УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, А.К. Мордовской

КОРРЕКТНОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ И ИХ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ СВОИМИ ПОДГРУППАМИ

Описана связь корректности и определяемости своими подгруппами (своими собственными подгруппами) для некоторых классов абелевых групп, получены критерии корректности для делимых групп без кручения и для обобщенно вполне разложимых групп в классе обобщенно вполне разложимых групп.

Ключевые слова: *почти изоморфизм*, *s-изоморфизм*, *t-изоморфизм*, *корректность абелевой группы*, *определяемость группы своими подгруппами* (*своими собственными подгруппами*).

Две абелевы группы называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы [1]. Две абелевы группы называются почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. Задача об изоморфизме почти изоморфных групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [2] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных примарных групп эта проблема имеет положительное решение [2], однако П. Кроули привел пример неизоморфных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы [3]. В ряде работ исследуется, когда из почти изоморфизма абелевых групп по сервантным или вполне характеристическим подгруппам вытекает их изоморфизм (например, [4–8]).

Известная теоретико-множественная теорема Кантора – Шредера – Бернштейна являлась источником постановки аналогичных задач в алгебре не только для абелевых групп. В [9] изучается теоретико-кольцевой, а в [10] – теоретико-категорный аналоги теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна. Рассматриваются также почти изоморфные модули (например, [11–13]). Подобные задачи возникают и в других областях математики, в частности в топологии [14, с. 20, 21].

Существует также логический аспект задачи о почти изоморфизме, основанный на том, что если модули почти изоморфны по чистым подмодулям, то они элементарно эквивалентны [15].

Для рассмотренных аналогов теоремы Кантора-Шредера-Бернштейна характерно, в отличие от самой теоремы, наличие примеров отрицательного решения соответствующих задач, а также изучение классов объектов, для которых эти задачи имеют положительное решение.

Абелева группа A называется *корректной*, если для любой абелевой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A', B' – подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм $A \cong B$ [7].

Для абелевой группы A обозначим соответственно через $S(A)$ и $Sub(A)$ множества ее подгрупп и ее собственных подгрупп.

Определение 1 [16]. Будем говорить, что группы A и B t-изоморфны (обозначение $A \overset{t}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $S(A)$ на множество $S(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны.

Определение 2 [16]. Будем говорить, что группы A и B s-изоморфны (обозначение $A \overset{s}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $Sub(A)$ на множество $Sub(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны.

Естественно возникает вопрос: как связаны между собой t-изоморфизм, s-изоморфизм и почти изоморфизм.

Приведем результаты о такой связи, полученные ранее.

Теорема 3 [17]. Если абелевы группы A и B почти изоморфны, то они t-изоморфны.

Так как любые две t-изоморфные группы почти изоморфны, получаем

Следствие 4 [17]. Абелевы группы A и B t-изоморфны тогда и только тогда, когда они почти изоморфны.

Связь между t-изоморфизмом и s-изоморфизмом устанавливают следующие результаты.

Теорема 5 [17]. Если абелевы группы A и B t-изоморфны, то они s-изоморфны.

Теорема 6 [17]. Абелевы группы A и B, содержащие собственные подгруппы, изоморфные самим группам, t-изоморфны тогда и только тогда, когда они s-изоморфны.

Естественно возникает вопрос: в каких случаях t-изоморфные (s-изоморфные) группы изоморфны.

Определение 7. Если абелева группа A такова, что для любой абелевой группы B из $A \overset{t}{\cong} B$ ($A \overset{s}{\cong} B$) вытекает $A \cong B$, то будем говорить, что группа A *определяется своими подгруппами* (*своими собственными подгруппами*).

Вопрос об определяемости группы своими подгруппами (своими собственными подгруппами) представляет самостоятельный интерес, и как оказалось, этот вопрос тесно связан с исследованием корректных абелевых групп.

Из приведенных выше теорем вытекают следующие результаты:

Следствие 8 [17]. Абелева группа A определяется своими подгруппами тогда и только тогда, когда A – корректная группа.

Следствие 9 [17]. Абелева группа определяется своими подгруппами, если она определяется своими собственными подгруппами.

Следствие 10 [17]. Если абелева группа определяется своими собственными подгруппами, то она корректна.

Заметим, что определения почти изоморфизма, t-изоморфизма, s-изоморфизма можно дать аналогичным образом для двух универсальных алгебр A и B одной и той же сигнатуры. Также аналогично могут быть определены понятия корректной универсальной алгебры и алгебры, определяющейся своими подалгебрами (своими собственными подалгебрами). В приведенных выше результатах никак не учитывается специфика абелевых групп, и поэтому эти результаты с соответствующей переформулировкой справедливы для произвольных универсальных алгебр.

Для прямых сумм циклических групп критерии определяемости своими подгруппами и своими собственными подгруппами были получены в [17].

В настоящей работе исследуются корректность абелевых групп из некоторых классов и их определяемость своими подгруппами. Для полноты изложения рассмотрим сначала результаты из [17], относящиеся к группам без кручения (теоремы 11, 13, 14 и следствие 12).

Теорема 11. Пусть A – абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Группа A определяется своими собственными подгруппами тогда и только тогда, когда A – корректная группа.

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 10. Докажем достаточность. Пусть A – корректная абелева группа без кручения, не являющаяся делимой, и B – такая абелева группа, что $A \overset{s}{\cong} B$. Существует такое натуральное число n, что $nA \neq A$, и, так как A – группа без кручения, то $nA \cong A$. B – также группа без кручения. Действительно, если предположить, что в группе B существует ненулевой элемент b конечного порядка, то $<b>$ – конечная подгруппа группы B, а тогда во множестве подгрупп группы A была бы конечная подгруппа A_1, такая, что $|A_1| = |< b >| = o(b)$, чего быть не может. Если B не является делимой группой, то существует такое натуральное число m, что $mB \neq B$, и, так как B – группа без кручения, то $mB \cong B$. Применяя теорему 6, получаем, что $A \overset{t}{\cong} B$, а значит, по следствию 4 группы A и B почти изоморфны. Учитывая корректность группы A, имеем $A \cong B$.

