ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 5(31)

УДК 512.541

К.С. Сорокин

SP-ГРУППЫ РАНГА 2 С ЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Данная работа продолжает исследование [1] вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP-групп – одного из известных классов смешанных абелевых групп. Ключевой результат – доказательство чистоты колец эндоморфизмов SP-групп ранга 2 с циклическими p-компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых. Полученные при доказательстве основного результата вспомогательные утверждения позволяют получить представление о строении колец эндоморфизмов групп данного класса.

Ключевые слова: *смешанная абелева группа, SP-группа, чистое кольцо, кольцо эндоморфизмов.*

Данная работа является продолжением исследований автора [1] вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP-групп конечного ранга без кручения – одного из классов смешанных абелевых групп [2–4]. Ранее автором было доказано, что кольца эндоморфизмов SP-групп ранга 1 с циклическими p-компонентами являются чистыми. Кроме того, было показано, что любой эндоморфизм SP-группы конечного ранга с циклическими p-компонентами, переводящий все элементы группы в её периодическую часть, является чистым.

В данной работе объектом исследования являются SP-группы ранга 2 с циклическими p-компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых. Ниже приведён основной результат, содержащий полный ответ на вопрос о чистоте рассматриваемых групп.

Теорема. *Кольцо эндоморфизмов SP-группы ранга 2 с циклическими p-компонентами, не имеющей бесконечных периодических прямых слагаемых, является чистым.*

Напомним основные определения.

Определение 1. Пусть R – кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется *чистым*, если $r = u + e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым.

Определение 2. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент называется SP-группой, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A, то есть таких, что $A_p \neq 0$.

Пусть для группы A выполнено условие
$$A / \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \cong W, \tag{1}$$
где W – двумерное подпространство $\mathbb{Q}$-пространства $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p / \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p$, порождённое двумя линейно независимыми векторами $a_i + \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p$, $i = 1,2$. Причём $\tilde{a}_i$ – беско-

нечные векторы из $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$, где $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^{k_p}}$, $k_p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ – некоторое бесконечное множество простых чисел. Обозначим через Λ_i множество тех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, для которых $\pi_p a_i \neq 0$. Будем полагать, что $\mathbb{P} \setminus (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i)$ – конечное множество, что равнозначно (поскольку все *p*-компоненты циклические) условию, что группа *A* не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых. Легко показать, что *A* – SP-группа ранга 2. В свою очередь, любая SP-группа ранга 2 удовлетворяет условию (1), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы *A*, описанным выше.

Доказательство основного результата удобно разбить на несколько частей, каждая из которых будет соответствовать одному из следующих случаев строения множеств Λ_1 и Λ_2:

- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – конечное множество;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества.

Таким образом, план доказательства – показать чистоту кольца эндоморфизмов группы *A* для каждого из описанных выше случаев. Это будет гарантировать справедливость чистоты кольца эндоморфизмов для произвольной группы *A*, удовлетворяющей условиям теоремы.

Заметим, что в случае, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – конечное множество, группу *A* можно представить в виде $A = (\prod_{p\in\Lambda_1\setminus\Omega} A_p) \oplus (\prod_{p\in\Lambda_2\setminus\Omega} A_p) \oplus (\prod_{p\in\Omega} A_p)$, где $\Omega = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \cup (\mathbb{P} \setminus (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i))$ – конечное множество. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1 [1], мы получим, что группа *A* обладает чистым кольцом эндоморфизмов. Таким образом, согласно предложенному плану, остаётся рассмотреть оставшиеся два случая – когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ является бесконечным множеством. Поэтому далее для группы *A* будем предполагать, что данное условие выполнено.

Ниже рассмотрим некоторые вспомогательные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов.

Запишем проекции для базисных векторов:

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i} \alpha_p^i c_p ,$$

и зафиксируем действие эндоморфизма f на p-компонентах группы A

$$fc_p = n_p c_p ,$$

где $n_p \in \mathbb{Z}$; $\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$; $s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \leq p^k$; c_p – образующий элемент группы A_p.

Лемма 1. *Пусть множество* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – *бесконечное. Тогда* $fa_2 \in T(A)$, *если* $fa_1 \in T(A)$.

