соотношении семантического недетерминизма и нечеткой логики. Отметим, что нечеткость представления данных видится нам одним из потенциальных источников означенного недетерминизма.

Различные области возникновения семантического недетерминизма рассматриваются в [2]. Например, стандартная система секвенциального исчисления генценовского типа [3] для логики высказываний, правила введения которой характеризуются следующим образом (табл. 1).

Таблица 1

	Введение в сукцедент	Введение в антецедент
$\supset$	$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma}$	$\dfrac{\Delta \to \Lambda, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta}$
&	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma}$	$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\mathfrak{A}}$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}}$

Данные правила введения однозначно задают семантику логики высказываний для представленных пропозициональных связок (табл. 2–5).

Таблица 2

A	B	$A \supset B$
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

Таблица 3

A	B	$A \,\&\, B$
f	f	f
f	t	f
t	f	f
t	t	t

Таблица 4

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	t	t
t	f	t
t	t	t

Таблица 5

A	$\neg A$
f	t
t	f

Теперь предположим, что мы хотим избавиться от закона исключенного третьего, как это делается, например, в интуиционистской логике. Для этого достаточно отбросить правило введения отрицания ($\neg$) в сукцедент, что приведет к потере информации о первой строке таблицы для $\neg$. Такая проблема, проблема недостаточной спецификации, моделируется авторами при помощи перечисления всех возможных истинностных значений в каждой строке таблицы (табл. 6–9).

Таблица 6

A	B	$A \supset B$
f	f	$\{t\}$
f	t	$\{t\}$
t	f	$\{f\}$
t	t	$\{t\}$

Таблица 7

A	B	$A \,\&\, B$
f	f	$\{f\}$
f	t	$\{f\}$
t	f	$\{f\}$
t	t	$\{t\}$

Таблица 8

A	B	$A \vee B$
f	f	$\{f\}$
f	t	$\{t\}$
t	f	$\{t\}$
t	t	$\{t\}$

Таблица 9

A	$\neg A$
f	$\{t, f\}$
t	$\{f\}$

Заметим, что в данных таблицах истинностные значения для результирующих формул выбираются из множества допустимых истинностных значений, т.е. имеет место семантический недетерминизм. В истинностной таблице для отрицания в первой строке такое множество состоит из двух элементов. Таблицы данного вида называются N-матрицами (N-*matrices*) [2, 4].

Семантический недетерминизм может возникнуть также и при формализации естественного языка. Например, при помощи N-матриц возможно описать неоднозначность «или …, или…» и «… или …», т.е. строгой (сумма по модулю два) и обычной дизъюнкций. N-матрица для такой строгой/обычной дизъюнкции представлена в табл. 10. Еще одной областью применения N-матриц является недетерминированное поведение логических схем. В статье приводится пример неисправного вентиля «И» (*AND*), который исправно работает лишь на наборах $\langle t, t\rangle$ и $\langle f, f\rangle$ (табл. 11).

Таблица 10

A	B	$A \vee B$
f	f	$\{f\}$
f	t	$\{t\}$
t	f	$\{t\}$
t	t	$\{t, f\}$

Таблица 11

A	B	A AND B
f	f	$\{f\}$
f	t	$\{f, t\}$
t	f	$\{f, t\}$
t	t	$\{t\}$

N-матрицы также возможно использовать для обобщения истинностных таблиц для параллельных и последовательностных вычислений. Таблицы истинности для таких вычислений были представлены для случая трехзначной логики в работах Клини [5] и Маккарти [6] соответственно (табл. 12, 13).

Таблица 12

t	f	u	$\vee_{Kl}$
t	t	t	t
t	f	u	f
t	u	u	u

Таблица 13

t	f	u	$\vee_{McC}$
t	t	t	t
t	f	u	f
u	u	u	u

Обобщенная матрица представлена в табл. 14.

Таблица 14

t	f	u	$\vee_{KM}$
$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$	t
$\{t\}$	$\{f\}$	$\{u\}$	f
$\{u, t\}$	$\{u\}$	$\{u\}$	u

Для исследования систем с недетерминированной базой данных принято строить расширения пропозициональных функций классической логики до аналогичных недетерминированных функций. В работе [7] такие расширения проводятся на базисе трёхзначной логики. Истинностное значение *u* трактуется как *undefined*, т.е. в терминах слабых таблиц Клини, а не как *unknown*, в случае сильных таблиц [8]. Сильные таблицы Клини [5], как было сказано, моделируют параллельные вычисления, и таблица истинности для конъюнкции будет выглядеть следующим образом (табл. 15).

