

УДК 577.3:/630.1

Обобщение параметров природных систем: примеры, теория, правила

А.А. Коновалов

Институт проблем освоения Севера СО РАН (Тюмень, Россия)

Предложен способ выявления количественных связей между наблюдаемыми параметрами природных систем по их обобщенным (нормализованным) величинам. При этом нормализованные величины представляются двумя отношениями: 1) разницы между текущим и минимальным значениями к разнице между максимумом и минимумом и 2) разницы между максимальным и текущим значениями к той же разнице между максимумом и минимумом. С их помощью все множество переменных заключается в наглядно представимый интервал 0...1 или 1...0. Это сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между ними, позволяет корректно сравнивать разнородные величины и делает решение универсальным для большого класса задач. Сумма этих отношений равна единице, причем каждое слагаемое может увеличиваться (или уменьшаться) только за счет уменьшения (или увеличения) другого. Таким образом, это типичная дихотомия, воплощающая в себе закон единства и борьбы противоположностей, которая может служить образом (моделью) любой двухкомпонентной системы. Показано, что в большинстве случаев для установления закономерностей развития любой системы достаточно рассматривать взаимодействие только двух основных, наиболее влиятельных, входящих в нее групп. Например: древесной и травянистой растительности (а не отдельных растений из их состава), леса и степи, суши и моря, тепла и холода т.п. Геометрической интерпретацией двухкомпонентной системы может служить единичный отрезок, состоящий из двух частей: большей — доминанты (ϕ) и меньшей — субдоминанты ($1 - \phi$). Равновесие и максимальная устойчивость такой модели достигаются при делении отрезка в *золотом сечении*, при котором соблюдается пропорция между целым и его двумя частями, при этом $\phi = 0,618... \approx 0,62$. Но единичный отрезок можно разделить на части и по множеству (q) других сечений. Найдено выражение ϕ в общем случае, когда $0 < q < \infty$. Оно имеет вид $\phi^n + \phi = 1$, где $n = q + 1$; n — количество частиц в системе; q — число сечений. Корни этого уравнения при разных целых n составляют последовательность обобщенных золотых сечений (ОЗС). Это наиболее распространенные соотношения компонентов во многих системах мира, в том числе биологических, обеспечивающее согласованность их взаимодействия (гармонию), устойчивость и длительное существование [1, 2]. В статье доказано, что закономерности ОЗС актуальны не только при целых, но и дробных n . Целые n соответствуют правильным геометрическим формам (плоскости, кубу...). Дробные — фракталам с их сложными,

ветвящимися формами, типом древесной кроны, речных систем, кровеносных сосудов и т.п. С увеличением n растёт и количество разделительных линий — границ, являющихся концентраторами напряжений. Эти места (экотоны, береговая и снеговая линии, межсезонья — весна и осень (утро и вечер), границы государств и этносов, фронт и т.п.) наиболее чувствительны к изменениям внешней среды и в наибольшей степени подвержены деформациям. Т.е. это участки системы с наименьшей устойчивостью и большей вероятностью разрушения. Обнаружена связь ОЗС с относительной долговечностью твёрдых тел, в частности мерзлых грунтов и льда, а через нее — с глобальными факторами. Установлены и количественно оценены связи между параметрами различных природных систем — биологических, климатических, криогенных и др. В частности, найдены формулы зависимости диаметра ствола дерева и его продуктивности от возраста, массы древесной зелени — от диаметра ствола. Показан преимущественно полиномиальный, или степенной, характер этих связей, причем численные коэффициенты расчетных формул близки к пропорциям золотого сечения. Приведены примеры использования предлагаемой методики, свидетельствующие о хорошей сходимости расчетных и фактических данных. Предлагаемая методика является мощным мультидисциплинарным (синтетическим) средством обобщения и выявления общего в разных природных системах.

Ключевые слова: природные системы, обобщение, устойчивость, продукция, климат, древесные растения, ствол, масса зелени, золотое сечение.

Введение

Одним из эффективных способов обобщения результатов наблюдений за природными объектами, широко используемыми, например, в технических науках, является их нормализация, т.е. приведение к относительному (безразмерному) виду:

$$\varphi = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}), \quad (1)$$

$$\varphi_c = 1 - \varphi = (x - x_{\max}) / (x_{\min} - x_{\max}), \quad (2)$$

где x , $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — текущее, максимальное и минимальное размерные значения наблюдаемого параметра, причем часто $x_{\min} \approx 0$; φ и φ_c — его относительные величины.

При переходе к размерным величинам обе формулы дают одинаковые результаты.

С помощью (1) или (2) все множество переменных заключается в наглядно представимый интервал 0...1 или 1...0. Это сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между ними, позволяет корректно сравнивать разнородные величины и делает решение универсальным для большого класса задач.

Цель исследования — разработать методику обобщения результатов наблюдений за биологическими и другими системами с использованием формул (1) или (2) и продемонстрировать ее возможности.

«При изучении наук примеры полезнее правил» (И. Ньютон [3]). В соответствии с этой максимой доказательная база предлагаемой методики в основном опирается на примеры ее реализации и их анализ. Рассмотрен, главным образом,

количественный аспект проблемы. Подбор примеров и расчеты выполнены автором, фактические данные (в размерном виде) взяты из литературы. Для единообразия все относительные параметры обозначены как j , а их специфика отражена нижним символом (j_d , j_m и т.п.). Графический вид связей параметров систем, их аппроксимации и достоверность (коэффициент детерминации) R_2 определены с помощью программы Excel.