Доказательство. Поскольку $fa_2 \in A$, найдутся такие целые числа n, n_1, n_2, $a_2^t \in T(A)$, что $nfa_2 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_2^t$. Перейдём к равенствам для p-компонент: почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство

$$nf\pi_p a_2 = n_1\pi_p a_1 + n_2\pi_p a_2.$$

Но $\pi_p a_2 = 0$, а $\pi_p a_1 \neq 0$ для $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, откуда следует, что $n_1 = 0$. Таким образом,

$$nfa_2 = n_2a_2 + a_2^t. \qquad (2)$$

Следовательно, найдутся такие $n', n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t^2 \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$n'fa_2 = n_2a_2 + a_t^2.$$

Тогда почти для всех $p \in \Lambda_1$ имеем

$$\pi_p(fa_1) = n_p p^{k_p - s_p^1} \alpha_p^1 c_p = 0.$$

Следовательно, $n_p \vdots p^{s_p^1}$. В таком случае

$$n' n_p p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p = n' \pi_p(fa_2) = n_2 p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p.$$

Поэтому $(n'n_p - n_2) \vdots p^{s_p^2}$. Поскольку $s_p^i \neq 0$, то $n_2 \vdots p$ почти для всех $p \in \Lambda_1$. То есть $n_2 = 0$, а значит, $fa_2 \in T(A)$. ■

Лемма 2. *Если для базисных векторов a_1 и a_2 существуют прообразы при отображении $f \in E(A)$ и f – автоморфизм для каждой p-компоненты A_p, то f – автоморфизм группы A.*

Доказательство. Поскольку *f* – автоморфизм для каждой p-компоненты A_p, то *f* – мономорфизм группы A и автоморфизм группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$. Для доказательства предложения таким образом необходимо показать, что *f* – эпиморфизм. Поскольку $f|_{A_p}$ – автоморфизм для любого $p \in \mathbb{P}$, то для любого элемента группы *A* конечного порядка найдётся прообраз при отображении *f*. Поэтому далее будет рассмотрен случай бесконечных векторов. Обозначим прообразы для векторов a_1 и a_2 через b_1, b_2 соответственно. Покажем теперь, что для любого бесконечного вектора $a \in A$ элемент $f^{-1}(a) \in C$. Так как $a \in A$, найдутся такие $m, n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$ma = m_1a_1 + m_2a_2 + a_t.$$

Заметим, что поскольку *f* – автоморфизм группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$, то прообраз $f^{-1}(a)$ существует, поскольку $a \in A \subseteq \prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$. Проверим, принадлежит ли $f^{-1}(a)$ группе *A*:

$$mf^{-1}(a)=f^{-1}(ma)=f^{-1}(m_1a_1+m_2a_2+a_t)=$$
$$=m_1f^{-1}(a_1)+m_2f^{-1}(a_2)+f^{-1}(a_t)=$$
$$=m_1b_1+m_2b_2+f^{-1}(a_t).$$

Ввиду того, что f – автоморфизм для каждой p-компоненты A_p, то $f^{-1}(a_t)\in A$. Тогда $m_1b_1+m_2b_2+f^{-1}(a_t)\in A$, а значит, и $mf^{-1}(a)\in A$. Следовательно, f – эпиморфизм группы A. ■

Лемма 3. *Если существует такое конечное подмножество* $\Omega\subset\mathbb{P}$, *что* f – *чистый элемент в* $E(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega}A_p)$, *то* f – *чистый элемент в* $E(A)$.

Доказательство. Обозначим группу $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega}A_p$ через C. Заметим, что $f|_{\bigoplus_{p\in\Omega}A_p}$ – чистый элемент кольца $E(\bigoplus_{p\in\Omega}A_p)$, поскольку $\bigoplus_{p\in\Omega}A_p$ – ограниченная группа (см. [7]). Принимая во внимание тот факт, что $A=C\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega}A_p)$ и то, что C и $\bigoplus_{p\in\Omega}A_p$ – вполне характеристические подгруппы группы A, из [6] получим, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

После доказательства некоторых вспомогательных утверждений перейдем непосредственно ко второму случаю из рассмотренного нами плана ($\Lambda_1\cap\Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$, $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ – бесконечное). В следующей лемме будет рассмотрена первая часть доказательства данного случая, когда каждое из множеств $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$, $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ – бесконечное. Заметим, что для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f\notin Hom(A,T(A))$, поскольку в противном случае f – заведомо чистый элемент [1].