Покажем, что группа B не может быть делимой группой. Пусть B – делимая группа конечного ранга и ее ранг $r(B) = n$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Запишем группу A в виде $A = D \oplus R$, где D – делимая часть группы A, а R – редуцированная часть этой группы, причем $R \neq 0$. Пусть $r(D) = m$. Наибольший ранг собственных делимых подгрупп группы B равен $n - 1$. Наибольшая собственная делимая подгруппа группы A совпадает с D и ее ранг равен m. Из s-изоморфизма групп A и B следует, что $n - 1 = m$. Так как в группе A есть единственная собственная делимая подгруппа ранга m, а в группе B есть по крайней мере две собственных делимых подгруппы ранга $n - 1$, то это противоречит s-изоморфизму групп A и B. Если же $r(B) = 1$, т.е. $B \cong \boldsymbol{Q}$, то всякая собственная подгруппа группы B имеет ранг 1 и типы собственных подгрупп группы B пробегают множество всевозможных типов, отличных от типа, представленного характеристикой $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$. Ясно, что тогда из s-изоморфизма групп A и B вытекает $r(A)=1$ и $A \cong B \cong \boldsymbol{Q}$, чего быть не может, так как редуцированная часть группы A отлична от нуля.

Пусть теперь B – делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \cong \boldsymbol{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geq \aleph_0$. Пусть $i_0 \in I$ и $B_1 = \bigoplus_{i \in I \setminus \{i_0\}} B_i$. B_1 – собственная подгруппа группы B, изоморфная самой группе B. Тогда, применяя теорему 6 и следствие 4, получаем $A \cong B$, чего быть не может, так как группа A не является делимой. ■

Следствие 12. Пусть A – абелева группа без кручения, не являющаяся делимой. Следующие условия эквивалентны:

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими собственными подгруппами;

3) A определяется своими подгруппами.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из теоремы 11. Эквивалентность условий 1) и 3) – из следствия 8. ■

Перейдем теперь к рассмотрению делимых групп без кручения.

Теорема 13. Пусть A – делимая группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими собственными подгруппами;

3) A определяется своими подгруппами;

4) A имеет конечный ранг.

Доказательство. Покажем эквивалентность условий 1) и 4).

а) $1) \Rightarrow 4)$. Пусть A – делимая группа без кручения, имеющая бесконечный ранг. $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $A_i \cong \boldsymbol{Q}$ для всякого $i \in I$, $|I| \geq \aleph_0$. Зафиксируем индекс $i_0 \in I$ и выберем в группе A_{i_0} бесконечную циклическую подгруппу C_{i_0} ($C_{i_0} \cong \boldsymbol{Z}$). Пусть $A_1 = C_{i_0} \oplus C$, где $C = \bigoplus_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i$. A_1 – подгруппа группы A, и, так как $A \cong C$, то группы A и A_1 почти изоморфны, однако A не изоморфна A_1. Значит, группа A не является корректной.

б) $4) \Rightarrow 1)$. Покажем, что делимая группа без кручения A конечного ранга корректна. Пусть B – абелева группа и группы A и B почти изоморфны, то есть $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A', B' – подгруппы групп A и B соответственно. Так как B' – делимая группа, то имеем $B = B' \oplus B''$. Из почти изоморфизма групп A и B вытекает $r(A) = r(B') \leq r(B)$ и $r(B) = r(A') \leq r(A)$. Значит, $r(A) = r(B) = r(B')$, отсюда $B'' = 0$. Итак, $B = B'$, и поэтому $A \cong B$.

Эквивалентность условий 1) и 3) дает следствие 8.

Покажем эквивалентность условий 2) и 4).

а) $2) \Rightarrow 4)$. Пусть делимая группа без кручения A определяется своими собственными подгруппами. Тогда по следствию 10 группа A корректна и, значит, в силу уже доказанной эквивалентности условий 1) и 4), группа A имеет конечный ранг.

б) $4) \Rightarrow 2)$. Пусть делимая группа без кручения A имеет конечный ранг n, где $n > 1$, B – абелева группа и $A \overset{s}{\cong} B$. Понятно, что группа B также имеет конечный ранг m и $m > 1$. В группе A максимальный ранг собственных подгрупп равен n, а в группе B такой ранг равен m. Из s-изоморфизма групп A и B вытекает $n = m$. Пусть A_1 – делимая подгруппа ранга $n - 1$ группы A. Тогда в группе B есть подгруппа B_1, изоморфная подгруппе A_1. Имеем $B = B_1 \oplus B_2$, где $r(B_1) = n - 1$, $r(B_2) = 1$. Если группа B_2 не является делимой, то в группе B есть единственная собственная делимая подгруппа ранга $n - 1$, а именно, подгруппа B_1, а в группе A есть по крайней мере две собственные делимые подгруппы ранга $n - 1$. Это противоречит s-изоморфизму групп A и B. Значит, B_2 – делимая группа, а тогда и B – делимая группа, причем $r(B) = r(A)$. Следовательно, $A \cong B$.

Если же $r(A) = 1$, то $r(B) = 1$ и, так как A и B – s-изоморфны, то $A \cong B \cong \boldsymbol{Q}$. ■

Теорема 13 и следствие 12 показывают, что для абелевых групп без кручения справедлив такой результат.

Теорема 14. Пусть A – абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими собственными подгруппами;

3) A определяется своими подгруппами.

Перейдем к исследованию корректности обобщенно вполне разложимых групп и их определяемости своими подгруппами.