Дихотомическая природа систем

Сумма $\varphi + \varphi_c = 1$, причем каждое слагаемое может увеличиваться (или уменьшаться) только за счет уменьшения (или увеличения) другого. Это типичная дихотомия, воплощающая в себе закон единства и борьбы противоположностей, которая может служить образом (моделью) любой двухкомпонентной системы. В большинстве случаев для установления закономерностей развития любой системы достаточно рассматривать взаимодействие только двух основных, наиболее влиятельных, входящих в нее групп. Например: древесной и травянистой растительности (а не отдельных растений из их состава), леса и степи, суши и моря, тепла и холода, порядка и хаоса, «левых» и «правых» партий и т.п. Геометрической интерпретацией двухкомпонентной системы может служить единичный отрезок, состоящий из двух частей: большей – доминанты φ и меньшей – субдоминанты $\varphi_c = 1 - \varphi$. Равновесие и максимальная устойчивость такой модели достигаются при делении отрезка в золотом сечении [4], при котором соблюдается пропорция между целым и его частями:

$$1/\varphi = \varphi / (1 - \varphi). \quad (3)$$

Откуда

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0. \quad (4)$$

Положительный корень квадратного уравнения (4) $\varphi = -0,5 + (0,25 + 1)0,5 = 0,61803... \approx 0,62$, или его обратная величина $1,61803... \approx 1,62$, называется золотым сечением (ЗС). Это наиболее распространенное соотношение компонентов во многих системах мира, обеспечивающее согласованность их взаимодействия (гармонию), устойчивость и длительное существование [4, 1, 2].

Единичный отрезок можно разделить на части и по множеству (q) других сечений. Найдем выражение пропорциональности его частей для общего случая, когда $0 < q < \infty$:

$$(1/\varphi)^q = \varphi / (1 - \varphi). \quad (5)$$

Откуда

$$\varphi^{q+1} + \varphi - 1 = \varphi^n + \varphi - 1 = 0, \quad (6)$$

а

$$q = \ln [\varphi / (1 - \varphi)] / \ln (1/\varphi). \quad (7)$$

При $q = 1$ выражения (5) и (6) превращаются в (4).

Величине $n = q + 1$ логично придать смысл общего количества частиц в системе, а q – количества частиц только в субдоминанте, которое равно числу делений (сечений) отрезка.

Значения $\varphi = \varphi_n$, характеризующие соотношение доминанты и субдоминанты, при разных целых $n \geq 1$, — обобщенные золотые сечения, приведены в табл. 1 [1].

Таблица 1. Значения φ_n при разных целых n

n	φ_n	n	φ_n	n	φ_n	n	φ_n	n	φ_n	n	φ_n
1	0,5	4	0,7245	8	0,8117	11	0,8444	16	0,8773	20	0,8939
2	0,6180	5	0,7549	9	0,8243	12	0,8526	17	0,8819	23	0,9034
3	0,6823	6	0,7781	10	0,8351	14	0,8662	18	0,8862	27	0,9134

Любая система представляет собой иерархию меньших частиц, последовательно входящих в большие, по типу *русских матрешек*. Показатель степени n в (6) отражает также мерность системы. При $n = 0$ системы не существует; это состояние беспорядка, хаоса, когда частицы не связаны друг с другом, существуют сами по себе. При $n = 1$ формула (6) *одномерна*; при $n = 2$ — *двухмерна*; при $n = 3$ — *трехмерна* и т.д. В реальных природных системах взаимодействие частиц очень сложно и лишь приближенно следует теории. Поэтому отношение субдоминанты к доминанте хотя и близко к золотым сечениям, особенно к $\varphi_2 = 0,62$, но все же отличается от него, соответствуя не целым, а дробным n . Целые n соответствуют правильным геометрическим формам (плоскости, кубу...). Дробные — фракталам с их сложными, ветвящимися формами, типом древесной кроны, системой кровеносных сосудов и т.п. Анализ показывает, что свойствами ОЗС, или фрактальностью, подобием частиц и целого, обладают все числа от 0 до ∞ , включая, конечно, и дроби. Любую дихотомию, т.е. систему, существующую по закону единства и противостояния ее компонентов, можно трактовать как ОЗС (или фрактал). Причем $n = 1$ является центром своеобразной симметрии этой последовательности: значения φ_n в области $n < 1$ равны $(1 - \varphi_n)$ для $1/n$ в области $n > 1$. Например, величины φ_n для $n = 0,5$; 0,33 и 0,25 равны соответственно $0,38 = 1 - \varphi_2$; $0,32 = 1 - \varphi_3$ и $0,28 = 1 - \varphi_4$.

Пространство между $(1 - \varphi_n)$ и φ_n на куполообразном графике «жизненного» цикла системы, включающем «молодость» (подъем), «зрелость» и «старость» (спад), — это стадии зрелости, характеризующаяся постоянной и минимальной за весь цикл скоростью деформации, а значит, и большей устойчивостью. Живые системы на этой стадии обладают репродуктивной способностью [5].

С увеличением n растет и количество разделительных линий — границ, являющихся концентраторами напряжений. Эти места (экотоны, береговая и снеговая линии, межсезонья — весна и осень (утро и вечер), границы государств и этносов, фронт и т.п.) наиболее чувствительны к изменениям внешней среды и в наибольшей степени подвержены деформациям, т.е. это участки системы с наименьшей устойчивостью и большей вероятностью разрушения.

О природе устойчивости, прочности и деформации систем

Чем меньше частиц (компонентов) в системе, тем меньше границ между ними и больше прочность и устойчивость. Поэтому обратная величина числа частиц в системе $1/n = Z$, изменяющаяся от 1 до 0, может служить мерой устойчивости системы.