Лемма 4. *Пусть множества* $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$, $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ – *бесконечные. Тогда кольцо* $E(A)$ *является чистым.*

Доказательство. Согласно условию теоремы, $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$ и $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ – бесконечные множества. В этом случае, согласно лемме 1, для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2, а образ fa_1 – только от вектора a_1. Следовательно, найдутся такие $n,n',n_1,n_2\in\mathbb{Z}$, $a_1^t,a_t^2\in T(A)$, что справедливы следующие равенства:

$$nfa_1=n_1a_1+a_1^t, \qquad (3)$$

$$n'fa_2=n_2a_2+a_t^2. \qquad (4)$$

Заметим, что если $f\neq 0$, то, в силу леммы 1, справедливы следующие импликации:

если $fa_1\in T(A)$, то $fa_2\in T(A)$;

если $fa_2\in T(A)$, то $fa_1\in T(A)$.

Отсюда следует, что $fa_1\notin T(A)$ и $fa_2\notin T(A)$.

Покажем, что существует такое прямое слагаемое C группы A, что f – автоморфизм на C, причём $A=C\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega}A_p)$, а $\Omega\subseteq\mathbb{P}$ – конечное множество. Рассмотрим покомпонентно первое из равенств (3), (4): почти для всех $p \in \Lambda_1$ верны равенства

$$nn_p(\pi_p a_1) = \pi_p(nfa_1) = \pi_p(n_1 a_1) = n_1 \pi_p(a_1) .$$

С учётом вида проекций для базисных векторов получим

$$(nn_p - n_1)) \vdots p^{s_p^1} .$$

Поскольку $fa_1 \notin T(A)$, можно сделать вывод, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1$.

Аналогично можно показать, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_2$. Тогда $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых последнее равенство не выполнено, обозначим через Ω. Добавим также к множеству Ω конечное множество тех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n_i ($i = 1, 2$). В таком случае получим разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, где C – дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$. Причём подгруппа C – p-делимая для каждого $p \in \Omega$. Заметим, что поскольку $(n_p, p) = 1$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, то $f|_{A_p}$ – автоморфизм для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Покажем, что существуют такие элементы $b_i \in A$ ($i = 1, 2$), что $fb_i = \pi_C a_i$, где группа C удовлетворяет описанным выше условиям. Поскольку C является n_i-делимой группой ($i = 1, 2$), то найдутся такие элементы $b_i \in C$, что $n_1 b_1 = n\pi_C(a_1)$ и $n_2 b_2 = n' \pi_C(a_2)$. В таком случае справедливо равенство

$$n_1 fb_1 = f(n_1 b_1) = f(n\pi_C(a_1)) = \pi_C(nfa_1) = \pi_C(n_1 a_1) .$$

Отсюда следует, что $n_1(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Тогда $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p \in \Omega} A_p$, с другой стороны – $fb_1 - \pi_C(a_1) \in C$, поэтому $fb_1 = \pi_C(a_1)$. Аналогично можно показать, что $fb_2 = \pi_C(a_2)$. В таком случае выполнены условия леммы 2, следовательно, f – автоморфизм группы C. Таким образом, мы показали, что $f|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$, а значит, согласно лемме 3, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Теперь мы можем перейти непосредственно к рассмотрению второго случая, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное. Данное доказательство удобно провести в несколько этапов, каждый из которых будет соответствовать одному из дополнительных условий, налагающихся на порядки p-компонент базисных векторов и образы базисных векторов. Идеи первых двух доказательств в точности повторяют идеи и методы, изложенные в доказательстве предыдущего результата, отличия носят лишь технический характер, в связи с чем доказательства данных результатов не приводятся.

Во всех последующих результатах (леммы 5 – 9) будем полагать справедливость следующих условий: множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное.

Лемма 5. *Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 > 2s_p^2$ и f – такой эндоморфизм группы A, что $fa_2 \in T(A)$, то f – чистый элемент $E(A)$.*

Лемма 6. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливо неравенство* $s_p^1 \neq s_p^2$ *и* f *– такой эндоморфизм группы* A, *что* $fa_2 \notin T(A)$ *и* $fa_1 \notin T(A)$, *то* f *– чистый элемент* $E(A)$.

Лемма 7. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливо неравенство* $s_p^1 > 2s_p^2$, *то кольцо* $E(A)$ *– чистое.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. Согласно лемме 5, в случае, когда $fa_2 \in T(A)$, f – чистый элемент $E(A)$.

