

Е.А. Фёдорова

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ В RQ-СИСТЕМЕ MMPP|M|1*Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 1.511.2614/К.*

Исследуется RQ-система MMPP|M|1 методом моментов. Найдены «квазитошные» формулы для вычисления первого и второго начальных моментов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ. Проведен численный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: RQ-система; источник повторных вызовов; метод моментов.

Исследования реальных систем передачи данных и сетей сотовой связи привели к тому, что описанные системы требуют рассмотрения математических моделей, выходящих за рамки множества классических систем массового обслуживания – систем с ожиданием и систем с потерями. Таким образом, стали выделять новый класс систем, который получил название RQ-системы (Retrial Queueing Systems [1–3]) или системы с повторными вызовами.

Принципиальное отличие RQ-систем от классических систем массового обслуживания состоит в том, что заявки, пришедшие в систему и обнаружившие прибор занятым, не покидают систему, а идут в источник повторных вызовов, где после некоторой задержки пытаются снова занять прибор для обслуживания.

Первые работы, посвященные исследованию систем с повторными вызовами, были опубликованы в середине XX в. R.I. Wilkinson [4] и J.W. Cohen [5]. Основные подходы к описанию систем с ИПВ были рассмотрены G. Gosztonyi [6], A. Elldin [7] и др. Большинство первых работ посвящено описанию практических задач и влиянию эффекта повторных вызовов в телекоммуникационных системах.

Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г.И. Фалина, J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral и J.G.C. Templeton [1–3]. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|с и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования RQ-систем.

Большинство исследований Retrial Queueing System реализуются численно или с помощью имитационного моделирования [08–11]. Аналитические методы получены только в тех случаях, когда модели потока и дисциплина обслуживания относительно просты (например, пуассоновский поток и экспоненциальное распределение закона обслуживания) [1]. RQ-системы с входящими MAP- и BMAP-потоками исследуются в работах В.И. Клименок, А.Н. Дудина [12], в которых используются преимущественно матричные методы исследования. Кроме того, матричные методы исследования RQ-систем используются также в работах M.F. Neuts, J.R. Artalejo, A.G. Gomez-Corral [13], J.E. Diamond, A.S. Alfa [14] и др. В ТГУ под руководством А.А. Назарова активно развиваются различные асимптотические методы исследования моделей СМО, в том числе и RQ-систем [15, 16]. Асимптотические и приближенные методы исследования RQ-систем развивались также Г.И. Фалиным [17], В.В. Анисимовым [18] и др.

Часто для построения аппроксимирующих распределений необходимо, чтобы были известны точные моменты искомых распределений. Однако в RQ-системах известны аналитические формулы вычисления моментов распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов лишь для систем с простейшим входящим потоком. В данной работе предложено вычислить моменты для RQ-систем с входящим марковским модулированным потоком (MMPP).

1. Математическая модель

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает MMPP-поток заявок с матрицей условных интенсивностей $r\Lambda$ и матрицей инфинитези-

мальных характеристик Q (рис. 1), время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

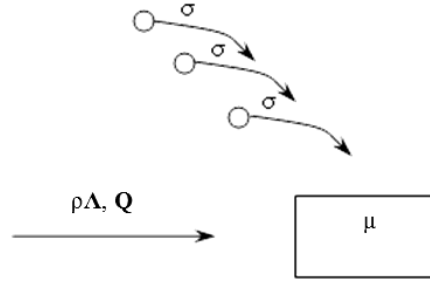


Рис. 1. RQ-система MMPP|M|1

Обозначим вектор-столбец $\mathbf{R}$ – стационарное распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-поток, которое определяется из следующей системы:

$$\begin{cases} \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}\mathbf{E} = \mathbf{1}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец, $\mathbf{0}$ – вектор-столбец с нулевыми элементами.

Очевидно, что интенсивность входящего потока равна $\lambda = \mathbf{R} \cdot \rho\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}$.

Пусть параметры системы таковы, что выполняется

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E} = \mu. \quad (2)$$

Тогда загрузка системы определяется как $\rho = \lambda / \mu = \lambda / (\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E})$.