Таблица 15

t	f	u	$\&_{Kl}$
t	f	u	t
f	f	f	f
u	f	u	u

Так, если один из конъюнктов принимает значение *ложь* (*f*), то значение второго конъюнкта нас уже не интересует, и всей конъюнкции приписывается истинностное значение *ложь*. Если один из конъюнктов принимает истинностное значение *истина* (*t*), то вычисляется значение второго конъюнкта, и в этом случае его истинностное значение будет решающим, т.е. определит истинностное значение всей конъюнкции. Истинностное значение конъюнкции будет *undefined* (*u*), если истинностное значение одного конъюнкта *истина*, а другого – *u*, или если оба конъюнкта принимают истинностное значение *u*. Те же самые рассуждения применимы и для остальных пропозициональных связок [5]. В случае слабых таблиц значения обоих операндов известны заранее. Приведем таблицу для конъюнкции (табл. 16).

Таблица 16

t	f	u	$\&_{Kl}$
t	f	u	t
f	f	u	f
u	u	u	u

В этом случае, если один из конъюнктов принимает истинностное значение u, истинностное значение всей конъюнкции становится равным u.

Область определения истинностных значений для системы [7] является семантически недетерминированной: $\boldsymbol{P} \overset{\text{def}}{=} \{\{t\}, \{f\}, \{u\}, \{t, f\}, \{t, u\}, \{f, u\}, \{t, f, u\}\}$. Установление истинностного значения произвольной функции происходит поэтапно, на каждом из этапов возвращается истинностное значение из множества $\{t, f, u\}$. Выбор истинностного значения i-го аргумента функции является независимым. Если на текущий запрос выдается ответ u, то процедура завершает свою работу и результат определения истинностного значения функции равен u. Таким образом, $f(P_1, \ldots, P_n) \subseteq \{t, f, u\}$ – множество результатов процедуры определения истинностного значения функции f от аргументов $P_1, \ldots, P_n$.

Областью перспективного внедрения семантического недетерминизма являются языки логического программирования. В то время как данные языки, применяемые для баз данных и систем искусственного интеллекта, являются детерминированными, использование их недетерминированных аналогов сулит значительные преимущества. В пользу введения недетерминизма говорит как то, что недетерминизм уже неявно присутствует при обработке запросов к базам данных и при работе экспертных систем, так и то, что выразительная сила таких языков больше, нежели детерминированных [9]. В случае с недетерминированными запросами к базам данных обработка таких запросов детерминированными языками весьма неэффективна. Мотивацией к введению недетерминизма в языках логического программирования служит существование недетерминированных запросов [10]. Такие запросы являются частично специфицированными, т.е. имеется более одного возможного ответа на данный запрос. Иными словами, запрос называется недетерминированным, если существует более одного подходящего на него ответа. В случае детерминированного запроса имеется лишь один верный ответ [10]. Недетерминированный запрос может описывать нехватку знаний об окружающем мире. Пример недетерминированного запроса *найти кафе на пересечении улиц Беллинсгаузена и Страуструпа*. Такой запрос будет недетерминированным, если на пересечении указанных улиц находится более одного кафе.

В статье [10] ставится вопрос о том, в каких случаях, при наличии частично определенного запроса, необходимо использовать недетерминированные языки, а в каких достаточно симулировать недетерминизм в рамках детерминированного языка. Очевидно, что в случае последнего варианта, программа, написанная на детерминированном языке, возвращает все возможные варианты, что может оказаться весьма ресурсозатратно. Более того, недетерминированный выбор позволяет более эффективно обрабатывать детерминированные запросы. В статье рассматривается пример запроса на проверку четности: $even\ (R) = \begin{cases} true & \text{если } |R| - \text{четное число} \\ false & \text{если } |R| - \text{нечетное число} \end{cases}$.

Функция *even* (*R*) возвращает *true*, если мощность множества *R* – четное число, иначе – нечетное. В случае, когда элементы *R* концептуально неразличимы, т.е. нам не важен порядок, необходима возможность недетерминированного выбора. Однако при наличии порядка такая функция легко вычисляется детерминированно.

Авторами [10] рассматриваются недетерминированные расширения детерминированных языков декларативного логического программирования типа *Datalog*. Языки логического программирования позволяют при помощи задания посылок и правил преобразования получать новые формулы. В основе таких языков лежит, как правило, метод резолюций. *Datalog* нашел свое применение в работе с базами данных, сетями, облачными вычислениями и т.д. Программа, написанная на *Datalog*, состоит из двух основных частей: фактов и правил. В фактах мы задаем известную информацию, из которой получаем новую информацию при помощи правил. Рассмотрим пример. Пусть известны следующие факты:

parent (*Bill*, *Mary*)

parent (*Mary*, *John*)

Пусть заданы следующие правила:

ancestor (*x*, *y*) : – *parent* (*x*, *y*)

ancestor (*x*, *y*) : – *parent* (*x*, *z*), *ancestor* (*z*, *y*)

При запросе ? – *ancestor* (*bill*, *x*) такая программа выдаст ответ *Mary*, *John*. Недетерминизм в *Datalog* вводится при помощи недетерминированного оператора выбора. В этом случае головная часть правил (часть слева от : –) может содержать несколько предикатов, а в теле правила (часть справа от : –) может использоваться знак равенства. В [9] рассматриваются различные недетерминированные операторы, позволяющие увеличить выразительную силу языка. Таким образом, введение недетерминизма позволяет не только оптимизировать процесс обработки запросов к базам данных, но и расширить возможности используемого языка.