Поскольку мы рассматриваем случай $f \notin R_t$, то, учитывая условия на множества $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ и $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$, можно показать, что $fa_1 \notin T(A)$. Следовательно, в случае, когда $fa_2 \notin T(A)$, выполнено условие леммы 6 и f – чистый элемент $E(A)$. Таким образом, мы показали, что $E(A)$ – чистое кольцо. ■

Лемма 8. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливо неравенство* $s_p^1 < 2s_p^2$, *то кольцо* $E(A)$ *– чистое.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то, как отмечалось в лемме 7, $fa_1 \notin T(A)$.

Покажем, что в условиях данной леммы $fa_2 \notin T(A)$. Предположим противное: что $fa_2 \in T(A)$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2. Таким образом, найдутся такие целые $n, n_2, n', n_1', n_2' \in \mathbb{Z}$ и $a_1^t, a_2^t \in T(A)$, что

$$nfa_2 = n_2 a_2 + a_2^t; \tag{5}$$

$$n' fa_1 = n_1' a_1 + n_2' a_2 + a_1^t. \tag{6}$$

Далее, перейдя во втором равенстве к p-компонентам, можно прийти к следующему выражению:

$$(p^{k_p - s_p^1}(n'\gamma_p p^{s_p^2} - n_1')\alpha_p^1 - n_2'\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2}) \vdots p^{k_p}. \tag{7}$$

Рассмотрим далее два случая:

1. Для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$.

2. Для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$.

Начнём с первого случая: для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$. Поскольку $s_p^2 < s_p^1$, то из (7) следует, что $n_1' = 0$. То есть выражение (7) примет вид

$$(p^{k_p - s_p^1 + s_p^2} n'\gamma_p \alpha_p^1 - n_2' p^{k_p - s_p^2}) \vdots p^{k_p}.$$

Далее, поскольку $s_p^1 < 2s_p^2$, то $k_p - s_p^1 + s_p^2 > k_p - s_p^2$. Значит,

$$(p^{2s_p^2 - s_p^1} n'\gamma_p \alpha_p^1 - n_2') \vdots p^{s_p^2}.$$

Следовательно, $n_2' = 0$. В итоге мы получили, что $fa_1 \in T(A)$.

Рассмотрим далее случай, когда справедливо второе условие: для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$. Тогда $k_p - s_p^1 > k_p - s_p^2$ и из выражения (7) будет следовать

$$(p^{s_p^2 - s_p^1}(n'\gamma_p p^{s_p^2} - n_1')\alpha_p^1 - n_2'\alpha_p^2) \vdots p^{s_p^2}.$$

Это, в свою очередь, приведёт к тому, что $n_2' = 0$. В таком случае из (7) получим, что $(n'\gamma_p p^{s_p^2} - n_1') \vdots p^{s_p^1}$, а значит, $n_1' = 0$. В итоге получили, что $fa_1 \in T(A)$.

Таким образом, выполнено условие леммы 6 и f – чистый элемент $E(A)$. Следовательно, показали, что $E(A)$ – чистое кольцо. ■

Лемма 9. *Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$, то кольцо $E(A)$ – чистое.*

Доказательство. Для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. Поскольку множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ – бесконечное, а множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное, то, как отмечалось в лемме 7, $fa_1 \notin T(A)$.

Рассмотрим вначале случай, когда $fa_2 \in T(A)$. Сразу отметим, что если разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы указанные выше равенства $s_p^1 = s_p^2$, есть бесконечное множество (обозначим данное множество через Λ), то $fa_1 \in T(A)$. Действительно, если для любого $p \in \Lambda$ будет справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$, то, с учётом условия $fa_2 \in T(A)$, получим $n_1' = 0$. Последнее, в свою очередь, означает, что $n' fa_1 = n_2' a_2 + a_1^t$. С другой стороны, из равенства (7) следует, что при выполнении равенства $s_p^1 = s_p^2$ для бесконечного множества $p \in \Lambda_2$ справедливо $n_2' \vdots p$, то есть $n_2' = 0$ и $fa_1 \in T(A)$. Полученное противоречие означает, что при $fa_2 \in T(A)$ равенство $s_p^1 = s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \Lambda_2$.