Абелева группа A называется *обобщенно вполне разложимой*, если она разлагается в прямую сумму групп ранга 1 (не обязательно без кручения).

Понятие вполне разложимости было распространено с групп без кручения на произвольные группы С. Меджиббеном [18].

С.Я. Гриншпон доказал, что если G – обобщенно вполне разложимая группа, то любые два разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны и всякое прямое слагаемое группы G – обобщенно вполне разложимая группа. Он также получил полное описание вполне характеристических подгрупп и решетки, ими образуемой, для обобщенно вполне разложимых групп [19].

Выберем в каждом классе изоморфных абелевых групп ранга 1 по одному представителю и пусть $\mathfrak{I} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in S}$ – множество этих представителей. $\mathfrak{I}$ является максимальным множеством попарно неизоморфных абелевых групп ранга 1. Зададим отношение частичного порядка на множестве S следующим образом: $\alpha_1 \leq \alpha_2$, если группа G_{α_1} изоморфна подгруппе группы G_{α_2}.

Пусть A – обобщенно вполне разложимая группа. Собирая для всякого $\alpha \in S$ в ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 прямые слагаемые, изоморфные G_α, получим разложение $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{I}_\alpha} G_\alpha$ (некоторые из групп $A(\alpha)$ могут быть нулевыми).

Определение 15. Будем говорить, что для группы $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{I}_\alpha} G_\alpha$, *выполняется условие S-максимальности*, если любая цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$, где $\alpha_i \in S$, $A(\alpha_i) \neq 0$, обрывается.

Определение 16. Группу A назовем *S-ступенчатой*, если для любого $\alpha \in S$, такого, что $\mathfrak{I}_\alpha \geq \aleph_0$, и для любого $\beta \in S$, такого, что $\beta < \alpha$, выполняется $\mathfrak{I}_\beta > \mathfrak{I}_\alpha$.

Пусть Ω – некоторый класс абелевых групп. Напомним, что группа A из класса Ω называется *корректной в классе* Ω, если для любой группы B из класса Ω из того, что группы A и B почти изоморфны, следует изоморфизм $A \cong B$. Если группа A из класса Ω такова, что для любой группы B из класса Ω из t-изоморфизма групп A и B следует $A \cong B$, то будем говорить, что *группа A определяется своими подгруппами в классе* Ω.

Теорема 17. Обобщенно вполне разложимая группа A корректна в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A S-ступенчатая группа и для нее выполняется условие S-максимальности.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{I}_\alpha} G_\alpha$ обобщенно вполне разложимая группа и A – корректная группа в классе обобщенно вполне разложимых групп. Допустим, что A не является S-ступенчатой группой, то есть существуют такие $\beta < \alpha$ из S, что $\Im_\alpha \geq \aleph_0$ и $\Im_\beta \leq \Im_\alpha$. Рассмотрим два случая: а) $\Im_\beta = 0$, б) $\Im_\beta \neq 0$.

а) Представим группу $A(\alpha)$ в виде $A(\alpha) = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\alpha)$ – группа, изоморфная G_α, $A^{**}(\alpha)$ – прямая сумма $\Im_\alpha$ групп, изоморфных G_α. Рассмотрим подгруппу B группы A: $B = A^*(\beta) \underset{\gamma\neq\alpha}{\oplus} A(\gamma) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\beta)$ – подгруппа группы $A^*(\alpha)$, изоморфная G_β. Так как $A^{**}(\alpha) \cong A(\alpha)$, то группа A изоморфна подгруппе группы B, а именно $A \cong \underset{\gamma\neq\alpha}{\oplus} A(\gamma) \oplus A^{**}(\alpha)$. Значит, группа A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе A нет прямого слагаемого, изоморфного G_β, а в группе B есть.

б) Пусть $A = A(\alpha) \oplus A(\beta) \underset{\gamma\neq\alpha,\beta}{\oplus} A(\gamma)$. Рассмотрим следующую подгруппу B группы A: $B = A(\alpha) \underset{\gamma\neq\alpha,\beta}{\oplus} A(\gamma)$. Группы A и B не изоморфны, так как в группе B нет прямых слагаемых, изоморфных G_β. Однако группы A и B почти изоморфны. Покажем это. Так как $\Im_\alpha \geq \aleph_0$ и $\Im_\beta \leq \Im_\alpha$, то $\Im_\alpha + \Im_\beta = \Im_\alpha$ и группу $A(\alpha)$ можно записать в виде $A(\alpha) = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha)$, где $A^*(\alpha)$ – прямая сумма $\Im_\beta$ групп, изоморфных G_α, $A^{**}(\alpha)$ – прямая сумма $\Im_\alpha$ групп, изоморфных G_α. Имеем $B = A^*(\alpha) \oplus A^{**}(\alpha) \underset{\gamma\neq\alpha,\beta}{\oplus} A(\gamma)$ и $A \cong A^*(\beta) \oplus A^{**}(\alpha) \underset{\gamma\neq\alpha,\beta}{\oplus} A(\gamma)$, где $A^*(\beta) = \underset{\Im_\beta}{\oplus} G_\beta$ – подгруппа группы $A^*(\alpha) = \underset{\Im_\beta}{\oplus} G_\alpha$. Значит, группы A и B почти изоморфны.

Итак, получили, что всякая обобщенно вполне разложимая корректная группа является S-ступенчатой.