Итак, семантический недетерминизм может с успехом использоваться в различных областях логики. Однако остается открытым вопрос о соотношении понятий недетерминизма и нечеткости. Рассмотрим последнее более подробно. Введение понятия нечеткости имело под собой философские и лингвистические основания. Так, например, для слова «зелёный» ввиду того, что цвет представляется континуумом, рамки «зелёности» строго не определены и являются размытыми. Известнейшим примером нечеткого представления известной информации является парадокс кучи, где само понятие кучи является нечетким. Б. Рассел [11] рассматривает понятие точности как антоним нечеткости. В его определении одна система объектов, связанных каким-либо образом, является точным отображением другой системы объектов, связанных каким-либо другим образом, если объектам одной системы возможно поставить во взаимно однозначное соответствие объекты другой системы, а также во взаимно однозначное соответствие возможно привести отношения между объектами данных систем таким образом, что когда два или более объектов одной системы находятся в некотором отношении, то соответствующие объекты другой системы находятся в соответствующем отношении. В качестве примера возможно привести карты, фотографии, каталоги и пр. Наоборот, такое отображение является нечетким, когда отношение между системами является не взаимно однозначным, а много-однозначным, как и отмечалось в работе [1]. Рассел замечает, что нечеткость характеризуется степенью, а точность является предельным случаем. Более того, нечеткость нельзя устранить из нашего представления данных об окружающем мире.

Одним из способов представления нечетких данных об окружающем мире является теория нечетких множеств, разработанная Л. А. Заде [12]. Для определения понятия нечеткого множества изначально задается достаточно большое универсальное множество U. Очевидно, что такое множество всегда найдется. Итак, *функция принадлежности нечеткого множества* $A \subseteq U$ $f_A(u)$ – функция, ставящая в соответствие каждому элементу U вещественное число из интервала [1, 0]. Значение функции $f_A(u)$ характеризует степень принадлежности элемента множеству. В случае обычных множеств функция принадлежности возвращает лишь два значения: $f_A(u) = 1$, если $u \in A$, и $f_A(u) = 0$, если $u \notin A$. Например, пусть U – вещественная прямая, а A – нечеткое множество чисел, значительно больших чем 1. Тогда возможно однозначно, хоть и субъективно, задать характеристическую функцию множества A, как функцию $f_A(u)$ от вещественных чисел. Так, $f_A(0) = 0$, $f_A(1) = 0$, $f_A(10) = 0.2$, $f_A(500) = 1$. Функции принадлежности часто представляются в виде графиков. Нечеткое множество называется *пустым* тогда и только тогда, когда функция принадлежности принимает значение 0 для любого элемента из U.

Операции с нечеткими множествами задаются через соответствующие функции принадлежности. Рассмотрим основные из операций. *Дополнение* A' нечеткого множества A задается функцией $f_{A'} = 1 - f_A$. *Объединением* нечетких множеств A и B с функциями принадлежности f_A и f_B называется нечеткое множество C, записывается $C = A \cup B$, с функцией принадлежности $f_C(u) = \text{Max}\,[f_A(u), f_B(u)]$, $u \in U$. *Пересечением* нечетких множеств A и B с функциями принадлежности f_A и f_B называется нечеткое множество C, записывается $C = A \cap B$, с функцией принадлежности $f_C(u) = \text{Min}\,[f_A(u), f_B(u)]$, $u \in U$. Заде отмечает, что понятие «принадлежности», играющее значительную роль в теории простых множеств, не имеет сходного значения в теории нечетких множеств. Таким образом, не имеет смысла говорить о принадлежности u нечеткому множеству A, кроме тривиального случая, когда функция $f_A(u)$ принимает положительное значение. Однако возможно ввести две вспомогательные величины α и β ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > \beta$) и условиться, что $u \in A$, если $f_A(u) \geq \alpha$, $u \notin A$, если $f_A(u) \leq \beta$, и принадлежность u множеству A не определена, если $\beta < f_A(u) < \alpha$. Такая формализация отношения принадлежности соответствует трёхзначной логике Клини, где $T\,(f_A(u) \geq \alpha)$, $F\,(f_A(u) \leq \beta)$ и $U\,(\beta < f_A(u) < \alpha)$.