Таким образом, остаётся рассмотреть ситуацию, когда почти для всех $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Из равенства (7) почти для всех $p \in \Lambda_2$ получим

$$(n_1'\alpha_p^1 - n_2'\alpha_p^2) \vdots p^{s_p}.$$

Перейдём в группе $A/T(A)$ к новому базису: $b_1 + T(A) = (n_1'a_1 - n_2'a_2) + T(A)$, $b_2 + T(A) = a_2 + T(A)$. Очевидно, что векторы нового базисы выражаются через векторы старого и наоборот. Рассмотрим теперь проекции вектора $b_1 = n_1'a_1 - n_2'a_2$: почти для всех $p \in \Lambda_2$ $\pi_p b_2 = (n_1'\alpha_p^1 - n_2'\alpha_p^2)p^{k_p - s_p} c_p = 0$. Таким образом, пришли к ситуации, описанной в начале данной статьи, когда группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы:

$$A=(\prod_{p\in\Lambda_1\setminus\Omega}A_p)\oplus(\prod_{p\in\Lambda_2\setminus\Omega}A_p)\oplus(\prod_{p\in\Omega}A_p),$$

где Ω – конечное множество простых чисел, в которое входит $\mathbb{P}\setminus(\bigcup_{i=1,2}\Lambda_i)$, а также все простые числа $p\in\Lambda_2$, для которых не выполнено равенство $s_p^1=s_p^2=s_p$. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1 [1], можем утверждать, что группа A обладает чистым кольцом эндоморфизмов.

Перейдём к случаю, когда $fa_2\notin T(A)$. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим вначале вариант, когда разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы равенства $s_p^1=s_p^2$, является бесконечным множеством (ранее мы обозначили данное множество через Λ). Тогда получаем, что условия леммы 6 выполнены, а значит, f – чистый элемент $E(A)$.

Рассмотрим ситуацию, когда $fa_2\notin T(A)$ и почти для всех $p\in\Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1=s_p^2=s_p$. Запишем равенство (5) покомпонентно: почти для всех $p\in\Lambda_2$

$$nn_p(\pi_pa_2)=\pi_p(nfa_2)=\pi_p(n_2a_2)=n_2\pi_p(a_2).$$

Отсюда следует, что $(nn_p-n_2))\vdots p^{s_p}$ почти для всех $p\in\Lambda_2$. При этом очевидно, что $(n_p,p)=1$. Далее рассмотрим покомпонентно равенство (6): почти для всех $p\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2$

$$n'n_p(\pi_pa_1)=\pi_p(n'fa_1)=\pi_p(n_1'a_1+n_2'a_2)=\pi_p(n_1'a_1)=n_1'\pi_p(a_1).$$

Отсюда следует, что $(n'n_p-n_1')\vdots p$ для бесконечного числа $p\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2$. Следовательно, либо $(n_p,p)=1$ почти для всех $p\in\Lambda_1$, либо $n_1'=0$. В первом случае, аналогично доказательству леммы 4, легко показать, что существует такое прямое слагаемое C группы A, что f – мономорфизм на C, причём $A=C\oplus(\bigoplus_{p\in\Omega}A_p)$, а $\Omega\subseteq\mathbb{P}$ – конечное множество. Кроме того, аналогично подходу, изложенному в доказательстве леммы 4, можно показать, что существуют прообразы проекций базисных векторов на группу C, что вместе с леммами 2 и 3 означает чистоту f в кольце $E(A)$. Рассмотрим подробнее второй вариант. В этом случае равенство (6) покомпонентно можно представить в следующем виде: почти для всех $p\in\Lambda_2$

$$n'n_p(\pi_pa_1)=n_2'\pi_p(a_2).$$

Тогда $(n'n_p\alpha_p^1-n_2'\alpha_p^2)\vdots p^{s_p}$. Домножим обе части равенства на n и воспользуемся равенством $nn_p=p^{s_p}\delta_p+n_2$. Получим

$$(n'(p^{s_p}\delta_p+n_2)\alpha_p^1-nn_2'\alpha_p^2)\vdots p^{s_p}.$$

Отсюда следует, что $(n'n_2\alpha_p^1 - nn_2'\alpha_p^2) \vdots p^{s_p}$. Далее, аналогично рассуждениям, изложенным в доказательстве данной леммы для случая $fa_2 \in T(A)$, легко показать, что группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы, что, в свою очередь, будет означать чистоту кольца эндоморфизмов группы A. Таким образом, для каждого из рассмотренных случаев $fa_2 \in T(A)$ и $fa_2 \notin T(A)$ мы доказали чистоту $E(A)$. ■

Следующее предложение завершает доказательство второго случая из предложенного плана доказательства основного результата ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечное).