Пусть $A = \underset{\alpha\in S}{\oplus} A(\alpha)$ – корректная в классе обобщенно вполне разложимых групп и S-ступенчатая группа, но для группы A не выполняется условие S-максимальности, то есть существует такое подмножество $S_1 = \{\alpha_i\}_{i\in N}$ элементов множества S, что $A(\alpha_i) \neq 0$ и цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ не обрывается. Пусть $S_2 = S \setminus S_1$. Тогда $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 = \underset{\alpha\in S_1}{\oplus} A(\alpha)$, $A_2 = \underset{\alpha\in S_2}{\oplus} A(\alpha)$. Предположим, что $\Im_{\alpha_i} \geq \aleph_0$ для всякого $\alpha_i \in S_1$. Так как во всяком множестве кардинальных чисел есть наименьшее, то существует такое $\alpha_j \in S_1$, что $\Im_{\alpha_j} \leq \Im_{\alpha_i}$ для каждого $\alpha_i \in S_1$ такого, что $\alpha_j < \alpha_i$, а это противоречит S-ступенчатости группы A.

Пусть α_r наименьшее из таких $\alpha_k \in S_1$, что $0 < \Im_{\alpha_k} < \aleph_0$. Так как A – S-ступенчатая группа, то для всякого $\alpha_m \in S_1$, $\alpha_m > \alpha_r$, имеем $\Im_{\alpha_m} < \aleph_0$. Тогда $A_1 = A(\alpha_r) \oplus A_1^*$, где $A_1^* = \underset{\alpha\in S_1\setminus\{\alpha_r\}}{\oplus} A(\alpha)$. Рассмотрим следующую подгруппу B группы A: $B = A_1^* \oplus A_2$. Так как $\sum\limits_{m>r} \Im_{\alpha_m} = \aleph_0$, а при $m \geq r$ все кардинальные числа $\Im_{\alpha_m}$ конечны, то в группе A_1^* есть подгруппа, изоморфная группе A_1. Итак, получили, что группы A и B почти изоморфны. Однако группы A и B не изоморфны, так как в группе B нет прямого слагаемого, изоморфного G_{α_r}, а в группе A есть.

Достаточность. Пусть A – S-ступенчатая обобщенно вполне разложимая группа и для нее выполняется условие S-максимальности. $A = \underset{p}{\oplus} A_p \oplus A_0$, где $A_p = \underset{\alpha}{\oplus} A(\alpha) = \underset{\alpha}{\oplus} \underset{\Im_\alpha}{\oplus} G_\alpha$, G_α – коциклические p-группы и $A_0 = \underset{\alpha}{\oplus} A(\alpha) = \underset{\alpha}{\oplus} \underset{\Im_\alpha}{\oplus} G_\alpha$, G_α – группы без кручения. Пусть группа B почти изоморфна группе A.

Среди подгрупп группы A, изоморфных группе B, выберем такую (обозначим ее через B), что $B = \underset{p}{\oplus} B_p \oplus B_0$ и $B_0 < A_0$, $B_p < A_p$ для каждого простого числа p. Среди подгрупп группы B, изоморфных группе A, выберем такую (обозначим ее через C), что $C = \underset{p}{\oplus} C_p \oplus C_0$ и $C_0 < B_0$, $C_p < B_p$ для каждого простого числа p. Тогда из почти изоморфизма групп A и B следует почти изоморфизм A_0 и B_0, A_p и B_p для каждого простого числа p.

а) A_p и B_p почти изоморфны. Покажем, что $A_p \cong B_p$. Так как для группы A_p и, следовательно, B_p выполняется условие максимальности на множестве S, получаем $A_p = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \underset{\Im_{\alpha_i}}{\oplus} G_{\alpha_i}$, $B_p = \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} \underset{\Im'_{\alpha_j}}{\oplus} G_{\alpha_j}$.

В силу почти изоморфизма групп A_p и B_p, получаем такие системы неравенств:

$$\begin{cases} m \le n \\ \Im'_m \le \sum\limits_{i=m}^{n} \Im_i \\ \Im'_{m-1} + \Im'_m \le \sum\limits_{i=m-1}^{n} \Im_i \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \Im'_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \Im_i \end{cases} \text{ и } \begin{cases} n \le m \\ \Im_n \le \sum\limits_{i=n}^{m} \Im'_i \\ \Im_{n-1} + \Im_n \le \sum\limits_{i=n-1}^{m} \Im'_i \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Im_i \le \sum\limits_{i=1}^{m} \Im'_i \end{cases}$$

Так как $m \le n$ и $n \le m$, то $m = n$. Системы неравенств перепишутся так:

$$\begin{cases} \Im'_n \le \Im_n \\ \Im'_{n-1} + \Im'_n \le \Im_{n-1} + \Im_n \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Im'_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \Im_i \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \Im_n \le \Im'_n \\ \Im_{n-1} + \Im_n \le \Im'_{n-1} + \Im'_n \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Im_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \Im'_i \end{cases}$$

Проведя «индукцию вниз», покажем, что для всякого i ($i = 1, \dots, n$) $\Im_i = \Im'_i$. Сравнивая первые неравенства в системах, получаем $\Im_n = \Im'_n$. Пусть $\Im_i = \Im'_i$ для всякого i, удовлетворяющего неравенству $k \le i \le n$ $(k \in \mathbf{N},\ k > 1)$. Из $(n + 2 - k)$-х неравенств системы получаем $\sum\limits_{i=k-1}^{n} \Im_i = \sum\limits_{i=k-1}^{n} \Im'_i$. Если $\Im_i < \aleph_0$ для всякого $i = k, k+1, \dots, n$, то $\Im_{k-1} = \Im'_{k-1}$. Если существует такое $s > k - 1$, что $\Im_s \ge \aleph_0$, то, учитывая S-ступенчатость группы A, получаем $\Im_{k-1} > \sum\limits_{i=k}^{n} \Im_i \ge \aleph_0$.

Имеем $\Im_{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n} \Im_i = \sum_{i=k-1}^{n} \Im'_i = \Im'_{k-1} + \sum_{i=k}^{n} \Im'_i$, и так как $\Im_{k-1} > \sum_{i=k}^{n} \Im'_i = \sum_{i=k}^{n} \Im_i$, то $\Im_{k-1} = \Im'_{k-1}$.