Следует различать функцию принадлежности нечеткого множества и функцию вероятности. Как отмечает Заде, понятие нечеткого множества не является статистическим по своей природе. В работе [13] делается вывод, что нечеткая логика является, по сути, многозначной логикой, в то время как теория вероятностей может быть описана в терминах двузначной модальной логики. Данные понятия различаются, однако возможно их успешное комбинирование в рамках единой системы. Сам же Заде [14] утверждает, что теория вероятностей, не подкрепленная нечеткой логикой, не является достаточно эффективной для работы с неточно определенными понятиями. Более того, нечеткая логика и теория вероятностей, являясь различными по своей природе дисциплинами, скорее успешно дополняют друг друга, нежели являются конкурирующими. Среди причин, вследствие которых классическая теория вероятностей не способна эффективно работать с нечеткостью и неопределенностью, можно выделить, например, следующие. Во-первых, теория вероятностей не поддерживает понятие нечеткого события (например, «в ближайшем будущем произойдет сильное землетрясение»). Во-вторых, теория вероятностей не располагает средствами к обработке нечетких кванторов: *много*, *мало*, *большинство*, *несколько* и пр. В-третьих, в теории вероятностей невозможно обрабатывать нечеткие вероятности: *вероятно*, *не очень вероятно* и пр. Более того, не существует способов оценки таких нечетких вероятностей. Таким образом, слияние нечеткой логики и теории вероятностей позволяет значительно увеличить выразительные средства последней.

Своим появлением нечеткая логика обязана работе Заде [15]. В нечеткой логике значения истинности могут располагаться в интервале [0, 1]. Само же понятие истинности трактуется как лингвистическая переменная, т.е. переменная, принимающая лингвистические значения. Так, лингвистическая переменная *Возраст* может принимать следующие значения: *молодой*, *очень молодой*, *немолодой*, *чрезвычайно старый* и пр. Множество значений лингвистической переменной *T* (*Возраст*) называется *терм-множеством*. Лингвистической переменной соответствует *базовая переменная*, т.е. переменная, принимающая числовое значение. Базовая переменная *возраст* лингвистической переменной *Возраст* может принимать значения в интервале [0, 150]. Формально, лингвистическая переменная – пятерка $(X, T(X), U, G, M)$, где X – имя переменной, $T(X)$ – терм-множество переменной X, где каждое значение переменной является нечеткой переменной X со значениями из универсального множества U с базовой переменной u, G – синтаксическое правило, порождающее терм-множество, M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной (область определения нечеткой переменной – нечеткое множество) X – нечеткое подмножество $M(X) \subseteq U$. Пусть переменная X зовется *Возраст*. Ей соответствует терм-множество *T* (*возраст*), универсальное множество U есть подмножество множества действительных чисел, синтаксическое правило G, задаваемое одной из порождающих грамматик, и семантическое правило M, приписывающее термам из *T* (*возраст*) значения, являющиеся модификациями нечетких множеств, например «молодой», «средних лет», «старый».

Нечеткая логика начинается там, где истинность и ложность определены недостаточно хорошо. В этом случае используется *лингвистическая перемен-*

ная истинности. Итак, для лингвистической переменной *Истинность*, терм-множество будет выглядеть следующим образом: T (*Истинность*) = *истинный* + *не очень истинный* + *очень ложный* + … Элементы данного терм-множества называются *лингвистическими значениями истинности*. Каждому высказыванию A в нечеткой логике соответствует также и *числовое значение истинности* v (A) из интервала [0, 1]. Терм *ложный* не является отрицанием терма *истинный*, а представляет собой его зеркальное отражение относительно точки 0.5 в [0, 1]. Иными словами, $v(\overline{A}) = 1-v(A)$. В общем случае, v (A) – не точка в [0, 1], а нечеткое подмножество, представленное в виде $v(A) = \mu_1/v_1 + \ldots + \mu_n/v_n$, где v_i – точки в [0, 1], а μ_i – их степени принадлежности множеству v (A). Соответственно, $v(\overline{A}) = \mu_1/(1-v_1) + \ldots + \mu_n/(1-v_n)$. Конъюнкция определяется как минимальное из числовых значений истинности $v(A)$ & $v(B)$, а дизъюнкция $v(A) \vee v(B)$ – как максимальное. Ввиду того, что данная переменная может, в общем случае, принимать неограниченное множество числовых истинностных значений, таблицы истинности для нечеткой логики могут содержать неограниченное количество строк.