Для данной системы ставится задача найти математическое ожидание и дисперсию распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Пусть $i(t)$ – процесс, характеризующий число заявок в ИПВ. Процесс $i(t)$ не является марковским. Однако его можно марковизировать путем введения дополнительных компонент: $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-поток, а процесс $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\} = P(k, i, n, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , управляющая MMPP-поток цепь Маркова – в состоянии n , и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Очевидно, что процесс $\{k(t), i(t), n(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Для получения распределения вероятностей $P(k, i, n, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = \mu P(1, n, i, t) - (\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i, t) + \sum_{v \neq n} P(0, v, i, t) \cdot q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + \mu - q_{nn})P(1, n, i, t) + \rho\lambda_n P(0, n, i, t) + \\ + \rho\lambda_n P(1, n, i-1, t) + \sigma(i+1) \cdot P(0, n, i+1, t) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i, t) q_{vn}. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим векторы-строки $\mathbf{P}(k,i) = \{P(k,1,i) \ P(k,2,i) \ \dots \ P(k,N,i)\}$, где в стационарном режиме $\lim_{t \rightarrow \infty} P(k,i,n,t) = P(k,i,n)$. Тогда в матричном виде система (3) примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0,i)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A} - i\sigma \cdot \mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1,i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(1,i)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0,i)\rho\mathbf{A} + \mathbf{P}(1,i-1)\rho\mathbf{A} + \sigma(i+1) \cdot \mathbf{P}(0,i+1) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Перейдем в системе (4) к частичным характеристическим функциям $\mathbf{H}(k,u) = \sum_i e^{ju_i} \mathbf{P}(k,i)$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда система уравнений (4) для характеристических функций переписывается в виде

$$\begin{cases} \mathbf{H}(0,u)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u} + \mu\mathbf{H}(1,u) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}(1,u)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{H}(0,u)\rho\mathbf{A} + \mathbf{H}(1,u)\rho\mathbf{A}e^{ju} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) найдем первый и второй моменты распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, для этого будем использовать метод моментов.

2. Метод моментов

Обозначим $\mathbf{m}_k = -j \frac{\partial \mathbf{H}(k,u)}{\partial u} \Big|_{u=0}$, где $k=1,2$, тогда математическое ожидание числа заявок в

ИПВ вычисляется как $m = (\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)\mathbf{E} = \mathbf{m}\mathbf{E}$.

Кроме того, введем обозначения $\{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1\}$ – двумерное совместное стационарное распределение вероятностей состояний ММРР-потока и состояний прибора. Очевидно, что для векторов $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ выполняются равенства $(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1)\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{R}_0\mathbf{E} + \mathbf{R}_1\mathbf{E} = 1$.

Метод моментов состоит из нескольких этапов

Этап 1. Примем $u=0$ в системе (5). Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A}) - \sigma\mathbf{m}_0 + \mu\mathbf{R}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{R}_0\rho\mathbf{A} + \sigma\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6)$$

Умножим уравнения системы (6) на единичный вектор-столбец:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A})\mathbf{E} - \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} + \mu\mathbf{R}_1\mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I})\mathbf{E} + \mathbf{R}_0\rho\mathbf{A}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

В результате упрощения получим два одинаковых уравнения:

$$\begin{cases} -\mathbf{R}_0\rho\mathbf{A}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} + \mu\mathbf{R}_1\mathbf{E} = 0, \\ -\mathbf{R}_1\mu\mathbf{E} + \mathbf{R}_0\rho\mathbf{A}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить $\mathbf{m}_0\mathbf{E}$:

$$\sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = \mu - \mathbf{R}_0(\mu\mathbf{E} + \rho\mathbf{A}\mathbf{E}). \quad (7)$$

Объединив первое уравнение системы (6) и уравнение (7), получаем систему для определения вектора $\mathbf{m}_0$ (при условии, что будут найдены векторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$):

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{m}_0 = \mathbf{R}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{A}) + \mu\mathbf{R}_1, \\ \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = \mu - \mathbf{R}_0(\mu\mathbf{E} + \rho\mathbf{A}\mathbf{E}). \end{cases} \quad (8)$$

Этап 2. Продифференцируем систему (5) по переменной u :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda} + \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + j\mathbf{H}(1,u)\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \\ + j^2\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим $\mathbf{d}_k = j^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(k,u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0}$, где $k=1,2$, тогда второй момент распределения вероятностей

числа заявок в ИПВ вычисляется как $d = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbf{E} = \mathbf{dE}$.