Итак, для всякого i ($i = 1, \ldots, n$) $\Im_i = \Im'_i$. Следовательно, группы A_p и B_p изоморфны.

б) Пусть A – обобщенно вполне разложимая группа без кручения и $A = \bigoplus_{\alpha\in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\Im_\alpha} G_\alpha$. Каждая G_α – группа без кручения ранга 1 и A – вполне разложимая группа без кручения. Множество S можно считать совпадающим с множеством T всех типов групп без кручения ранга 1. Введем следующие обозначения: $A = \bigoplus_{t\in T_A} A_t$, где $A_t = \bigoplus_{\Im_t} G_t$, G_t – группа без кручения ранга 1 типа t, $T_A = \{t \in S \mid r(A_t) \neq 0\}$. Если $F = \bigoplus_{t\in T_F} F_t$ – вполне разложимая группа, то через F' обозначается прямая сумма подгрупп F_t, имеющих бесконечный ранг, а через F'' – прямая сумма подгрупп F_t, имеющих конечный ранг. Через $F(t)$ будем обозначать подгруппу $\bigoplus_{t'\in T_F, t'\geq t} F_{t'}$, через $F^*(t)$ – подгруппу $\bigoplus_{t'\in T_F, t'>t} F_{t'}$.

Пусть $A_0 = \bigoplus_{t\in T_A} A_t$ – вполне разложимая S-ступенчатая группа и для нее выполняется условие S-максимальности. Вполне разложимая группа $B_0 = \bigoplus_{t\in T_B} B_t$ почти изоморфна группе A_0, то есть $A_0 \cong B'$ и $B_0 \cong A'$, где A' и B' – подгруппы соответственно групп A_0 и B_0. Пусть $\psi : B_0 \to A'$ – указанный изоморфизм. Для упрощения записи введем следующие обозначения: $A = A_0 = \bigoplus_{t\in T_A} A_t$, $B = A' = \bigoplus_{t\in T_B} B_t$, $C = \psi(B') = \bigoplus_{t\in T_C} C_t$.

Следуя подходу, примененному в [20] при исследовании почти изоморфных абелевых групп без кручения, покажем, что для любого типа $t \in T_A$ верны следующие утверждения:

а) если $t' > t$, $t' \notin T_A$, то $t' \notin T_B$;

б) $r(A_t) = r(B_t)$;

в) если $a \in A_t$, где $r(A_t)$ конечен, то существует такое натуральное число m, что $ma \in B(t)$; если $b \in B_t$, где $r(B_t)$ конечен, то существует такое натуральное число m, что $mb \in C(t)$.

I. Пусть t – максимальный тип в множестве T_A.

а) Допустим, существует тип $t' > t$, такой, что $t' \notin T_A$, $t' \in T_B$. Тогда существует элемент $b \in B$, такой, что $t_B(b) = t'$. Имеем $t_A(b) \geq t'$, но это противоречит тому, что t – максимальный тип в множестве T_A. Здесь $t_B(b)$ и $t_A(b)$ – типы элемента b в группах B и A соответственно.

б) Так как t – максимальный тип в множестве T_A, имеем $B_t \subseteq A_t$, следовательно, $r(B_t) \leq r(A_t)$. Так как в множестве T_B не существует типа $t' > t$, имеем

$C_t \subseteq B_t$, следовательно, $r(C_t) \le r(B_t)$. Таким образом, $r(C_t) \le r(B_t) \le r(A_t)$. Но $r(A_t) = r(C_t)$, так как $A \cong C$. Получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

в) В силу максимальности типа t имеем $A(t)=A_t$, $B(t)=B_t$, $C(t)=C_t$. Так как $C_t \subseteq B_t \subseteq A_t$ и $r(C_t) = r(B_t) = r(A_t)$ является конечным, то утверждение в) имеет место.

II. Пусть $t \in T_A$ и допустим, что утверждение а), б), в) верны для любого типа $t^* > t$. Покажем, что эти утверждения верны также и для типа t.

а) Пусть тип $t' > t$ такой, что $t' \notin T_A$, $t' \in T_B$. Тогда существует ненулевой элемент $b \in B_{t'}$. В группе A элемент b имеет тип, больший или равный t', то есть $b = a_1 + \ldots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \ldots, a_k \in A_{t_k}$, причем $t_1 > t', \ldots, t_k > t'$. Группы $A_{t_1}, \ldots, A_{t_k}$ имеют конечный ранг, так как в противном случае в силу строения группы A имеем $t' \in T_A$.Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа $m_1, \ldots, m_k$, что $m_1 a_1 \in B(t_1)$, …, $m_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $mb \in B^*(t')$, где $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mb \in B_{t'}$. Получили противоречие.

б) Покажем, что $r(A_t) = r(B_t)$. Рассмотрим два случая отдельно: 1) $r(A_{t'})$ конечен для любого типа $t' > t$; 2) существует тип $t' > t$, такой, что $r(A_{t'})$ – бесконечный кардинал.

1) Пусть $r(A_{t'})$ конечен для любого типа $t' > t$. Тогда, согласно индуктивному предположению, $r(B_{t'})$ также конечен для любого типа $t' > t$.

Покажем, что $r(C_t) \le r(B_t)$. Рассмотрим ненулевой элемент $c \in C_t$. Так как $C \subseteq B$, то $c = b_1 + \ldots + b_k$, где $b_1 \in B_{t_1}$, …, $b_k \in B_{t_k}$. Допустим, что $t_i \ne t$ для всякого $1 \le i \le k$, то есть $t_1 > t$, …, $t_k > t$. Для любого $1 \le i \le k$ $r(B_{t_i})$ конечен, тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа m_1, …, m_k, что $m_1 b_1 \in C(t_1)$, …, $m_k b_k \in C(t_k)$. Следовательно, $mc \in C^*(t)$, где $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mc \in C_t$. Получили противоречие. Таким образом, элемент c имеет ненулевую координату в компоненте B_t, то есть $c = c' + c^*$, где $c' \in B_t$, $c^* \in B^*(t)$, $c' \ne 0$.

