ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Управление, вычислительная техника и информатика № 4 (29)

УДК 519.2

Е.В. Чимитова, Е.С. Четвертакова

ПОСТРОЕНИЕ ДЕГРАДАЦИОННОЙ ГАММА-МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОБЪЯСНЯЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания №2014/138 (проект № 1689).

Рассматривается деградационная модель надежности с учетом влияния объясняющих переменных, в основе которой лежит предположение о принадлежности независимых приращений случайного процесса изменения показателя деградации гамма-распределению. Предлагается подход к проверке статистической гипотезы о согласии с деградационной гамма-моделью с использованием непараметрических критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга. С использованием методов имитационного моделирования проводится исследование распределений статистик и мощности рассматриваемых критериев относительно различных видов конкурирующих гипотез.
Ключевые слова: деградационная гамма-модель; функция надёжности; ускоренные испытания; метод максимального правдоподобия; критерии согласия.

В современном мире большое внимание уделяется вопросам контроля качества и исследования надежности технических устройств, особенно если от их работоспособности зависит жизнь и здоровье человека. Если речь идет о высоконадежных изделиях, то данных об отказах таких изделий может быть недостаточно для оценки функции надежности, поскольку в период проведения эксперимента наступление отказов наблюдается крайне редко. Существует два возможных способа получить дополнительную информацию о надежности изделий: первый заключается в проведении ускоренных испытаний, когда изделия подвергаются повышенным нагрузкам, в результате чего отказы наступают раньше; второй способ состоит в измерении значений некоторого показателя, характеризующего процесс деградации (старения) изделия. При этом момент времени, когда значение деградационного показателя достигает критического уровня, считается временем наступления отказа. Оба подхода можно совместить, наблюдая процессы деградации и наступление отказов изделий, эксплуатирующихся при повышенных нагрузках. В качестве нагрузок могут выступать температура, давление, напряжение, механические нагрузки и др.

Проанализировав полученные данные о деградации изделия, для получения оценки надежности (прогноза) и проведения дальнейших исследований необходимо построить деградационную модель. При построении моделей деградации учитывается распределение и функция тренда приращений показателя старения, а также функция влияния объясняющих переменных – функция от ковариат. В большинстве работ по исследованиям деградационных процессов в качестве распределения приращений показателя старения рассматриваются либо гамма-распределение (гамма-процесс) [1], либо нормальное распределение (винеровский процесс) [2,3]. Это обусловлено тем, что данные распределения являются устойчивыми относительно суммирования (воспроизводимыми), и за счет этого можно легко определить распределение исследуемой случайной величины – показателя деградации в некоторый момент времени, а затем оценить вероятность безотказной работы.

В настоящей статье рассматриваются вопросы построения деградационной гамма-модели как наиболее часто используемой при описании реальных данных. Так, например, в [4] сравниваются деградационные гамма- и винеровская модели на примере исследования надежности арсенид-галлиевых лазеров; авторы [5] используют деградационную гамма-модель для описания износа автомобильных тормозных колодок; в [6] рассматривается пример моделирования зависимости износа автомобильной шины от нагрузок с использованием гамма-модели. Различные виды деградационных моделей на основе гамма-распределения представлены в работе [7].

Основной проблемой использования деградационной гамма-модели является отсутствие математического аппарата для проверки статистической гипотезы о виде модели, в то время как проверка гипотезы о согласии является обязательным этапом построения вероятностных моделей. В данной работе предлагается подход к проверке статистической гипотезы о виде деградационной гамма-модели надежности с учетом влияния объясняющих переменных, предусматривающий исследование методами компьютерного моделирования распределений статистик критериев согласия в интерактивном режиме проверки гипотезы. В качестве критериев согласия предлагается использовать непараметрические критерии типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга. Приводится пример построения деградационной гамма-модели надежности по данным об углеродистых резисторах.

1. Деградационная гамма-модель надежности

Случайный процесс $Z(t)$, характеризующий процесс деградации исследуемых изделий, называется деградационным гамма-процессом с параметром формы $\nu(t)$ и параметром масштаба σ, если

1) $Z(0)=0$;

2) $Z(t)$ является случайным процессом с независимыми приращениями;

3) приращения $\Delta Z(t)=Z(t+\Delta t)-Z(t)$ подчиняются гамма-распределению с функцией плотности

$$f_{Gamma}\left(t;\sigma,\Delta\nu(t)\right)=\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Delta\nu(t)-1}\frac{e^{-t/\sigma}}{\sigma\cdot\Gamma\left(\Delta\nu(t)\right)},$$

где $\Delta\nu(t)=\nu(t+\Delta t)-\nu(t)$ – параметр формы и $\sigma>0$ – параметр масштаба.