Примем $u = 0$ в системе (9):

$$\begin{cases} \mathbf{m}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) - \sigma\mathbf{d}_0 + \mu\mathbf{m}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{m}_0\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \sigma\mathbf{m}_0 + \sigma\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

Сложив уравнения системы (10), получим

$$(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)\mathbf{Q} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \sigma\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Умножим уравнение (11) на единичный вектор-столбец:

$$\sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = \mathbf{R}\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \mathbf{R}_0\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}.$$

Учитывая условие (2), имеем следующее выражение:

$$\sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} = \rho\mu - \rho\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}. \quad (12)$$

Приравняем (12) к (7):

$$\rho\mu - \rho\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} = \mu - \mathbf{R}_0(\mu\mathbf{E} + \rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}).$$

Отсюда несложно получить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0\mathbf{E} = 1 - \rho, \\ \mathbf{R}_1\mathbf{E} = \rho. \end{cases} \quad (13)$$

Умножим уравнения системы (10) на единичный вектор-столбец:

$$\begin{cases} -\rho\mathbf{m}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E} + \mu\mathbf{m}_1\mathbf{E} = 0, \\ -\mu\mathbf{m}_1\mathbf{E} + \rho\mathbf{m}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \rho\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} + \sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

В итоге некоторых преобразований получим дополнительное уравнение

$$\sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E} = \mu\mathbf{m}_1\mathbf{E} - \rho\mathbf{m}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}. \quad (14)$$

Этап 3. Продифференцируем систему (9):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^3} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1,u)}{\partial u^2} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1,u)}{\partial u^2}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{I}) + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda} + j \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1,u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + j^2\mathbf{H}(1,u)\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \\ + j \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} - j^3\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u} + j^2\sigma e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2} + j^2\sigma e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^2} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0,u)}{\partial u^3} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (15)$$

Обозначим вектор-строки $\mathbf{e}_k = -j^3 \frac{\partial^3 \mathbf{H}(k, u)}{\partial u^3} \Big|_{u=0}$, где $k=1, 2$. Аналогично предыдущему этапу,

примем $u = 0$ в системе (15):

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) - \sigma\mathbf{e}_0 + \mu\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{d}_0\rho\mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{m}_0 - 2\sigma\mathbf{d}_0 + \sigma\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (16)$$

Сложив уравнения системы (16), получим следующее равенство:

$$(\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbf{Q} - 2\sigma\mathbf{d}_0 + 2\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}.$$

Умножим полученное уравнение на единичный вектор-столбец.

$$2\sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E} = 2\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E}.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (14), можно получить следующее скалярное уравнение:

$$\mathbf{m}_1(\mu\mathbf{E} - \rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{m}_0(2\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}). \quad (17)$$

Из матричного уравнения (11) и скалярного уравнения (17) получаем систему для определения вектора $\mathbf{m}_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1\mathbf{Q} = \sigma\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_0\mathbf{Q} - \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{m}_1(\mu\mathbf{E} - \rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{m}_0(2\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}). \end{cases} \quad (18)$$

Так как векторы $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{d}_0$ связаны соотношением (14), то из (10) для определения вектора $\mathbf{d}_0$ получаем систему

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{d}_0 = \mathbf{m}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + \mu\mathbf{m}_1, \\ \sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E} = \mu\mathbf{m}_1\mathbf{E} - \rho\mathbf{m}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}. \end{cases} \quad (19)$$

Этап 4. Немного преобразуем систему (15):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^2}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^2} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^2}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{I}) + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda} + 2j \frac{\partial \mathbf{H}(1, u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \\ + j^2 \mathbf{H}(1, u)\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} - j^3 \sigma e^{-ju} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}(0, u)}{\partial u} + 2j^2 \sigma e^{-ju} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^2} - j\sigma e^{-ju} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Продифференцируем полученную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \frac{\partial^4 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^4} + \mu \frac{\partial^3 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^3} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^3 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^3}(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{I}) + \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3}\rho\mathbf{\Lambda} + 2j \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + 2j^2 \frac{\partial \mathbf{H}(1, u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \frac{\partial^3 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^3}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + \\ + j \frac{\partial^2 \mathbf{H}(1, u)}{\partial u^2}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + j^3 \mathbf{H}(1, u)\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + j^2 \frac{\partial \mathbf{H}(1, u)}{\partial u}\rho\mathbf{\Lambda}e^{ju} + j^4 \sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(0, u)}{\partial u} - j^3 \sigma e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^2} - \\ - 2j^3 \sigma e^{-ju} \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3} + 2j^2 \sigma e^{-ju} \frac{\partial^4 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^4} + j^2 \sigma e^{-ju} \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^3} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial^4 \mathbf{H}(0, u)}{\partial u^4} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (20)$$