Устойчивости или упорядоченности противостоит неустойчивость, или неупорядоченность, хаос: $X = 1 - Z$. Очевидно, что максимум устойчивости $Z = 1$ и отсутствие хаоса $X = 0$ достигаются при $n = 1$, но в этом случае в подсистеме

нет субъектов самоорганизации (гармонизации) — отдельных, свободных частиц. В результате этого утрачивается некая “квазиживая” сила, обеспечивающая способность системы к самоорганизации, под которой понимается согласованное (гармоническое) взаимодействие ее частиц, включающее самовосстановление параметров системы после неразрушительной деформации [6, 5]. В механике аналогом этой силы является упругость, характеризующаяся модулем Юнга, равным напряжению, при котором линейный размер тела увеличивается вдвое [7]. Т.е. для развития нужна определенная доля хаоса, оптимум достигается при $X = Z = 0,5$.

Обнаружена связь ОЗС с относительной долговечностью твердых тел, в частности мерзлых грунтов и льда [6, 5], а посредством нее с глобальными факторами:

$$(\tau_3 / \tau)^{j_{пл}} = \xi = (P / P_m), \quad (8)$$

где P — давление на мерзлое тело; P_m — максимальное давление, которое это тело может выдержать в течение элементарного времени; τ_3 — минимальный (элементарный) отрезок времени, принимаемый в данном опыте (в пределе $\tau_3 \approx 10-13$ с — период тепловых колебаний атома); τ — долговечность (время до разрушения); $j_{пл} = 0,083$ — предельная деформация, равная относительному уменьшению объема льда при плавлении, совпадающая с частотой месячных оборотов Земли в годовом цикле ($1/12 = 0,083$; $30^\circ/360^\circ = 0,083$).

Таблица 2. Значения φ_n , $D = \ln(\tau_3 / \tau)$ и $\xi = (\tau_3 / \tau)^{0,083} = (P/P_m)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
φ_n	0,5	0,618	0,682	0,724	0,755	0,778	0,796	0,812	0,824	0,835	0,844
τ_3 / τ	4380	365	91	46	30	23	18	15	13	11	10
D	8,38	5,9	4,51	3,83	3,4	3,14	2,89	2,71	2,56	2,4	2,3
ξ	0,497	0,613	0,687	0,728	0,753	0,771	0,79	0,800	0,810	0,820	0,846

В табл. 2 приведены: значения первых одиннадцати ОЗС, относительной долговечности τ_3 / τ и прочности $(\tau_3 / \tau)^{0,083} = \xi$, рассчитанные по формуле (8). Величины τ_3 / τ представлены последовательностью, первый член которой равен 4380, второй в 12 раз меньше — 365, а начиная с третьего: $365/4,1 = 91$; $365/4,2 = 46$; $365/4,3 = 30$; $365/4,4 = 23$ и т.д. Ее инвариантом является четверть орбиты вращательных циклов Земли, примерно 90° , совпадающая с длительностью основных фаз вращения (весна, лето, осень, зима или утро, день, вечер, ночь). Эти числа совпадают с обыденными календарными отрезками года (полугодием, кварталом, месяцем и т.п.). Например, если принять $\tau_3 = 1$ час, то эти числа, до 6-го включительно, примерно соответствуют количеству часов в полугодии, в полумесяце, в полунеделе, в четверти недели и в сутках. При $\tau_3 = 1$ сутки эти же числа (4380, 365, 91...) соответствуют количеству суток: в 12 (11) годах (это примерно цикл солнечной активности Вольфа), в году, в квартале, в половине квартала, в месяце и в четверти квартала.

Как видно из табл. 2, разница между величинами ОЗС и ξ составляет сотые доли процента. Так как границы между частицами тела являясь концентраторами напряжений и вакансиями разрушения, то увеличение их числа (увеличение n) сопровождается уменьшением прочности P/P_m и долговечности τ_3 / τ , как это и следует из табл. 2. Таким образом, странное, на первый взгляд, совпадение ОЗС с относительной прочностью мерзлого тела $\xi = (P/P_m)$ получает вполне материалистическое объяснение.

Проявление ОЗС при оценке состояний

Проблеме ОЗС посвящена обширная литература, сводка которой с многочисленными примерами соответствия параметров различных систем закономерностям «золотых» сечений имеется, например, в работах [1, 2, 8–11]. Причем везде речь идет о соотношении параметров, описываемых простыми полиномами (4) или, реже, (6). Рассматриваются только отдельные, обычно конечные (предельные), состояния, а не весь процесс развития. Приведем некоторые примеры такого рода, касающиеся биологических систем и климата.

1. Вода конденсируется из пара при его остывании ниже 100°C и переходит в лед при 0°C . «Путь» до достижения минимальной теплоемкости — плюс 37°C (эта температура близка к температуре тела всех высших животных), при которой активность метаболизма максимальна, составляет $100 - 37 = 63^{\circ}$. Соотношения $63/100 = 0,63$ и $37/100 = 0,37$ примерно равны константам ЗС.

2. При высоких давлениях (до 220 МПа) обычная вода не замерзает до минус 22°C [5]. Расстояние на температурной шкале между температурами максимальной (37°) и минимальной (-22°) активности равно 59. Температура 0° делит это расстояние на две части: $22/59 = 0,37$ и $37/59 = 0,63$.

3. На рис. 1 показана зависимость фитопродукции P_r от радиационного баланса B и индекса сухости J [5]. Величина $J = B/UL$ (U — годовая сумма осадков; $L = 0,6$ ккал/см³ — скрытая теплота парообразования), выражает соотношение тепла и влаги, поступающих из атмосферы на поверхность Земли. При всех B максимум P_r приходится не на $J = 1$, при котором достигается равновесие между этими параметрами, а на $J \approx 0,62$. Дело в том, что для органической жизни значимо не количество осадков, а валовое увлажнение территории (w), равное сумме испарения g и подземного стока f_p . Эта величина близка к сумме осадков за теплый период года U_t , а не за весь год [12]. Например, в Западной Сибири от тундры до средней тайги включительно $U_t \approx 115$ см, а $w \approx 105$ см; U_t примерно в 1,4–1,6 раза меньше годовой суммы осадков U . Если в выражение J вместо U подставить U_t , то и получится $J = 1$.