Основным правилом вывода в нечеткой логике является композиционное правило вывода, частным случаем которого является *modus ponens*. Композицией отношений R ($U \to V$) и S ($V \to W$), $R \circ S$, называется нечеткое отношение $U \to W$, определяемое формулой $R \circ S = \int_{U\times W} \vee_v (\mu_R(u,v) \wedge \mu_S(u,w))/(u,w)$, где U, W и V – нечеткие множества. Если множества U, W и V являются конечными, то операция композиции сводится к максминному произведению матриц. Например, $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$. Теперь определим композиционное правило вывода. Пусть U и V – два универсальных множества с базовыми переменными u и v соответственно, а $R(u)$, $R(u, v)$ и $R(v)$ – обозначают ограничения на u, (u, v) и v соответственно и представляют собой нечеткие отношения в U, $U \times V$ и V. Пусть A и F – нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$. Тогда *композиционное правило вывода* утверждает, что решение уравнений назначения $R(u) = A$, $R(u, v) = F$ имеет вид $R(v) = A \circ F$. Заде рассматривает следующий пример. Предположим, что $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$, A = *малый* = {1/1, 0.6/2, 0.2/3} и F = *примерно равны* = {1/(1, 1), 1/(2, 2), 1/(3, 3), 1/(4, 4), 0.5/{(1, 2), (2,1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)}}. Уравнения назначения в этом случае имеют вид: $R(u)$ = *малый*, $R(u, v)$ = *примерно равны* и, следовательно, $R(v)$ = *малый* ∘ *примерно равны* $= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$, что аппроксимируется в виде $R(v)$ = *более или менее малый*. Данный вывод возможно записать следующим образом:

$\dfrac{\begin{array}{c} u - \text{малый} \\ u \text{ и } v - \text{примерно равны} \end{array}}{v - \text{более или менее малый}}$. Иными словами, каждая посылка записывается в виде уравнения назначения в отношениях, содержащего одно или большее число ограничений на базовые переменные. Эти уравнения решаются при помощи композиции нечетких отношений. Получаемые решения – вывод из данного набора посылок. Обобщенный *modus ponens* будет выглядеть следующим образом: $\dfrac{\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \Rightarrow B \end{array}}{A_1 \circ (A_2 \Rightarrow B)}$.

Значительный интерес представляет разрешение логических парадоксов в терминах нечеткой логики. Классическим примером является парадокс кучи. Рассмотрим его неформальное решение, представленное в [1]. В случае высказывания «число x мало» проблема состоит в оценке истинности импликации $f(x) \Rightarrow f(x + 1)$, т.е. классическая индукция не может быть применена к нечеткому свойству, иначе мы и придем к парадоксу. Однако с увеличением x увеличивается и «трудоёмкость» процесса проверки его малости. Нечеткая логика допускает, что импликация $f(x) \Rightarrow f(x + 1)$ истинна только в некоторой степени, т.е. $1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. При таком допущении парадокс кучи исчезает. В случае с парадоксом лжеца [16] утверждение $p \overset{\text{def}}{=}$ *p является ложным* и переписывается в виде $p \overset{\text{def}}{=}$ *p является* τ, где τ – числовое значение истинности лингвистической переменной *истина*. Таким образом, в случае парадокса лжеца τ принимает значение 0,5. В работе [17] представлены попытки введения многозначного предиката истинности в нечеткую логику для разрешения данного парадокса.

Что касается семантического недетерминизма, то, как оказалось, он присутствует в нечеткой логике лишь имплицитно. Нечеткость, а вместе с ней и недетерминизм, имеет место только в первоначальной концептуализации нечеткого объекта. Задание же нечеткого множества (или нечеткой таблицы истинности) детерминирует значения истинности. Таким образом, сформированная база данных нечеткой логики не является семантически не детерминированной. Однако попробуем эксплицировать недетерминизм в нечеткой логике. Для этого будем использовать N-матрицы из работ [2, 4]. Формально недетерминированная матрица в языке L – тройка $M = \langle V, D, O \rangle$, где V – непустое множество истинностных значений, D – множество выделенных значений $D \subseteq V$, O – множество функций $\tilde{\diamond}$: $V^n \to 2^V \setminus \{\varnothing\}$. Пусть M – N-матрица в языке L. Динамическим определением истинностных значений для M называется функция v: $W \to V$, где W – множество правильно построенных формул в языке L, замкнутое относительно подформул и удовлетворяющее следующему условию для каждой n-арной связки $\diamond$ языка L и $\psi_1, \dots, \psi_n \in W$: $v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) \in \tilde{\diamond}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n))$. Статическим определением истинностных значений для M называется динамическое определение истинностных значений, удовлетворяющее принципу композиционности, т.е. для каждой n-арной связки $\diamond$ языка L и $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in W$: $v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) = v(\diamond(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, если $v(\psi_1) = v(\varphi_1)$ $(i = 1 \dots n)$. В случае детерминированных матриц мы имеем $v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) = \tilde{\diamond}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n))$, т.е. истинностное значение формулы $\diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ однозначно определяется истинностными значениями ее подформул $v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n)$ (это и есть принцип композиционности). В случае же недетерминированных матриц истинностное значение формулы $\diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ не определено однозначно, так как функция v делает недетерминированный (случайный) выбор из множества $\tilde{\diamond}$ $(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n))$. В случае бинарной связки двузначной логики, функция $\tilde{\diamond}$ представляется следующим образом: $\tilde{\diamond}$: $\{\{t, f\}, \{f, t\}, \{t, t\}, \{f, f\}\} \to \{\{t\}, \{f\}, \{t, f\}\}$.