Обозначим моменты 4-го порядка следующим образом: $\mathbf{g}_k = j^4 \frac{\partial^4 \mathbf{H}(k, u)}{\partial u^4} \Big|_{u=0}$, где $k = 1, 2$. Примем

$u = 0$ в системе (20):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) - \sigma\mathbf{g}_0 + \mu\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{e}_0\rho\mathbf{\Lambda} + 3\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda} + 3\mathbf{d}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \sigma\mathbf{m}_0 + 3\sigma\mathbf{d}_0 - 3\sigma\mathbf{e}_0 + \sigma\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (21)$$

Сложив уравнения системы (21), получим

$$(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)\mathbf{Q} + 3\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda} + 3\mathbf{d}_1\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \sigma\mathbf{m}_0 + 3\sigma\mathbf{d}_0 - 3\sigma\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Умножим уравнение (22) на единичный вектор-столбец:

$$3\sigma\mathbf{e}_0\mathbf{E} = 3\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + 3\mathbf{d}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} + 3\sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E}. \quad (23)$$

Подставим первое уравнение системы (15) в выражение (23):

$$3\mu\mathbf{d}_1\mathbf{E} - 3\mathbf{d}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} = 3\mathbf{d}_0\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + 3\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E} + 3\sigma\mathbf{d}_0\mathbf{E}.$$

Отсюда получим следующее уравнение:

$$\mathbf{d}_1(\mu\mathbf{E} - \rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}) = \mathbf{d}_0(\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}) + \mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \frac{1}{3}\mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \frac{1}{3}\sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E}. \quad (24)$$

Объединяя уравнения (16) и (24), составим систему для вычисления вектора $\mathbf{d}_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_1\mathbf{Q} = -\mathbf{d}_0\mathbf{Q} + 2\sigma\mathbf{d}_0 - 2\mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda} - \sigma\mathbf{m}_0, \\ \mathbf{d}_1(\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \mu\mathbf{E}) = \mathbf{d}_0(\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}) - \mathbf{m}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \frac{1}{3}\mathbf{R}_1\rho\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \frac{1}{3}\sigma\mathbf{m}_0\mathbf{E}. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, мы получили формулы (8), (18), (19) и (25) для вычисления компонент математического ожидания и второго начального момента распределения вероятностей числа заявок в ИПВ.

3. Квазиточные моменты

Для использования формул (8), (18), (19) и (25) необходимо знать векторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ в явном виде. В ходе вычислений мы получили лишь соотношение (13):

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0\mathbf{E} = 1 - \rho, \\ \mathbf{R}_1\mathbf{E} = \rho. \end{cases}$$

Кроме того, из начального описания системы и введенных обозначений известно

$$\begin{cases} (\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1)\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}_0\mathbf{E} + \mathbf{R}_1\mathbf{E} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что при дальнейшем использовании метода моментов к системе (5), т.е. при получении формул для моментов высших порядков, дополнительной информации о векторах $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ получить невозможно. А с помощью указанных систем уравнений однозначно векторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ определить нельзя.

В связи с этим предлагается аппроксимировать векторы $\{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1\}$ векторами, пропорциональными вектору $\mathbf{R}$. Тогда несложно показать, что они определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = (1 - \rho) \cdot \mathbf{R}, \\ \mathbf{R}_1 = \rho \cdot \mathbf{R}. \end{cases} \quad (26)$$

По определению, векторы $\{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1\}$ – двумерное совместное стационарное распределение вероятностей состояний ММРР-потока и состояний прибора. Поэтому такой вид векторов $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ возможен в

предположении о независимости распределений вероятностей состояний прибора и состояний цепи Маркова, управляющей ММРР-поток.