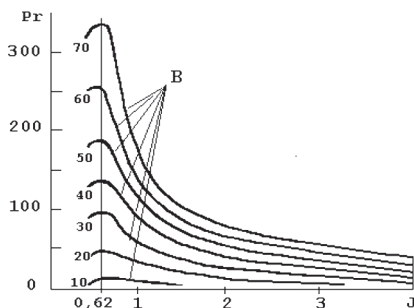


Рис. 1. Зависимость фитопродукции P_r , т/(га · год) от радиационного баланса B (ккал/см² · год) и индекса сухости J (доли единицы)

4. Среднеширотная температура воздуха равна 16°C [13]; изолиния этой температуры проходит примерно по 35° с.ш., которая делит угловое расстояние между экватором и северным полюсом на две части: 0,39 и 0,61.

5. Пропорция распределения основных статей расхода воды, поступающей на сушу из атмосферы: осадки 73 см, полный сток 26 см, испарение 47 см [12], также близка к величине ЗС: $47/73 = 0,64$; $26/73 = 0,36$.

Проявление ОЗС в природных процессах

Этот вариант проявления ОЗС касается описания совокупностей состояний (процессов) с монотонно изменяющимися параметрами, когда константы ОЗС – ϕ и ϕ_c – принимают значения коэффициентов – множителей при A и B в уравнении (6):

$$j_y = A \cdot j_x^2 + B \cdot j_x, \approx A \cdot j_x^2 + (1-A) \cdot j_x, \quad (9)$$

где j_y и j_x – относительные значения размерных величин функции y и аргумента x , определяемые по формулам, аналогичным (1) или (2), в которых вместо ϕ фигурируют j_y или j_x .

Для ускоряющихся процессов, развивающихся по вогнутой кривой, $A \approx -\phi_n$; для затухающих, развивающихся по выпуклой кривой, $-A \approx \phi_n$; в обоих случаях $B \approx 1 - A$. В предельном состоянии, когда $j_y = j_x = 1$, формула (9) превращается в формулу золотого сечения (4).

Другими авторами этот вариант проявления ОЗС не рассматривался. Продемонстрируем его выполнение, правила использования и аналитические возможности.

1. Годовой цикл температуры воздуха в умеренном и холодном поясах включает в себя теплый и холодный полуциклы, разделенные весенним и осенним нулями ($^{\circ}\text{C}$).

Таблица 3. Значения τ , t , j_t , j_l в Тобольске (слева) и Нумто (курсив, справа) на подъеме (верх таблицы) и спаде (низ) в теплое время года

τ	3,75	4	5	6	7	4,95	5	6	7
t	0	1,8	9,1	15,8	18	<i>0</i>	<i>0,2</i>	<i>10,5</i>	<i>15,5</i>
j_t	0	0,08	0,38	0,69	1	<i>0</i>	<i>0,02</i>	<i>0,51</i>	<i>1</i>
j_l	0	0,07	0,51	0,88	1	<i>0</i>	<i>0,01</i>	<i>0,68</i>	<i>1</i>
τ	7	8	9	10	10,3	7	8	9	9,8
t	18	15,4	9,5	0,8	0	<i>15,5</i>	<i>12,4</i>	<i>6,4</i>	<i>0</i>
j_t	0	0,30	0,61	0,91	1	<i>0</i>	<i>0,36</i>	<i>0,71</i>	<i>1</i>
j_l	0	0,14	0,47	0,91	1	<i>0</i>	<i>0,20</i>	<i>0,59</i>	<i>1</i>

В табл. 3 приведены значения размерных t и безразмерных j_t среднемесячных температур воздуха в первой половине теплого полуцикла (на подъеме) и в его второй половине (спаде), а также времени, размерного τ (месяцы от начала года) и безразмерного j_t на юге (Тобольск) и севере (п. Нумто) Тюменской области по данным метеослужбы. Безразмерные параметры вычислены по формуле (1). Отметим, что теплый период (около 6 месяцев в Нумто и 7,5 месяцев в Тобольске) соотносится с длительностью года ($6/12 = 0,5$ и $7,5/12 \approx 0,62$) как 1-й и 2-й члены ОЗС (отсюда и большая жизненная активность в Тобольске).

По данным табл. 3 построены графики зависимости j_t от j_l и найдены их аппроксимации (рис. 2), подтверждающие близость коэффициентов A и B к константам ЗС.

2. На рис. 3 приведены примеры зависимости относительного диаметра j_d от относительного возраста $j_t = \tau/\tau_{\max}$ (τ – текущее время, годы; $\tau_{\max}$ – возраст дерева) в двух возможных формах кривой этой зависимости: вогнутой и выпуклой. Первая представлена теневыносливой пихтой на Аляске, вторая – теплолюбивой сосной на севере (п. Нумто) и юге (п. Караганда) Тюменской области [14]. Величины

безразмерного диаметра отложены на оси ординат, безразмерного времени – на оси абсцисс, размерного времени – на верхней горизонтальной оси. Начало отсчета на графиках А, Б и В – 1578, 1579 и 1770 гг. соответственно. Кривыми показан многолетний ход j_d по наблюдениям – толстые линии, и формулы его аппроксимации – тонкие линии, кружки – расчет по формуле (9) при $A = 0,62$ для вогнутой кривой и $A = -0,62$ для выпуклой. Хотя численные коэффициенты в формулах на рис. 4 несколько отличаются от констант ЗС, на величину j_d это практически не влияет.