Степень принадлежности элемента нечеткому множеству в нечеткой логике является четкой величиной, что, как нам кажется, противоречит интуитивному понятию нечеткости. Более того, нечеткость видится нам недетерминированной характеристикой. Для внедрения семантического недетерминизма в нечеткую логику представим истинностные значения в таблице истинности нечетким образом, т.е. значением с погрешностью или доверительным интервалом. Такой интервал добавляет «второй уровень» нечеткости, иными словами, невозможно определить точную величину принадлежности элемента нечеткому множеству, можно лишь задать окрестность этой точки, т.е. задать степень принадлежности «размыто», «нечетко». Таким образом, нечеткая логика становится недетерминированной в смысле [4], так как степень принадлежности множеству (истинностное значение) представляет собой множество возможных результатов. Более того, возможна и физическая интуиция. Любое измеренное значение в физике имеет доверительный интервал, т.е. оно «недетерминированно» в какой-то заданной области.

Недетерминированная таблица истинности с доверительными интервалами представима в виде тройки $MF = \langle V, D, O \rangle$, где V – бесконечное (мощности континуума) множество истинностных значений, D – (возможно) бесконечное множество выделенных значений, O – множество функций $\tilde{\diamond}$: $V^n \to D$. Соответствующие функции нечеткой логики обобщаются на случай доверительного интервала. В отличие от обычных недетерминированных матриц множество истинностных значений в нашем случае представляет собой континуум, что, как нам кажется, лучше соответствует понятию нечеткости. В тривиальном случае, когда все погрешности одинаковы, основные логические операции нечеткой логики не переопределяются. Для общего случая (различные погрешности) нами был разработан следующий алгоритм для дизъюнкции/конъюнкции.

Алгоритм. Дизъюнкция доверительных интервалов.

Вход: Два доверительных интервала.

Выход: Наиболее подходящий доверительный интервал (из двух представленных).

Шаг 1. Если интервалы не пересекаются, то выбираем отрезок с наибольшей правой границей. **Конец.** Иначе **Шаг 2.**

Шаг 2. Если один из интервалов не содержится полностью в другом, то возвращаем интервал с наибольшей правой границей. **Конец.**

Иначе **Шаг 3.**

Шаг 3. Если левые границы интервалов совпадают, то возвращаем наибольший. **Конец.**

Иначе **Шаг 4.**

Шаг 4. Если правые границы интервалов совпадают, то возвращаем наименьший. **Конец.**

Иначе **Шаг 5.**

Шаг 5. Находим разницы левых и правых границ (Δ_1 и Δ_2 соответственно) большего и меньшего интервалов.

Шаг 6. Если $\Delta_1 = \Delta_2$, то возвращаем произвольный из интервалов. **Конец.**

Иначе **Шаг 6.**

Шаг 7. Если $\Delta_1 < \Delta_2$, то возвращаем наибольший интервал. **Конец.**

Иначе **Шаг 7.**

Шаг 8. Если $\Delta_1 > \Delta_2$, то возвращаем наименьший интервал. **Конец.**

Результатом такого рода дизъюнкции является доверительный интервал с наибольшей вероятностью выбора из него большей, нежели из второго интервала, точки при помощи недетерминированной процедуры (случайного выбора). Алгоритм для конъюнкции отличается лишь тем, что в шагах 7 и 8 знаки «больше» и «меньше» меняются на противоположные.

Для проверки эффективности алгоритма был проведен компьютерный эксперимент, для которого была написана соответствующая программа на языке C#. Эксперимент проходил в два этапа: оценка эффективности алгоритма для случая невложенных интервалов и оценка эффективности алгоритма для вложенных интервалов. В первом случае генерировалось 1000 пар пересекающихся невложенных интервалов с постепенным сдвигам вправо. Для каждой пары проводилось 10000 выборок и находилось процентное соотношение удачных и неудачных попыток. На втором этапе была использована та же методика, только для случая вложенных интервалов. Результаты эксперимента представлены на графиках.

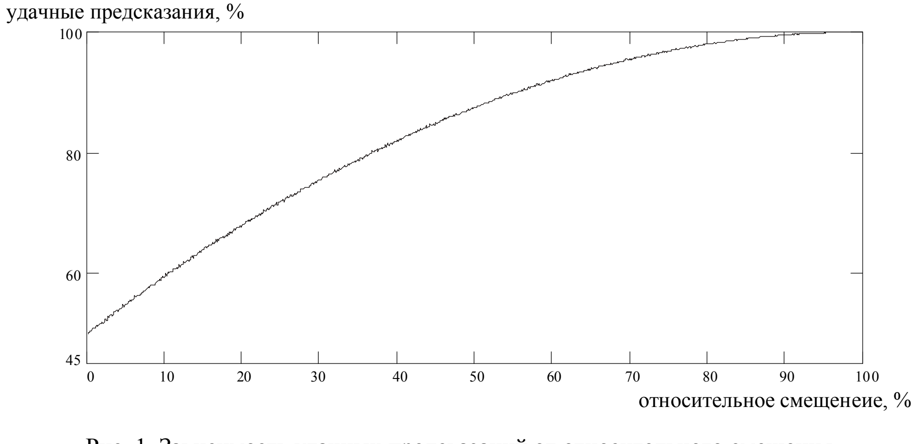

Рис. 1. Зависимость удачных предсказаний от относительного смещения в случае невложенных интервалов

Отметим, что эффективность приведенной нами эвристики подтверждается нелинейным характером графика на рис. 1.