4. Численный анализ

Для определения точности предлагаемой аппроксимации проведем численное сравнение полученных моментов с их точными значениями.

Возьмем параметры системы следующими: $\mu = 1$,

$$Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & -0,3 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0,780 & 0 & 0 \\ 0 & 0,936 & 0 \\ 0 & 0 & 1,170 \end{pmatrix}.$$

Будем исследовать зависимость результатов вычислений от значений параметра загрузки ρ и задержки σ .

В табл. 1 представим относительную погрешность численного сравнения значений математического ожидания и дисперсии, вычисленных с помощью описанных выше формул и полученных с помощью численного алгоритма.

Замечание. Численный алгоритм имеет естественные ограничения для числа заявок в ИПВ $i \geq 150$, так как это соответствует необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений (4) размерностью до 1 000. В таких случаях провести сравнение не представляется возможным, поэтому в таблице присутствуют пустые ячейки.

Т а б л и ц а 1

Относительная погрешность вычислений

ρ	$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,5$		$\sigma = 1$		$\sigma = 2$		$\sigma = 10$	
	M	D	M	D	M	D	M	D	M	D
$\rho = 0,1$	0,010	0,122	<0,001	0,046	0,007	0,073	0,015	0,089	0,026	0,106
$\rho = 0,3$	0,007	0,079	<0,001	0,020	0,006	0,033	0,012	0,041	0,022	0,046
$\rho = 0,5$	0,004	0,044	<0,001	0,006	0,004	0,013	0,009	0,015	0,017	0,016
$\rho = 0,7$	0,002	0,018	<0,001	0,001	0,002	0,003	0,005	0,004	0,010	0,003
$\rho = 0,8$	<0,001	0,015	<0,001	<0,001	0,001	<0,001	0,003	0,002	0,007	0,001
$\rho = 0,9$			0,001	0,010	0,001	0,002	0,001	0,001	0,004	0,004

Представим сравнение (табл. 2) значений математического ожидания и дисперсии для следующих параметров системы: $\mu = 1$,

$$Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,28 & -0,3 & 0,02 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 1,187 & 0 \\ 0 & 0 & 1,781 \end{pmatrix}.$$

Т а б л и ц а 2

Относительная погрешность вычислений

ρ	$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,5$		$\sigma = 1$		$\sigma = 2$		$\sigma = 10$	
	M	D	M	D	M	D	M	D	M	D
$\rho = 0,1$	0,042	0,653	0,013	0,049	0,008	0,127	0,029	0,160	0,061	0,178
$\rho = 0,3$	0,029	0,401	0,009	0,010	0,006	0,051	0,022	0,066	0,048	0,067
$\rho = 0,5$	0,017	0,210	0,006	0,004	0,004	0,017	0,015	0,022	0,035	0,019
$\rho = 0,7$	0,007	0,080	0,003	0,004	0,002	0,004	0,008	0,005	0,020	0,002
$\rho = 0,8$	0,003	0,049	0,001	0,009	0,001	0,002	0,005	0,002	0,013	<0,001
$\rho = 0,9$			<0,001	0,006	0,003	0,023	0,002	0,002	0,007	0,004

Для случая входящего простейшего потока известны точные аналитические формулы вычисления первого и второго начальных моментов:

$$m = \frac{\rho^2}{1-\rho} \left(\frac{\mu}{\sigma} + 1 \right), \quad (27)$$

$$d = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \left(1 + \rho + \frac{\mu}{\sigma} + 2\rho^2 \frac{\mu}{\sigma} + \rho^2 \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2 \right). \quad (28)$$

Для получения простейшего входящего потока в рассматриваемой системе положим элементы матрицы условных интенсивностей Λ одинаковыми или размерность матриц Λ и Q примем равной 1. Однако в этом случае несложно показать, что формулы (8), (18), (19) и (25) не зависят от R_1 и R_0 и совпадут с выражениями (27), (28).

Анализ табл. 1 и 2 позволяет сделать вывод, что предложенные формулы достаточно близки к точным для большей области изменений значений параметров системы. В частности, для значений интенсивности задержки заявки в ИПВ, близких к интенсивности обслуживания, абсолютная погрешность вычислений математического ожидания не превышает 3%. Таким образом, предложенные формулы вычисления первого и второго моментов распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов можно назвать почти точными или «квазиточными», так же как и сами значения моментов.