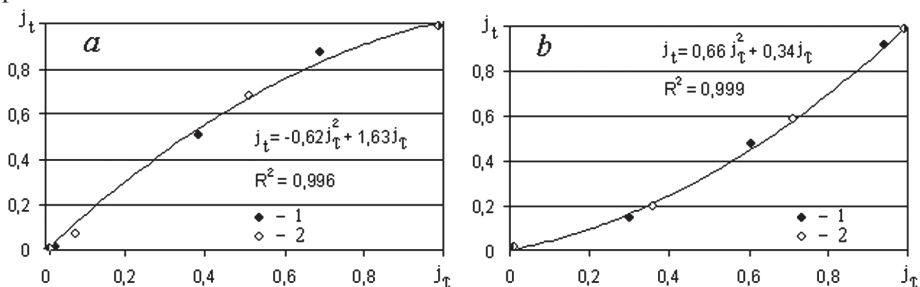


Рис. 2. Зависимость j_t от j_τ в Тобольске (1) и Нумто (2) на подъеме (а) и спаде (б) в теплое время года

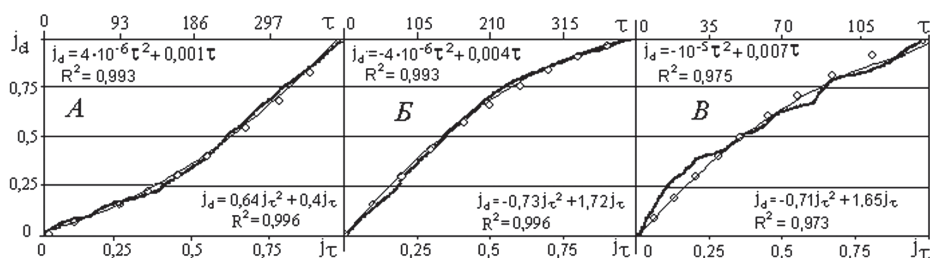


Рис. 3. Зависимость j_d от j_τ для пихты на Аляске (А), сосны в Нумто (Б) и Караганде (В)

Расчеты показали, что полиномиальную формулу (9) с приемлемой погрешностью можно заменить степенной:

$$j_y = j_x^z \quad (10)$$

с показателем степени z , равным φ_n для выпуклых кривых и $1 + \varphi_n$ – для вогнутых.

Степенные формулы сводятся к линейным общего вида $Y' = z X'$, где $Y' = \ln(y)$, $X' = \ln(x)$. Поэтому, несмотря на меньшую точность, по сравнению с полиномиальными, они удобней для расчетов и экономичней, поскольку для определения неизвестного z нужно знать всего одну любую пару соответственных размерных значений y и x , тогда $z = \ln(y) / \ln(x)$. Кроме того, в биологических системах связи между компонентами чаще всего описываются именно степенными функциями.

Особенно хорошо сходятся результаты счета по формулам (9) и (10) у вогнутых кривых. Это видно из табл. 4, в которой приведены результаты вычислений по этим формулам, представленным нормализованными функциями $j_y(j_x)$; максимальная погрешность степенного приближения $< 10\%$. У выпуклых кривых разница между расчетами по полиномиальным и степенным формулам больше, при $n = 7$ (точка максимальной разницы) она равна 22% .

Таблица 4. Зависимость j_y от j_x в полиномиальных (п) и степенных (с) формулах при n , равных 0; 2; 7 и ∞ для вогнутых кривых

j_x	$j_{y,п(0)}$	$j_{y,с(0)}$	$j_{y,п(2)}$	$j_{y,с(2)}$	$j_{y,п(7)}$	$j_{y,с(7)}$	$j_{y,п(\infty)}$	$j_{y,с(\infty)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,2	0,2	0,1	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04
0,4	0,4	0,4	0,25	0,23	0,21	0,19	0,16	0,16
0,6	0,6	0,6	0,45	0,44	0,41	0,4	0,36	0,36
0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,67	0,67	0,64	0,64
1	1	1	1	1	1	1	1	1

В то же время выражения выпуклых кривых – это обратные выражения вогнутых. И ничто не препятствует выпуклую кривую превратить в вогнутую, поменяв местами оси x и y (см. ниже пример 5).

3. В [15] установлен количественный вид зависимости массы (m) древесной зелени (хвои и неодеревеневших побегов) и отдельно хвои сосны (*Pinus Sylvestris*) от ее диаметра (d) в северной и средней тайге на территории Коми. Это весьма репрезентативное исследование, базирующееся на обобщении сотен определений характеристик деревьев. Для выражения результатов в размерном виде его авторам понадобилось более десятка формул. Предлагаемый здесь метод позволяет обобщить весь этот обширный материал одной формулой: (9) или (10).

Максимальные и минимальные значения размерных параметров [15], необходимые для расчетов по формуле (1), сведены в табл. 5.

Таблица 5. Максимальные и минимальные величины диаметра ствола – d_{max} , d_{min} (см), массы зелени (z) и хвои (x) сосны – m_{max} , m_{min} (кг/дерево)

Подзона	d_{min}	m_{min}	$d_{max}(z)$	$m_{max}(z)$	$d_{max}(x)$	$m_{max}(x)$
Северная тайга	0	0	40	91	40	63
Средняя тайга	0	0	40	76	40	46

На рис. 4 показаны построенные по этим данным графики зависимости безразмерной массы древесной зелени и хвои $j_m = m/m_{max}$ сосны от безразмерного диаметра ствола $j_d = d/d_{max}$ в северной и средней тайге и найдены их аппроксимации.