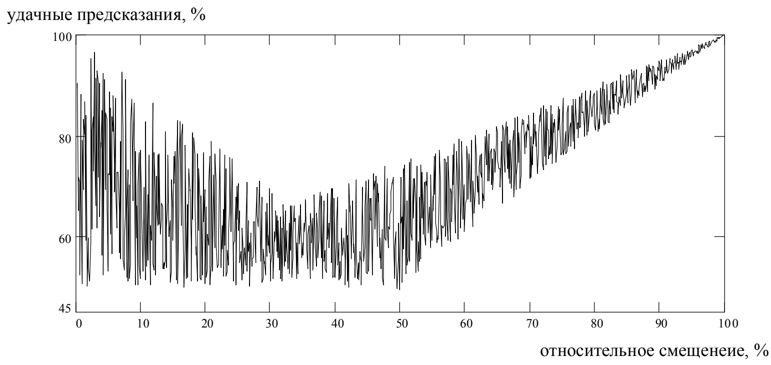

Рис. 2. Зависимость удачных предсказаний от относительного смещения в случае вложенных интервалов

Значительные флуктуации в левой части графика обусловлены тем, что при проведении эксперимента правая граница вложенного интервала не была зафиксирована. При увеличении смещения относительно левого края возможная длина интервала уменьшалась и, следовательно, уменьшалась амплитуда флуктуаций. Отметим, что в обоих экспериментах минимальный процент удачных предсказаний находился примерно на уровне 50% для почти одинаковых интервалов, что вновь подтверждает эффективность эвристики.

Отрицание нечеткой логики остается без изменений. Будем считать, что погрешность истинностного значения 1 в таком случае равняется 0. Теперь по правилу вычитания погрешностей $\Delta\,(x - y) = \Delta x - \Delta y$ заключаем, что в случае отрицания погрешность вычитаемой величины сохраняется. Для конечного случая композиционное правило вывода реализуется очевидным образом.

Разрешение парадокса кучи в нечеткой логике заключается в уменьшении размера шага и увеличении их количества в иерархии истинностных значений. Например, возможно говорить, что данная совокупность песчинок является кучей на 0,7 или 0,3. Однако в таком случае шаг все же остается дискретным. Иными словами, мы не разрешаем парадокс кучи, а лишь откладываем его, возможно в бесконечность. Рассмотрение истинностных значений как интервалов рождает иной подход к данному парадоксу. Мы не можем точно определить, насколько данная совокупность песчинок является кучей, степень принадлежности характеризуется величиной с погрешностью, например $\langle 0.5 \pm 0.07 \rangle$. В таком случае нечеткая логика становится действительно нечеткой и одновременно недетерминированной. Для работы с такого рода нечеткостью мы и используем метод из [2, 4].

Литература

1. *Новак В., Перфильева И., Мочкорж И.* Математические принципы нечеткой логики: пер. с англ. М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 352 с.
2. *Avron A., Zamansky A.* Non-Deterministic Semantics for Logical Systems // Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2011. Vol. 16. P. 227–304.

3. *Генцен Г.* Исследования логических выводов: пер. с нем. / Г. Генцен. Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. 351 с.
4. *Avron A.* Logical Non-Determinism as a Tool for Logical Modularity: An Introduction / A. Avron. Studies in Logic. College Publications, 2009. Vol. 21. P. 15–26.
5. *Kleene S.* On Notation for Ordinal Numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3 (4). P. 150–155.
6. *McCarthy J.* A basis for mathematical theory of computation // J. McCarthy. Computer Programming and Formal Systems. 1963. P. 33–70.
7. *Päppinghaus P., Wirsig M.* Nondeterministic Three-Valued Logic: Isotonic and Guarded Truth-Functions // Studia Logica. Kluwer Academic Publishers, 1983. Vol. 42 (1). P. 1–22.
8. *Kleene S.* Introduction to Metamathematics. Ishi Press International, 2009. 550 p.
9. *Corciulo L.* Expressive Power of Non-Deterministic operators for logic-based languages / L. Corciulo, F. Giannotti, D. Pedreschi, C. Zaniolo // Workshop on Deductive Databases and Logic Programming. ICPL, 1994. P. 27–40.
10. *Abiteboul S., Vianu V.* Non-determinism in logic-based languages // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 1991. Vol. 3. P. 151–186.
11. *Russell B.* Vagueness // Australian Journal of Philosophy and Psychology. 1923. Vol. 1. P. 84–92.
12. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
13. *Hájek P., Godo L., Esteva F.* Fuzzy logic and probability // In Uncertainty in Artificial Intelligence. Proc. of 11th conference. 1995. P. 237–244.
14. *Zadeh L.A.* Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competetive // Technometrics. 1995. Vol. 37, № 3. P. 271–276.
15. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: пер. с англ. М.: Наука, 1976. 165 с.
16. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems / L.A. Zadeh. World Scientific, 1996. 826 p.
17. *Hájek P., Paris J., Shepherdson J.* The Liar Paradox and Fuzzy Logic // The Journal of Symbolic Logic. 2000. Vol. 65, № 1. P. 339–346.