Заключение

Системы массового обслуживания с повторными вызовами, рассматриваемые в данной статье, являются математическими моделями реальных процессов, возникающих в телекоммуникационных системах. В связи с этим научные результаты, полученные в этой области, имеют как теоретическую, так и практическую ценность для развития информационно-коммуникационных технологий и, как следствие, имеют большую значимость для экономики и социальной сферы.

В работе проведено исследование RQ-системы ММРР[М]1 методом моментов. Найдены приближенные формулы для вычисления первого и второго моментов распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Сделано предположение о независимости распределений состояний цепи Маркова, управляющего ММРР-потоком и состояний прибора. Проведенный численный анализ показал, что в таком случае моменты достаточно близки к точным для широкого спектра значений параметров системы.

Таким образом, вычисленные предлагаемым способом моменты можно назвать «квазиточными». В дальнейшем исследовании они могут быть применимы для построения аппроксимирующих распределений (например, гауссовского, гамма-распределения или геометрического).

ЛИТЕРАТУРА

1. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer, 2008. 267 p.
3. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matemática Complutense. 2002. V. 15. P. 101–129.
4. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. V. 35, No. 2. P. 421–507.
5. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. 1957. V. 18, No. 2. P. 49–100.
6. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering // Budavox Telecommunication Review. 1976. No. 2. P. 16–26.
7. Elldin A., Lind G. Elementary Telephone Traffic Theory. Ericsson Public Telecommunications, 1971.
8. Jonin G.L., Sedol J.J. Telephone systems with repeated calls // Proc. of the 6th International Teletraffic Congress. Munich, 1970. P. 435/1–5.
9. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами. М. : Наука, 1983. 230 с.
10. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Systems. 1990. V. 7. P. 169–190.
11. Ridder F. Fast simulation of retrial queues // Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems. Pisa, 2000. P. 1–5.
12. Dudin A.N., Klimenok V.I. Queueing System BMAP/G/1 with repeated calls // Mathematical and Computer Modelling. 1999. V. 30, No. 3–4. P. 115–128.

13. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., Neuts M.F. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate // European Journal of Operational Research. 2001. V. 135. P. 569–581.
14. Diamond J.E., Alfa A.S. Matrix analytical methods for M/PH/1 retrial queues // Stochastic Models. 1995. V. 11. P. 447–470.
15. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
16. Моисеева Е.А., Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа // Вестник ТГУ. УВТИ. 2013. № 4. С. 84–94.
17. Фалин Г.И. Асимптотические свойства распределения числа требований в системе типа m/g/1/∞ с повторными вызовами // ВИНТИ. 1983. № 5418-83.
18. Anisimov V.V. Asymptotic analysis of highly reliable retrial systems with finite capacity // Queues, Flows, Systems, Networks. Proc. of the International Conference «Modern Mathematical Methods of Investigating the Telecommunicational Networks». Minsk, 1999. P. 7–12.

Фёдорова Екатерина Александровна. E-mail: moiskate@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 2 сентября 2014 г.

Fedorova Ekaterina A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Calculation of moments in retrial queueing system MMPP|M|1.

Key words: retrial queueing system, orbit, method of moments

In the paper, we investigate a retrial queueing system with the input Markovian Modulated Poisson Process (MMPP) which is defined by matrixes $\rho\lambda$ and Q , and the service time of each call is distributed by the exponential law with rate μ .

We introduce the following denotations: $i(t)$ is the process defining the call number in the orbit, $n(t)$ is the underlying Markov chain of the input MMP-process, and $k(t)$ describes states of the server.

Stochastic multidimensional process $\{k(t), i(t), n(t)\}$ is a Markov process. To obtain the probability distribution $P(k, i, n, t)$, the system of the Kolmogorov differentiate equations is composed. This system is written in matrix form at stationary regime. Then, it is rewritten with making use of characteristic functions and the obtained system is studied by the method of moments.