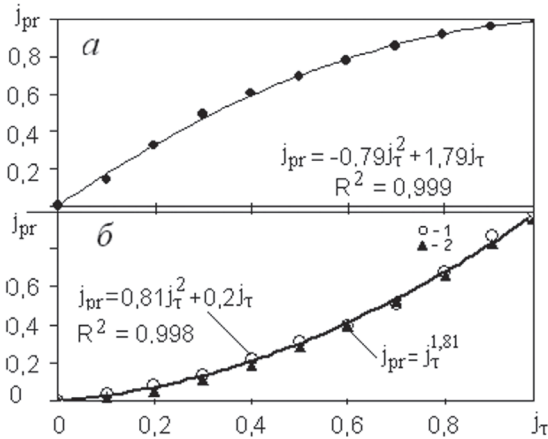


Рис. 4. Графики и формулы зависимости j_m от j_d

Экспериментальные точки на рис. 4 при всех вариантах условий почти сливаются. Численные коэффициенты формул близки к константам ЗС.

Графики на рис. 4 или его формулы можно использовать для приближенного определения обобщенной массы древесной зелени хвойных деревьев в пределах всей таежной зоны. Порода дерева и условия произрастания отражаются в величинах соответственных пар $d_{\max}$ и $m_{\max}$.

4. В [16] исследована зависимость продукции (Pr) сосняка от возраста (τ) в Приангарье. Размерные максимумы этих параметров: $Pr = 8,6\%$, $\tau = 115$ лет, минимумы: $Pr = 0,8\%$, $\tau = 15$ лет. Безразмерные значения j_τ и j_{pr} на рис. 5, а рассчитаны по формуле (1), а на рис. 5, б – по формуле (2).

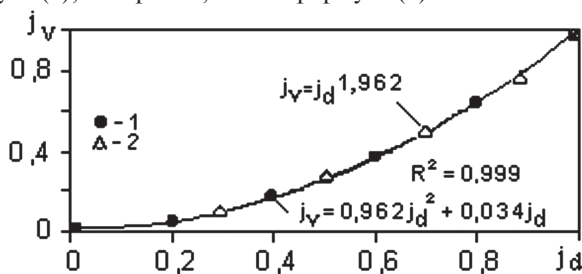


Рис. 5. Графики и формулы зависимости j_{pr} от j_τ

При этом выпуклая кривая на рис. 5, а превращается в вогнутую, при описании которой полиномиальная и степенная формулы дают близкие результаты.

В приведенных примерах численные коэффициенты аппроксимаций близки к константам ЗС. Но в общем это не обязательно. Каждая система представляет собой сложную, многоуровневую иерархию взаимодействующих частиц и каждому уровню n соответствует своя идеальная пропорция, свое золотое сечение ϕ_n (см. примеры 5 и 6).

5. На рис. 6 дан график зависимости относительного объема ствола j_v распространенных деревьев (сосны, ели, березы и осины) от относительного диаметра j_d в Ленинградской области. Размерные величины этих показателей взяты из [10]. Предварительно установлено, что подобные графики для деревьев каждой из этих пород практически сливаются. Графики аппроксимированы формулами (9) и (10). Как видим, они совпадают.

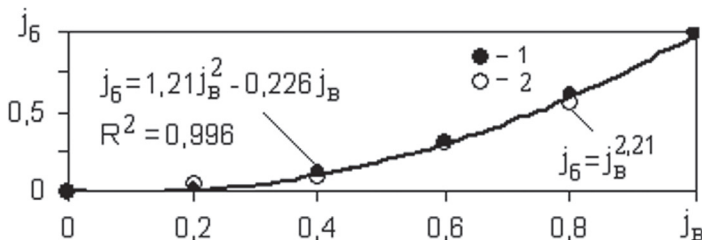


Рис. 6. Зависимость j_v от j_d

Коэффициенты полиномиальной формулы в сумме равны $0,962 + 0,034 \approx 1$, степенной – $z = A + 1 = 1,962$, т.е. являются константами ОЗС.

6. В [17] исследована зависимость заболеваний деменцией (болезнь Альцгеймера) пожилых людей 67–92 лет от возраста. Количество заболевших менялось

с возрастом от 3 000 до 69 000 человеко-лет. По формуле (1) определены относительные числа больных j_6 и их возраста $j_в$, построен график функции $j_6(j_в)$ и найдены его аппроксимации, отвечающие параметрам ОЗС (рис. 7).

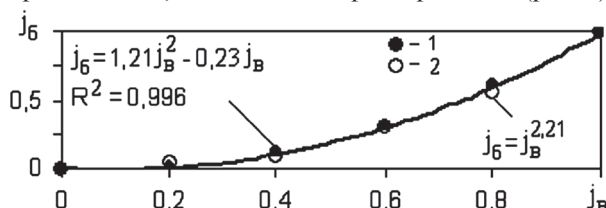


Рис. 7. График зависимости j_6 от $j_в$ и его полиномиальная аппроксимация (1) и расчет по степенной формуле (2)

В этом и других примерах фигурируют безразмерные (абстрактные) числа, лишенные всякой индивидуальности, и ничто не запрещает их сравнивать и производить с ними математические действия. Тем не менее искать реальные связи между генетически разными системами следует только при условии, что таковые обнаружены на качественном (физическом) уровне, у их размерных аналогов. Иначе получается абсурд. Так, из формального сравнения графиков на рис. 3 и 7, ординаты которых в обоих случаях зависят от возраста, и вполне законного преобразования их формул можно получить выражение связи заболеваний деменцией с толщиной древесных колец, что маловероятно. Другое дело, например, сопоставление климатических и дендрохронологических характеристик, связь между размерными показателями которых доказана и лежит в основе реконструкции климатов прошлого [18]. При выявлении связей параметров одной системы подобных сложностей не возникает.