Предложение 1. *Если хотя бы одно из множеств* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ *– бесконечное, то кольцо* $E(A)$ *– чистое.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. Для начала отметим, что если оба множества $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – бесконечные, то выполнены условия леммы 4, а значит, кольцо $E(A/T(A))$ будет чистым. Тогда нам остаётся рассмотреть случай, когда только одно из множеств, не умаляя общности, можно считать, что это множество $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ является бесконечным. При этом множество $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечное. Принимая во внимание результаты, доказанные в леммах 7 – 9, получаем, что кольцо $E(A)$ – чистое. ■

Далее переходим к доказательству последнего, третьего случая из плана доказательства основного результата данной работы ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество, и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества). Вначале рассмотрим случай, когда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$ (лемма 10 – 13).

Заметим, что в последующих двух леммах доказательства носят технический характер и используют лишь те приёмы и методы, которые уже применялись в представленных ранее доказательствах. В связи с этим, поскольку полученные результаты носят лишь вспомогательный характер, доказательство данных лемм не приводится.

Уточним действие произвольного эндоморфизма $f \in E(A)$ на базисных векторах:

$$nfa_1 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_t^1,$$

$$kfa_2 = k_1a_1 + k_2a_2 + a_t^2,$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t^1, a_t^2 \in T(A)$. При этом $fc_p = n_pc_p$, где c_p – образующие A_p, $n_p \in \mathbb{Z}$. Аналогично предыдущим доказательствам будем рассматривать случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (леммы 10 – 13) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$.

Лемма 10. *Если* $n_p \vdots p$ *для бесконечного множества* $p \in \mathbb{P}$, *то справедливы следующие утверждения:*

- $k_2 n_1 = k_1 n_2$,
- $k n_1 = -n k_2$,
- $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$,
- $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.

Лемма 11. *Если* $k_2 n_1 = k_1 n_2$, *то* $n_p \vdots p$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$.

Лемма 12. *Если* $n_p \vdots p$ *для бесконечного множества* $p \in \mathbb{P}$, *то* f *– чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 10, выполнены равенства

$$k_2 n_1 = k_1 n_2 \; ; \tag{8}$$

$$k n_1 = -n k_2 \, . \tag{9}$$

Кроме того, $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$ и $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = 1$, обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_1. Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $u|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$m b_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = -k_1 k x$, $m_1 = k_1 x (k_2 - k)$, $m_2 = k_2^2 x$, $x \in \Omega$. В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mnk\, u b_1 = nk\, u(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_t) = nk\,(1 - f)(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_t) =$$

$$= nk(m_1 a_1 + m_2 a_2) - m_1 k(n_1 a_1 + n_2 a_2) - m_2 n(k_1 a_1 + k_2 a_2) + b_t' =$$

$$= (nkm_1 - m_1 k n_1 - m_2 n k_1) a_1 + (nkm_2 - m_1 k n_2 - m_2 n k_2) a_2 + b_t'.$$

При этом легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$nkm_1 + m_1 k n_1 + m_2 n k_1 = mnk,$$

$$nkm_2 - m_1 k n_2 - m_2 n k_2 = 0.$$

Таким образом, получаем, что $mnk\, u b_1 = mnk\, \pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $k k_1 k n (u b_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: n, k, k_1. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $u b_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $l b_1 = l_1 \pi_C(a_1) + l_2 \pi_C(a_2)$, где $l = k$, $l_1 = k_1$, $l_2 = k + k_2$. Согласно лемме 2, u – автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $u|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 13. *Если* $(n_p, p) = 1$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$, *то* f – *чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно условиям леммы, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p$, обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел $n, k, (k_1 n_2 - k_2 n_1)$. Рассмотрим прямое разложение $A = C \oplus (\oplus_{p \in \Omega} A_p)$, докажем, что эндоморфизм f является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$mb_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = k_2 n_1 - k_1 n_2$, $m_1 = nk_2$, $m_2 = -kn_2$. Принимая во внимание лемму 11, легко показать, что $k_2 n_1 - k_1 n_2 \neq 0$ и k_1, n_1 не могут одновременно равняться нулю, что также справедливо и для k_2, n_2. В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mnk\, fb_1 = nk\, f(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_t) =$$

$$= m_1 k(n_1 a_1 + n_2 a_2) + m_2 n(k_1 a_1 + k_2 a_2) + b_t' =$$

$$= (m_1 k n_1 + m_2 n k_1) a_1 + (m_1 k n_2 + m_2 n k_2) a_2 + b_t'.$$

При этом легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$m_1 k n_1 + m_2 n k_1 = mnk,$$