Using mathematical transforms, the following systems for components of the mean and the second order initial moment of probability distribution of calls number in the orbit are obtained:

$$\begin{cases} \sigma m_0 = R_0(Q - \rho\Lambda) + \mu R_1, \\ \sigma m_0 E = \mu - R_0(\mu E + \rho\Lambda E), \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 Q = \sigma m_0 - m_0 Q - R_1 \rho\Lambda, \\ m_1(\mu E - \rho\Lambda E) = \frac{1}{2} R_1 \rho\Lambda E + \frac{1}{2} m_0(2\rho\Lambda E + \sigma E), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma d_0 = m_0(Q - \rho\Lambda) + \mu m_1, \\ \sigma d_0 E = \mu m_1 E - \rho m_0 \Lambda E, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 Q = -d_0 Q + 2\sigma d_0 - 2m_1 \rho\Lambda - R_1 \rho\lambda - \sigma m_0, \\ d_1(\rho\Lambda E + \mu E) = d_0(\rho\Lambda E + \sigma E) - m_1 \rho\Lambda E - \frac{1}{3} R_1 \rho\Lambda E - \frac{1}{3} \sigma m_0 E. \end{cases}$$

However, the form of vectors $\{R_0, R_1\}$, which is two-dimensional joint stationary probability distribution of the MMP-process and the server states, is unknown. So, we assume the independence of the MMP-process and the server states distributions, and the vectors $\{R_0, R_1\}$ have the following form:

$$\begin{cases} R_0 = (1 - \rho) \cdot R, \\ R_1 = \rho \cdot R. \end{cases}$$

The analysis of the results shows that moments calculated through obtained formulas are sufficiently close to exact ones obtained by numerical methods. Thus, the moments calculated by proposed way can be called «quasiexact». The formulas for moments calculation can be used in future researching by composing approximate distributions and also for other practical problems.

REFERENCES

1. Falin G.L., Templeton J.G.C. *Retrial queues*. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
3. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis. *Revista Matemática Complutense*, 2002, vol. 15, pp. 101-129.
4. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 1956, vol. 35, no. 2, pp. 421-507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x

5. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review*, 1957, vol. 18, no. 2, pp. 49-100.
6. Gosztonyi G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering. *Budavox Telecommunication Review*, 1976, no. 2, pp. 16-26. DOI: 10.1109/MILCOM.2006.302071
7. Elldin A., Lind G. *Elementary Telephone Traffic Theory*. Ericsson Public Telecommunications, 1971.
8. Jonin G.L., Sedol J.J. Telephone systems with repeated calls. *Proc. of the 6th International Teletraffic Congress*. Munich, 1970, pp. 435/1-5.
9. Stepanov S.N. *Chislennyye metody rascheta sistem s povtornymi vyzovami* [Numerical methods of calculation of retrial queues]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 230 p.
10. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems*, 1990, vol.7, pp. 169-190. DOI: 10.1007/BF01158473
11. Ridder F. Fast simulation of retrial queues. *Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems*. Pisa, 2000, pp. 1-5.
12. Dudin A.N., Klimenok V.I. Queueing System BMAP/G/1 with repeated calls. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, vol. 30, no. 3-4, pp. 115-128. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00136-3
13. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., M.F. Neuts. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *European Journal of Operational Research*, 2001, vol.135, pp. 569-581. DOI: 10.1016/S0377-2217(00)00330-1
14. Diamond J.E., Alfa A.S. Matrix analytical methods for M/PH/1 retrial queues. *Stochastic Models*, 1995, vol. 11, pp. 447-470. DOI: 10.1080/15326349508807355
15. Nazarov A.A., Moiseeva S.P. *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method on queueing theory]. Tomsk: NTL Publ., 2006, 112 p.
16. Moiseeva E.A., Nazarov A.A. Researching of Retrial Queueing system MMPP|GI|1 by using asymptotic analysis method on heavy load condition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika— Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, no. 4(25), pp. 84-94. (In Russian).
17. Falin G.I. Asimptoticheskie svoystva raspredeleniya chisla trebovaniy v sisteme tipa $m/g/1/\infty$ s povtornymi vyzovami [Asymptotic properties of probability distribution of the number of request in system $m/g/1/\infty$ with repeated calls]. *VINITI*, 1983, no. 5418-83. (In Russian).
18. Anisimov V.V. Asymptotic analysis of highly reliable retrial systems with finite capacity. *Queues, Flows, Systems, Networks. Proc. of the International Conference "Modern Mathematical Methods of Investigating the Telecommunicational Networks"*. Minsk, 1999, pp. 7-12.