Заключение

Формулы взаимосвязей параметров природных систем, выраженных в относительных величинах, в большинстве случаев имеют полиномиальный или степенной вид, а их численные коэффициенты равны константам ОЗС. Таким образом, можно говорить об универсальности предлагаемых моделей и достаточно общих закономерностях устойчивых взаимосвязей параметров природных систем, проявляющихся через ОЗС. Приведенные примеры показывают, что предлагаемая методика является мощным мультидисциплинарным инструментом для обобщения и выявления общего в разных природных системах.

Литература

- [1] Сороко Э.М. Структурная гармония систем // Минск : Наука и техника, 1984. 265 с.
- [2] Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М. : Радио и связь, 1984. 52 с.
- [3] Ньютон Исаак // Афоризмы, цитаты, высказывания со всего мира. URL: <http://aphorism-citation.ru/index/0104> (дата обращения: 20.02.2014).
- [4] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М. : Наука, 1980. 975 с.
- [5] Коновалов А. А. Деформационная модель развития экогеосистем // Новосибирск : Гео, 2011. 146 с.
- [6] Коновалов А.А. О деформации и разрушении мерзлых грунтов // Криология Земли. 2002. № 4. С. 54–62.
- [7] Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М. : Наука, 1974. 255 с.
- [8] Коновалов А.А. Золотое сечение как показатель устойчивости взаимосвязей компонентов систем // Современные аспекты математики гармонии и ее применение в экономике, есте-

- ствознании, технологии, социуме и образовании. Одесса : Институт креативных технологий, 2011. С. 257–265.
- [9] Ландшейдт Т. Космическая функция золотого сечения. URL: <http://astrologic.ru/library/golden.htm> (дата обращения: 15.02.2014).
- [10] Ледеява А.С. Обоснование оптимального раскрытия хлыстов методом линейного программирования : автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2007. 29 с.
- [11] Скляревский Е. Божественные пропорции золотого сечения // I:\Zolotoe_sechenie2.htm
- [12] Физикогеографический атлас мира. Л. : Гидрометеиздат, 1964. 275 с.
- [13] Будыко М.И. Климат и жизнь. М. : Гидрометеиздат, 1971. 475 с.
- [14] Арефьев С.П., Коновалов А.А. О деформационной модели радиального прироста древесных растений // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 12. С. 56–64.
- [15] Бобкова К.С., Тужилкина В.В. и др. Ресурсная характеристика древесной зелени *Pinus sylvestris* (Pinaceae) в лесах северо-востока Европейской России // Растительные ресурсы. Т. 44, вып. 1. 2008. С. 51–59.
- [16] Артемьева А.В., Бузыкин А.И. и др. Оценка продуктивности древостоя // Факторы продуктивности леса. Новосибирск : Наука, 1989. С. 129–146.
- [17] Bermejo-Pareja F., Benito-León J., Vega S. et al. Incidence and subtypes of dementia in three elderly populations of central Spain // J. Neurol. Sci. 2008. Vol. 264. P. 63–72.
- [18] Ваганов Е.А., Шашкин А.В., Сви́дeрская И.В., Высоцкая Л.Г. Гистометрический анализ роста древесных растений. Новосибирск : Наука, 1985. 102 с.

Сведения об авторах

Коновалов Александр Александрович — доктор технических наук, кандидат географических наук, главный научный сотрудник лаборатории экологии, математического моделирования и ГИС-технологий Института проблем освоения Севера СО РАН (г. Тюмень, Россия). E-mail: konov7@rambler.ru

About

Alexandr A. Kononov — Dr, Institute of Problems of Development of the North of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Malygina st. 86, 625026, Tyumen, Russia. E-mail: konov7@rambler.ru

A.A. Kononov

Institute of North development issues, SB RAS, Tyumen, Russia

Generalization of natural system parameters: examples, theory and rules

A method is proposed to determine quantitative relationships between observed parameters of natural systems basing on their generalized (normalized) values. The normalized values are presented by two relations: 1) the difference between the current and minimum values to the difference between the maximum and the minimum, and 2) the difference between the maximum and current values to the same difference between the maximum and the minimum. With their help, the whole set of variables is clearly representable within the range of 0...1 or 1...0. This reduces the amount of factual data required to establish quantitative relationships between them, and makes it possible to correctly compare the diverse values, which makes the solution universal for a large class of tasks. The sum of these relations is one, and each component can increase (or decrease) only due to a decrease (or increase) in the other. This is a typical dichotomy, embodying the law of unity and struggle of opposites, which can serve as a model of any two-component system. It is shown that in most cases establishing the laws of any system development is sufficient to consider the interaction between only its two major and most influential