$$m_1 k n_2 + m_2 n k_2 = 0.$$

Таким образом, получаем, что $mnk\, fb_1 = mnk\, \pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $kn(k_2 n_1 - k_1 n_2)(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: $n, k, k_2 n_1 - k_1 n_2$. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $fb_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $lb_1 = l_1 \pi_C(a_1) + l_2 \pi_C(a_2)$, где $l = k_1 n_2 - k_2 n_1$, $l_1 = k_1 n$, $l_2 = -kn_1$. Согласно лемме 2, f – автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 14. *Если при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ *– конечные множества и почти для всех* $p \in \mathbb{P}$ *справедливо равенство* $s_p^1 = s_p^2$, *то* $E(A)$ *– чистое кольцо.*

Доказательство. Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p-компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ и $\mathbb{P} \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых, согласно [1], будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [6], вопрос изучения чистоты $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанных выше прямым слагаемым, то есть к $A \bigcap (\prod_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} A_p)$. Пусть $f \in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f \in Hom(A, T(A))$, согласно предыдущим результатам f – чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. В этом случае, согласно леммам 12 и 13, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Теперь, для завершения доказательства третьего случая из плана доказательства основного результата нам остаётся рассмотреть условие, когда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$ (леммы 15 – 19). Аналогично предыдущим доказательствам будем считать, что $f \notin Hom(A, T(A))$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (леммы 15 – 18) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и для всех $p \in \Omega$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$ ($\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – бесконечное множество).

Заметим, что доказательство следующей леммы носит технический характер и используют лишь те приёмы и методы, которые уже применялись в представленных ранее доказательствах. В связи с этим, поскольку полученные результаты носят лишь вспомогательный характер, доказательство данной леммы не приводится.

Лемма 15. *Справедливы следующие утверждения:*

- $kfa_2 = k_2 a_2 + a_t^2$;
- если $n_p \,\vdots\, p$ для бесконечного числа $p \in \Omega$, то
  - $nfa_1 = n_2 a_2 + a_t^1$,
  - $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p \,\vdots\, p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$,
  - почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$;
- если $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Omega$, то $k_2, n_1 \neq 0$.

Лемма 16. *Пусть* $f \in E(A)$ *и* $n_p \,\vdots\, p$ *для бесконечного числа* $p \in \Omega$, *тогда* f *– чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, неравенство $s_p^1 > s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Кроме того, $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p \,\vdots\, p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$ и $nfa_1 = n_2 a_2 + a_t^1$, где $n, n_2, \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_t^1 \in T(A)$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = 1,$ обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении числа *n*. Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы *C*. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $u|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$. Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = n$, $m_1 = n$, $m_2 = n_2$. В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mn\,ub_1 = n\,u(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) = n\,(1-f)(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) =$$

$$= n(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) - m_1 n_2 \pi_C a_2 + b_t^{'} = nm_1\pi_C a_1 + (nm_2\pi_C a_2 - m_1 n_2\pi_C a_2) + b_t^{'} =$$

$$= nn\pi_C a_1 + (nn_2\pi_C a_2 - nn_2\pi_C a_2) + b_t^{'} = mn\pi_C a_1 + b_t^{'}.$$

Таким образом, получаем, что $mn\,ub_1 = n^2\,\pi_C(a_1) + b_t^{'}$. Отсюда следует, что $n^2(ub_1 - \pi_C(a_1)) \in C$. Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении *n*. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Легко показать, что существует такой $b_t^2 \in T(A)$, что $a_2 = u(a_2 + b_t^2)$. Согласно лемме 2, *u* – автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $u|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, *f* – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы *C*. Тогда из леммы 3 следует, что *f* – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 17. *Пусть* $f \in E(A)$ *и* $(n_p, p) = 1$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$, *тогда f – чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, $kfa_2 = k_2 a_2 + a_t^2$, кроме того, k_2, $n_1 \neq 0$. Согласно условиям леммы, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p,$ обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_2, n_1. Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$, докажем, что эндоморфизм *f* является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f|_{A_p}$ – автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существуют также прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$. Заметим, что в лемме 13 было доказано, что для эндоморфизма *f*, удовлетворяющего условию $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, существуют прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$. Несложно показать, что найденные в доказательстве леммы 13 элементы будут прообразами для $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$ в условиях данного предложения: $kfa_2 = k_2 a_2 + a_t^2$ и $k_2, n_1 \neq 0$. Тогда, согласно лемме 2, *f* – автоморфизм группы *C*, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $f|_{A_p}$ – автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f – чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 3 следует, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Лемма 18. *Пусть* $f \in E(A)$ *и* $(n_p, p) = 1$ *почти для всех* $p \in \Omega$ ($\Omega \subseteq \mathbb{P}$ – бесконечное множество), *тогда f– чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 15, $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$, кроме того, $k_2, n_1 \neq 0$. Предположим, что почти для всех $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ выполнено равенство $s_p^1 = s_p^2$. Согласно лемме 10, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, так как в противном случае $kfa_2 = k_1a_1 + k_2a_2 + a_t^2$, где $k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим альтернативный случай, когда почти для всех $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ выполнено неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$. Предположим, что для бесконечного числа $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ справедливо $n_p \vdots p$. Тогда, согласно лемме 16, $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, что противоречит условиям предложения. Следовательно, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда, согласно лемме 17, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Лемма 19. *Если при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – *конечные множества и для бесконечного множества чисел* $p \in \mathbb{P}$ *справедливо неравенство* $s_p^1 \neq s_p^2$ *,то* $E(A)$ – *чистое кольцо.*