Пусть c_1, …, c_r – линейно независимая система элементов группы C_t. Тогда элементы c_1, …, c_r имеют ненулевые координаты в компоненте B_t, то есть $c_1 = c'_1 + c_1^*$, …, $c_r = c'_r + c_r^*$, где $c'_1, \ldots, c'_r \in B_t$, $c_1^*, \ldots, c_r^* \in B^*(t)$, $c'_1 \ne 0$, …, $c'_r \ne 0$. Допустим, что система элементов $c'_1, \ldots, c'_r$ является линейно зависимой. Тогда существуют такие целые числа $m_1, \ldots, m_r$ не все равные нулю, что $m_1 c'_1 + \ldots + m_r c'_r = 0$. Следовательно, $m_1 c_1 + \ldots + m_r c_r = m_1 c_1^* + \ldots + m_r c_r^*$. Так как $m_1 c_1 + \ldots + m_r c_r \ne 0$, то получим противоречие с тем, что любой ненулевой элемент $c \in C_t$ имеет ненулевую координату в компоненте B_t. Таким образом, $c'_1, \ldots, c'_r$ – линейно независимая система элементов группы B_t. Отсюда следует, что $r(C_t) \le r(B_t)$.

Так как согласно индуктивному предположению для любого типа $t' > t$ $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$, то аналогично доказанному показывается, что любой ненулевой элемент $b \in B_t$ имеет ненулевую координату в компоненте A_t, то есть $b = b' + b^*$, где $b' \in A_t$, $b^* \in A^*(t)$, $b' \neq 0$, и что для любой линейно независимой системы элементов $b_1 = b'_1 + b_1^*$, …, $b_r = b'_r + b_r^*$, система элементов $b'_1, \ldots, b'_r$ также является линейно независимой. Следовательно, $r(B_t) \leq r(A_t)$.

Имеем $A \cong C$, следовательно, $r(A_t) = r(C_t)$. Так как $r(C_t) \leq r(B_t) \leq r(A_t)$, получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

2) Пусть существует тип $t' > t$, такой, что $r(A_{t'})$ – бесконечный кардинал. Тогда в силу строения группы A $r(A_t)$ – бесконечный кардинал и, согласно индуктивному предположению, $r(B_{t'})$ – также бесконечный кардинал.

Покажем, что $r(C_t) \leq r(B_t)$. Рассмотрим ненулевой элемент $c \in C_t$. Так как $C \subseteq B$, то $c = c' + c''$, где $c' \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c'' \in B'' \cap B^*(t)$. Допустим, $c' = 0$, тогда $c \in B'' \cap B^*(t)$, то есть $c = b_1 + \ldots + b_k$, где $b_1 \in B_{t_1}$, …, $b_k \in B_{t_k}$, причем для любого $1 \leq i \leq k$ $t_i > t$ и $r(B_{t_i})$ конечен. Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа m_1, …, m_k, что $m_1 b_1 \in C(t_1)$, …, $m_k b_k \in C(t_k)$. Следовательно, $mc \in C^*(t)$, где $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mc \in C_t$. Получили противоречие. Таким образом, элемент c имеет ненулевую координату в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, то есть $c = c' + c''$, где $c' \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c'' \in B'' \cap B^*(t)$, $c' \neq 0$.

Пусть c_1, …, c_r – линейно независимая система элементов группы C_t. Тогда элементы c_1, …, c_r имеют ненулевые координаты в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, то есть $c_1 = c'_1 + c''_1$, …, $c_r = c'_r + c''_r$, где $c'_1, \ldots, c'_r \in B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$, $c''_1, \ldots, c''_r \in B'' \cap B^*(t)$, $c'_1 \neq 0$, …, $c'_r \neq 0$. Допустим, что система элементов $c'_1, \ldots, c'_r$ является линейно зависимой. Тогда существуют такие целые числа m_1, …, m_r не все равные нулю, что $m_1 c'_1 + \ldots + m_r c'_r = 0$. Следовательно, $m_1 c_1 + \ldots + m_r c_r = m_1 c''_1 + \ldots + m_r c''_r$. Так как $m_1 c_1 + \ldots + m_r c_r \neq 0$, то получим противоречие с тем, что любой ненулевой элемент $c \in C_t$ имеет ненулевую координату в компоненте $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$. Таким образом, $c'_1, \ldots, c'_r$ – линейно независимая система элементов группы $B_t \oplus (B' \cap B^*(t))$. Отсюда следует, что $r(C_t) \leq r(B_t \oplus (B' \cap B^*(t))) = r(B_t) + r(B' \cap B^*(t))$.

В силу строения группы A имеем $r(A_t) > r(A_{t^*})$ для всякого $t^* > t$. Так как множество типов $t^* \in T_A$ таких, что $r(A_{t^*})$ – бесконечный кардинал, – не более чем счетно, то $r(A_t) > r(A' \cap A^*(t)) = r(B' \cap B^*(t))$ согласно индуктивному предположению. Следовательно, $r(C_t) > r(B' \cap B^*(t))$. Тогда, так как $r(C_t)$ – бесконечный кардинал, получаем $r(C_t) \leq r(B_t) + r(B' \cap B^*(t)) = r(B_t)$, то есть $r(C_t) \leq r(B_t)$.

Так как $r(C_t) \le r(B_t)$ и, согласно индуктивному предположению, для любого типа $t' > t$ $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$, то аналогично доказанному показывается, что $r(B_t) \le r(A_t) + r(A' \cap A^*(t))$. Но $r(A_t)$ – бесконечный кардинал и $r(A_t) > r(A' \cap A^*(t))$. Следовательно, $r(B_t) \le r(A_t) + r(A' \cap A^*(t)) = r(A_t)$, то есть $r(B_t) \le r(A_t)$.