groups, for example, woody and herbaceous vegetation (but not individual plants from their composition), forests and steppes, land and sea, heat and cold, etc. Geometric interpretation of a two-component system can serve as a single segment consisting of two parts: a larger one – dominant (φ), and a smaller one – subdominant ($1 - \varphi$). Balance and maximum sustainability of this model are achieved through the division of a line segment in the golden section, the proportion between the whole and its two parts maintained, with $\varphi = 0,618... \approx 0,62$. But a single segment can be divided into parts according to the multitude (q) of other sections as well. The expression φ is found in the general case when $0 < q < \infty$. It is $\varphi^n + \varphi = 1$, where $n = q + 1$, n – number of particles in the system, q – the number of sections. The roots of this equation for different integers n are a sequence of the generalized golden sections (GGS). They are the most common ratios of components in many systems of the world, including biological ones ensuring the consistency of their interaction (harmony), sustainability and long existence [1, 2]. The article shows that the patterns of GGS are relevant not only with whole but also with fractional n . The integers correspond to the correct geometrical forms (plane, cube, etc.). Fractional – to fractals with their complex branching forms of a tree crown type, river systems, blood vessels, etc. Together with the increase in n the number of dividing lines borders, which stress concentrators, is also growing. These places (ecotones, coastal and snow line, off-season – spring and autumn (morning and evening), borders and ethnic groups, frontier and the like) are most sensitive to changes in the external environment and most exposed to deformation. These system sections are the ones with the least resistance, and more likely to fracture. A correlation was found between GGS and relative durability of solids, frozen soils and ice in particular, and through it with global factors. The relationships between parameters of different natural systems – biological, climatic, cryogenic are established and quantified. Particularly, the formula of dependence of the diameter of a tree trunk and its productivity on age, weight wood greenery – on trunk diameter. Primarily polynomial or exponential nature of these relationships is shown with numerical coefficients of calculation formulas close to the proportions of the golden section. The examples of using the proposed method, indicating a good convergence of estimates and actual data, are given. The proposed method is a powerful multi-disciplinary (synthetic) means of generalization and identification of the common in different natural systems.

Keywords: natural system, generalization, stability, products, climate, woody plants, trunk, lots of greenery, golden section.

References

- [1] Soroko E.M. *Strukturnaya garmoniya sistem* [The structural harmony of systems]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1984. 265 p. (In Russian).
- [2] Stakhov A.P. *Kody zolotoy proporsii* [Codes of the golden ratio]. Moscow: Radio i svyaz' Publ., 1984. 52 p. (in Russian).
- [3] N'yuton Isaak [Aphorisms, quotes, sayings. Isaac Newton]. Available at: <http://aphorismcitation.ru/index/0104>. (Accessed: 20th February 2014) (In Russian).
- [4] Bronstein I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike* [A Handbook of Mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 975 p. (In Russian).
- [5] Konovalov A.A. *Deformatsionnaya model' razvitiya ekogeosistem* [The deformation model of the eco-geosystem development]. Novosibirsk: Geo Publ., 2011. 146 p. (In Russian).
- [6] Konovalov A.A. O deformatsii i razrushenii merzlykh gruntov [Deformation and fracture of frozen grounds]. *Kriologiya Zemli*, 2002, no. 4, pp. 5462. (In Russian).
- [7] Koshkin N.I., Shirkevich M.G. *Spravochnik po elementarnoy fizike* [A Handbook of Elementary Physics]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 255 p. (In Russian).
- [8] Konovalov A.A. *Zolotoe sechenie kak pokazatel' ustoychivosti vzaimosvyazey komponentov sistem* [The golden section as an indicator of the stability of the relationship system components]. In: *Sovremen-*

nye aspekty matematiki harmonii i ee primeneniye v ekonomike, estestvoznanii, tekhnologii, sotsiume i obrazovanii [Modern aspects of mathematics of harmony and its application in economics, science, technology, society and education]. Odessa: Institute of Creative Technologies Publ., 2011, p. 257-265. (In Russian).

- [9] Landsheidt T. *Kosmicheskaya funktsiya zolotogo secheniya* [The space function of the golden section]. Available at: <http://astrologic.ru/library/golden.htm>. (Accessed: 15th February 2014 (In Russian)).
- [10] Ledyayeva A.S. *Obosnovaniye optimal'nogo raskroya khlystov metodom lineynogo programmirovaniya*: avtoref. dis. kand. tekhn. nauk [Justification of the optimal cutting of the whips by linear programming. Abstract of Engineering Cand. Diss.]. St. Petersburg, 2007. 29 p. (In Russian).
- [11] Sklyarevskiy E. *Bozhestvennyye proporsii zolotogo secheniya* [The divine proportions of the golden section]. Available at: i:\zolotoe_sechenie2.html (In Russian).
- [12] *Fizikogeograficheskiy atlas mira* [The Physiographical Atlas of the World]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1964. 275 p. (In Russian).
- [13] Budyko M.I. *Klimat i zhizn'* [Climate and life]. Moscow: Gidrometeoizdat Publ., 1971. 475 p. (In Russian).
- [14] Aref'ev S.P., Kononov A.A. On the deformation model of woody plants radial growth. *Vestnik Tyumenskogo gosuniversiteta – Tyumen State University Herald*, 2012, no. 12, p. 5664 (In Russian).
- [15] Bobkova K.S., Tuzhilkina V.V. et al. Resursnaya kharakteristika drevesnoy zeleni *Pinus sylvestris* (Pinaceae) v lesakh severovostoka evropeyskoy Rossii [The resource characteristics of wood greens *Pinus sylvestris* (Pinaceae) in the forests of the northeast European Russia]. *Rastitel'nye resursy*, 2008, vol. 44, issue 1, p. 5159 (In Russian).
- [16] Artem'eva, A.V., Buzykin, A.I. et al. *Otsenka produktivnosti drevostoya* [Evaluation of the forest stand productivity]. In: Elagin I.N. (ed.) *Faktory produktivnosti lesa* [Factors of the forest stand productivity]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1989, p. 129146 (In Russian).
- [17] Bermejo Pareja F., BenitoLeón J., Vega S. et al. Incidence and subtypes of dementia in three elderly populations of central Spain. *Journal of Neurological Sciences*, 2008, vol. 264, p. 6372. DOI: 10.1016/j.jns.2007.07.021.
- [18] Vaganov E.A., Shashkin A.V., Sviderskaya I.V., Vysotskaya L.G. *Gistometricheskii analiz rosta drevesnykh rasteniy* [Gistometry of the growth of woody plants]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1985. 102 p. (In Russian).