Доказательство. Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p-компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ и $\mathbb{P} \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых, согласно [1], будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [6], вопрос изучения чистоты $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанным выше прямым слагаемым, то есть к $A \bigcap (\prod_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} A_p)$. Пусть $f \in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f \in Hom(A, T(A))$, согласно предыдущим результатам, f – чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f \notin Hom(A, T(A))$. В этом случае, согласно леммам 16, 18, f – чистый элемент $E(A)$. ■

Следующее предложение завершает доказательство третьего случая из предложенного плана доказательства основного результата ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ – бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – конечные множества) и непосредственно следует из лемм 14 и 19.

Предложение 2. *Если при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ – *конечные множества, то* $E(A)$ – *чистое кольцо.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сорокин К.С.* SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 24–36.
2. *Крылов П.А.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. Т. 269. С. 29–34.
3. *Крылов П.А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 60–76.
4. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 17–27.
5. *Camillo V.P.*, *Khurana D.*, *Lam T.Y.*, *Nicholson W.K.*, *Zhou Y.* Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. № 304. P. 94–111.
6. *Han J.*, *Nicholson W.K.* Extension of clean rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2589–2595.
7. *Goldsmith B.*, *Vámos P.* A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. 2007. V. 117. P. 181–191.

Статья поступила 13.08.2014.

Sorokin K. S. TWO-RANK SP-GROUPS WITH CLEAN ENDOMORPHISM RINGS

The notion of clean ring was introduced by W.K. Nicholson in 1977 to give an example of ring with idempotents, which can be lifted modulo any left (right) ideal. In the case when *R* is an endomorphism ring of some module, the new descriptions of cleanness property appear which may be useful for study of the conditions of cleanness of ring *R* [6].

This work continues the author’s investigations of cleanness of endomorphism rings of finite rank *SP*-groups, which are a class of mixed Abelian groups [2] – [4]. The author earlier prooved cleanness of endomorphism rings of one-rank SP-groups with cyclic p-components. Moreover, it was shown that any endomorphism of a finite rank SP-group with cyclic p-components is clean if its image is contained in torsion subgroup of A.

In this work, the subject of investigation is a two-rank SP-groups with cyclic p-components without any infinite torsion direct summand. The proof of cleanness of endomorphism rings of these groups is the key result of this work. Subsidiary statements obtained in proof of this result allows to describe the structure of endomorphism rings of considering groups.

Keywords: mixed Abelian group, SP-group, clean ring, endomorphism ring.

SOROKIN Konstantin Sergeevich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: Sorokin_k@list.ru

REFERENCES

1. Sorokin K.S. SP-gruppy s chistymi kol'tsami endomorfizmov. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 24–36. (in Russian)
2. Krylov P.A. Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp. *Vestnik TGU*, 2000, vol. 269, pp. 29–34. (in Russian)
3. Krylov P.A. Radikal Dzhekobsona kol'tsa endomorfizmov abelevoy gruppy. *Algebra i logika*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 60–76. (in Russian)
4. Krylov P.A. Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2007, no. 1, pp. 17–27. (in Russian)
5. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean. *J. Algebra*, 2006, no. 304, pp. 94–111.
6. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings. *Commun. Algebra*, 2001, vol. 29, no. 6, pp. 2589–2595.
7. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 2007, vol. 117, pp. 181–191.