Так как $r(C_t) \le r(B_t) \le r(A_t)$ и $r(A_t) = r(C_t)$, получаем, что $r(A_t) = r(B_t)$.

в) Рассмотрим ненулевой элемент $a \in A_t$, где $r(A_t) = r$ конечен. Так как $r(A_t) = r(B_t)$, в группе B_t можно выбрать максимальную линейно независимую систему элементов $b_1, \ldots, b_r$. При доказательстве утверждения б) в пункте 1) было показано, что элементы $b_1, \ldots, b_r$ имеют ненулевые координаты в компоненте A_t, то есть $b_1 = b'_1 + b_1^*$, …, $b_r = b'_r + b_r^*$, где $b'_1, \ldots, b'_r \in A_t$, $b_1^*, \ldots, b_r^* \in A^*(t)$, $b'_1 \ne 0$, …, $b'_r \ne 0$, причем $b'_1, \ldots, b'_r$ является линейно независимой системой элементов группы A_t. Так как $r(A_t) = r$, $b'_1, \ldots, b'_r$ – максимальная линейно независимая система элементов группы A_t. Тогда существуют такие целые числа $m \ne 0$, $m_1, \ldots, m_r$, что $ma = m_1 b'_1 + \ldots + m_r b'_r$. Тогда $ma = m_1(b_1 - b_1^*) + \ldots + m_r(b_r - b_r^*) = b + a^*$, где $b = m_1 b_1 + \ldots + m_r b_r \in B_t$, $a^* = -(m_1 b_1^* + \ldots + m_r b_r^*) \in A^*(t)$.

Покажем, что существует такое натуральное число n, что $na^* \in B^*(t)$. Элемент $a^* \in A^*(t)$, следовательно, $a^* = a_1 + \ldots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \ldots, a_k \in A_{t_k}$, причем $t_1 > t, \ldots, t_k > t$. Так как $r(A_t)$ конечен, то в силу строения группы A ранги подгрупп $A_{t_1}, \ldots, A_{t_k}$ также конечны. Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют такие натуральные числа $n_1, \ldots, n_k$, что $n_1 a_1 \in B(t_1)$, …, $n_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $na^* \in B^*(t)$, где $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Обозначим через $m^* = nm$. Тогда $m^* a = n(b + a^*) = nb + na^*$. Так как $nb \in B_t$, $na^* \in B^*(t)$, имеем $m^* a \in B(t)$. Первая часть утверждения в) доказана.

Так как $r(A_{t'}) = r(B_{t'}) = r(C_{t'})$ для любого типа $t' \ge t$, то вторая часть утверждения в) доказывается аналогично.

Итак, утверждения а), б), в) верны для любого типа $t \in T_A$. Так как $r(A_t) = r(B_t)$ для любого типа $t \in T_A$ (утверждение б)), то для доказательства изоморфизма вполне разложимых групп A и B осталось показать, что $T_A = T_B$.

Пусть $t \in T_A$, то есть $r(A_t) \ne 0$. Тогда в силу утверждения б) имеем $r(B_t) \ne 0$, то есть $t \in T_B$. Таким образом, $T_A \subseteq T_B$.

Покажем, что $T_B \subseteq T_A$.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' больше некоторого типа из множества T_A. Тогда в силу утверждения а) имеем $t' \in T_A$.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' меньше некоторого типа из множества T_A. Допустим $t' \notin T_A$. Рассмотрим ненулевой элемент $b \in B_{t'}$. Так как $b \in A$, то $b = a_1 + \ldots + a_k$, где $a_1 \in A_{t_1}, \ldots, a_k \in A_{t_k}$. Имеем $t_1 > t', \ldots, t_k > t'$. Так как $t' \notin T_A$, то в силу строения группы A $r(A_{t_i})$ конечен для всех $1 \le i \le k$. Тогда, согласно утверждению в), существуют такие натуральные числа m_1, …, m_k, что $m_1 a_1 \in B(t_1)$, …, $m_k a_k \in B(t_k)$. Следовательно, $mb \in B^*(t')$, где $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$. Но также имеем, что $mb \in B_{t'}$. Получили противоречие.

Пусть $t' \in T_B$ и тип t' не сравним с любым типом из множества T_A. Рассмотрим ненулевой элемент $b \in B_{t'}$. Так как $b \in A$, то b имеет ненулевую координату в некоторой компоненте A_t группы A. Тогда $t' \le t$. Получили противоречие с тем, что тип t' не сравним с любым типом из множества T_A.

Таким образом, $T_B \subseteq T_A$. Получаем, что $T_A = T_B$.

Следовательно, группы A_0 и B_0 изоморфны.

Итак, получили $A_0 \cong B_0$ и $A_p \cong B_p$ для каждого простого числа p. Значит, группы A и B изоморфны и, следовательно, A – корректная группа в классе обобщенно вполне разложимых групп. ■

Используя теорему 17 и следствие 8, получаем такой результат.