Galimullin Rustam Fanisovich National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation)

THE NON-DETERMISNISM PROBLEM AND FUZZY LOGIC

Key words: semantic non-determinism, fuzzy logic

The notion of semantic non-determinism and its relation to the notion of fuzziness are considered in the paper. This notion is governed by the non-determinism of a domain and is formally modeled with N-matrices. These matrices include sets of truth-values, instead of a single representation. The choice of a truth-value from a certain set is random. Sematic determinism has outstanding advantages in modeling non-deterministic queries, faulty logic gates, etc. The notion of fuzziness, being fundamental for the theory of fuzzy sets, represents many-to-one relation, while the notion of semantic non-determinism – one-to-many. Fuzzy logic, which is based on fuzzy sets, handles linguistic variable "Truth" with a range of truth-values [0, 1]. Our supposition is that fuzziness – non-deterministic concept. Non-determinism in fuzziness is implicit, and we suggest alternative consideration of a grade of membership as an interval value. This consideration allows us to have a different look at the Sorites paradox. Main operations of the fuzzy logic are overridden in the terms of the intervals, and an effectiveness of the redefining is confirmed by the computer experiments.

References

1. *Novak V., Perfil'eva I., Mochkorzh I.* Matematicheskie printsipy nechetkoy logiki [Mathematic principles of fuzzy logic]. Translated from English. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2006. 352 p.
2. *Avron A., Zamansky A.* Non-deterministic semantics for logical systems. Handbook of Philosophical Logic, 2011, vol. 16, pp. 227-304. DOI: 10.1007/978-94-007-0479-4_4
3. *Gentsen G.* Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda [Mathematical theory of logical derivation]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 351 p.
4. *Avron A.* Logical non-determinism as a tool for logical modularity: An Introduction. Studies in logic. College Publications, 2009. Vol. 21, pp. 15-26.

5. *Kleene S.* On Notation for ordinal numbers. The Journal of Symbolic Logic, 1938, vol. 3 (4), pp. 150-155. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2267778
6. *McCarthy J.* A basis for mathematical theory of computation. In: Braffort P., Hirschberg D. (eds.) Computer Programming and Formal Systems. North-Holland Publ., 1963, pp. 33-70.
7. *Päppinghaus P., Wirsig M.* Nondeterministic three-valued logic: Isotonic and guarded truth-functions. Studia Logica, 1983, vol. 42 (1), pp. 1-22. DOI: 10.1007/BF01418755
8. *Kleene S.* Introduction to metamathematics. Ishi Press International, 2009. 550 p.
9. *Corciulo L.* Expressive power of non-deterministic operators for logic-based languages. In: Corciulo L., Giannotti F., Pedreschi D., Zaniolo C. Workshop on Deductive Databases and Logic Programming. ICPL, 1994, pp. 27-40.
10. *Abiteboul S., Vianu V.* Non-determinism in logic-based languages. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 1991, vol. 3, pp. 151-186. DOI: 10.1007/BF01530924
11. *Russell B.* Vagueness. Australian Journal of Philosophy and Psychology, 1923, vol. 1, pp. 84-92. DOI: 10.1080/00048402308540623
12. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets. Information and Control, 1965, Vol. 8, pp. 338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
13. *Hájek P., Godo L., Esteva F.* Fuzzy logic and probability. In Uncertainty in Artificial Intelligence.Proc. of 11th conference. Montreal, 1995, pp. 237-244.
14. *Zadeh L.A.* Discussion: Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competetive. Technometrics, 1995, vol. 37, no. 3, pp. 271-276. DOI: 10.1080/00401706.1995.10484330
15. *Zadeh L.* Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy [Notion of the linguistic variable and its applying to the acception of approximate solutions]. Translated from English. Moscow: Nauka Publ., 1976. 165 p.
16. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems. World Scientific, 1996. 826 p.
17. *Hájek P., Paris J., Shepherdson J.* The liar paradox and fuzzy logic. The Journal of Symbolic Logic, 2000, vol. 65, no.1, pp. 339-346. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2586541