Следствие 18. Обобщенно вполне разложимая группа A определяется своими подгруппами в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A – S-ступенчатая группа и для нее выполняется условие S-максимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jonson B.* On direct decomposition of torsion free abelian groups // Math. Scand. 1959. No. 2. P. 361–371.
2. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
3. *Crawly P.* Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups // J. Algebra. 1965. No. 4. P. 413–431.
4. *de Groot J.* Equivalent abelian groups // Canad. J. Math. 1957. No. 9. P. 291–297.
5. *Росошек С.К.* Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 143–150.
6. *Шерстнева А.И.* U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим подгруппам // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 72–80.
7. *Гриншпон С.Я.* f.i.-корректность абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1989. Вып. 8. С. 65–79.
8. *Гриншпон С.Я.* f.i.-корректные абелевые группы // Успехи матем. наук. 1999. № 6. С. 155–156.
9. *Cornel I.* Some ring theoretic Schroder-Bernstein theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 335–351.
10. *Trnkova V.*, *Koubek V.* The Cantor-Bernstein theorem for fuctors // Comment. Math. Univ. Carol. 1973. V. 14. P. 197–204.
11. *Bumby R.* Modules which isomorphic to submodules each other // Arch. Math. 1965. V. 16. P. 184–185.
12. *Holzsager R.*, *Hallahan C.* Mutual direct summands // Arch. Math. 1974. V. 25. P. 591–592.
13. *Росошек С.К.* Чисто корректные модули // Изв. вузов. Математика. 1978. № 10. С. 143–150.
14. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
15. *Eklof P.*, *Sabbagh G.* Model-completions and modules // Ann. Math. Log. 1971. V. 2. P. 251–299.
16. *Мордовской А.К.* Изоморфизм подгрупп абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 38–45.

17. *Гриншпон С.Я.*, *Мордовской А.К.* Определяемость абелевых групп своими подгруппами и почти изоморфизм // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. Вып. 3. С. 72–80.
18. *Megibben Ch.* Separable mixed group // Comment. Math. Univ. Carolin. 1980. № 4. P. 755–768.
19. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы вполне разложимых абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 2004. № 9. С. 18–23.
20. *Grinshpon S.Ya.*, *Grinshpon I.E.*, *Sherstneva A.I.* Almost isomorphic torsion free abelian groups and similarity of homogeneously decomposable groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 147–156.

Статья поступила 21.05.2014 г.

Grinshpon S.Ya., *Mordovskoi A.K.* CORRECTNESS OF ABELIAN TORSION-FREE GROUPS AND DETERMINABILITY OF ABELIAN GROUPS BY THEIR SUBGROUPS

An Abelian group A is called correct if for any Abelian group B isomorphisms $A \cong B'$ and $B \cong A'$, where A' and B' are subgroups of the groups A and B, respectively, imply the isomorphism $A \cong B$. We say that a group A is determined by its subgroups (its proper subgroups) if for any group B the existence of a bijection between the sets of all subgroups (all proper subgroups) of groups A and B such that corresponding subgroups are isomorphic implies $A \cong B$.

In this paper, connections between the correctness of Abelian groups and their determinability by their subgroups (their proper subgroups) are established. Certain criteria of determinability of divisible torsion-free groups and completely decomposable groups by their subgroups and their proper subgroups, as well as a criterion of correctness of such groups, are obtained.

Keywords: almost isomorphism, s-isomorphism, t-isomorphism, correctness of abelian groups, determinability of abelian groups by their subgroups (their proper subgroups).

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

MORDOVSKOI Andrei Konstantinovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation)
E-mail: mak13@mail.ru

REFERENCES

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups. *Math. Scand.*, 1959, no. 2, pp. 361–371.
2. Kaplansky I. *Infinite Abelian Groups*. Ann Arbor, Univ. of Michigan Press, 1954.
3. Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups. *J. Algebra*, 1965, no. 4, pp. 413–431.
4. de Groot J. Equivalent abelian groups. *Canad. J. Math.*, 1957, no. 9, pp. 291–297.
5. Rososhek S.K. Strogo chisto korrektnye abelevy gruppy bez krucheniya. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 1979, pp. 143–150. (in Russian)
6. Sherstneva A.I. *U*-posledovatel'nosti i pochti izomorfizm abelevykh *p*-grupp po vpolne kharakteristicheskim podgruppam. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2001, no. 5, pp. 72–80. (in Russian)
7. Grinshpon S.Ya. f.i.-korrektnost' abelevykh grupp bez krucheniya. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 1989, vol. 8, pp. 65–79. (in Russian)
8. Grinshpon S.Ya. f.i.-korrektnye abelevye gruppy. *Uspekhi matem. nauk*, 1999, no. 6, pp. 155–156. (in Russian)
9. Cornel I. Some ring theoretic Schroder-Bernstein theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 132, pp. 335–351.

10. Trnkova V., Koubek V. The Cantor-Bernstein theorem for fuctors. *Comment. Math. Univ. Carol*., 1973, vol. 14, pp. 197–204.
11. Bumby R. Modules which isomorphic to submodules each other. *Arch. Math*., 1965, vol. 16, pp. 184–185.
12. Holzsager R., Hallahan C. Mutual direct summands. *Arch. Math*., 1974, vol. 25, pp. 591–592.
13. Rososhek S.K. Chisto korrektnye moduli. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 1978, no. 10, pp. 143–150. (in Russian)
14. Borsuk K. *Teoriya retraktov*. Moskow, Mir Publ., 1971. (in Russian)
15. Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules. *Ann. Math. Log*., 1971, vol. 2, pp. 251–299.
16. Mordovskoy A.K. Izomorfizm podgrupp abelevykh grupp. *Abelevy gruppy i moduli*. Tomsk, 2000, vol. 15, pp. 38–45. (in Russian)
17. Grinshpon S.Ya., Mordovskoy A.K. Opredelyaemost' abelevykh grupp svoimi podgruppami i pochti izomorfizm. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre*. Tomsk, 2001, vol. 3, pp. 72–80. (in Russian)
18. Megibben Ch. Separable mixed group. *Comment. Math. Univ. Carolin*., 1980, no. 4, pp. 755–768.
19. Grinshpon S.Ya. Vpolne kharakteristicheskie podgruppy vpolne razlozhimykh abelevykh grupp. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2004, no. 9, pp. 18–23. (in Russian)
20. Grinshpon S.Ya., Grinshpon I.E., Sherstneva A.I. Almost isomorphic torsion free abelian groups and similarity of homogeneously decomposable groups. *Acta Appl. Math*., 2005, vol. 85, pp. 147–156.