Пусть деградационный процесс наблюдается при некоторой постоянной во времени нагрузке (коварiате) x, диапазон значений которой определяется условиями эксперимента и представляет собой отрезок числовой прямой. Влияние ковариаты x на изменение показателя деградации будем учитывать так же, как это делается в модели ускоренных испытаний [8]:

$$Z_x(t)=Z\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right),$$

где $r(x;\beta)$ – положительная функция от ковариат. Существует множество моделей функций от ковариат. Наиболее популярные из них [9]:

– логлинейная модель вида $r(x;\beta)=e^{\beta_0+\beta_1 x}$ применяется, например, для анализа данных усталости при тестировании различных электронных компонент;

– модель правила мощности в форме $r(x;\beta)=e^{\beta_0+\beta_1\ln x}$ используется в случаях, когда воздействием являются напряжение, механическая нагрузка;

– модель Аррениуса вида $r(x;\beta)=e^{\beta_0+\beta_1/x}$ применяется, когда в качестве нагрузки выступает температура.

Обозначим условное математическое ожидание случайного процесса $Z_x(t)$ через

$$M\left(Z_x(t)\right)=m_x(t),$$

где $m_x(t)=\sigma\nu\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right)$ – положительно определённая, возрастающая функция. Будем называть ее функцией тренда показателя деградации. В качестве функции тренда могут использоваться такие параметрические модели:

1) $m_x(t;\beta)=\dfrac{t}{r(x;\beta)}$;

2) $m_x(t;\beta,\gamma)=\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right)^{\gamma_0}$, $\gamma_0>0$;

3) $m_x(t;\beta,\gamma)=\gamma_0\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right)^{\gamma_1}}\right)$, $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$.

Несложно показать, что при выполнении сформулированных предположений случайный процесс $Z_x(t)$ в некоторый фиксированный момент времени $t=t_k$ представляет собой случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром масштаба σ и параметром формы, равным $\frac{m_x(t_k)}{\sigma}$. Время безотказной работы, которое зависит от ковариаты x, представляет собой величину

$$T_x=\sup\{t:Z_x(t)<\tilde{z}\},$$

где $\tilde{z}$ – критическое значение показателя деградации, при достижении которого фиксируется отказ объекта. Тогда функция надёжности для рассматриваемой деградационной гамма-модели принимает вид

$$S_x(t)=P\{T_x>t\}=P\{Z_x(t)<\tilde{z}\}=F_{Gamma}\left(\tilde{z};\sigma,\frac{m_x(t;\beta,\gamma)}{\sigma}\right). \quad (1)$$

Пусть для каждого из n случайно отобранных из генеральной совокупности объектов известно изменение показателя деградации во времени в виде случайного процесса $Z^i(t)$, а также соответствующая величина нагрузки (ковариаты) x^i, при которой эксплуатировался i-й объект, $i=\overline{1,n}$. Обозначим измерения показателя деградации для i-го объекта через

$$Z^i=\left\{(0,Z_0^i),(t_1^i,Z_1^i),\ldots,(t_{k_i}^i,Z_{k_i}^i)\right\},$$

где k_i – число измерений деградационного показателя во времени. Без потери общности будем считать, что начальное значение показателя старения $Z_0^i=0$, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим выборку приращений через

$$\mathbf{X}_n=\left\{\left(\left\{X_j^1=Z_j^1-Z_{j-1}^1,\ j=\overline{1,k_1}\right\},x^1\right),\ldots,\left(\left\{X_j^n=Z_j^n-Z_{j-1}^n,\ j=\overline{1,k_n}\right\},x^n\right)\right\}.$$

Предполагая, что наблюдаемые случайные процессы $Z_{x^i}^i(t)$, $i=\overline{1,n}$, подчиняются деградационной гамма-модели с математическим ожиданием $m_x(t;\beta,\gamma)$, по выборке $\mathbf{X}_n$ можно оценить неизвестные параметры модели (параметр масштаба σ, параметры функции тренда γ (если таковые присутствуют в модели) и регрессионные параметры β) и построить прогноз времени безотказной работы с заданной вероятностью при заданных значениях ковариаты. Оценка максимального правдоподобия (ОМП) вектора параметров вычисляется в результате максимизации функции правдоподобия:

$$\ln L(\mathbf{X}_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\ln f_{Gamma}(X_j^i;\sigma,p_j^i)\to\max_{\sigma,\gamma,\beta}, \quad (2)$$

где $p_j^i=\frac{m_{x^i}(t_j^i;\gamma,\beta)-m_{x^i}(t_{j-1}^i;\gamma,\beta)}{\sigma}$ – параметр формы гамма-распределения.

2. Проверка статистической гипотезы о согласии

Обязательным этапом построения деградационной гамма-модели надежности (впрочем, как и любой другой вероятностной модели) является проверка статистической гипотезы о согласии:

$$H_0:\ X_j^i \sim F_{Gamma}\left(t;\hat{\sigma},\hat{p}_j^i\right), i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k}\ , \tag{3}$$

где $\hat{p}_j^i = \dfrac{m_{x^i}(t_j^i;\hat{\gamma},\hat{\beta}) - m_{x^i}(t_{j-1}^i;\hat{\gamma},\hat{\beta})}{\hat{\sigma}}$, символ ~ обозначает то, что случайная величина имеет указанное распределение вероятности.

Для проверки гипотез о согласии по выборкам независимых одинаково распределенных случайных величин существует целый ряд критериев, таких как критерии типа хи-квадрат, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга и многие другие. Однако к выборке приращений $\mathbf{X}_n$ классические критерии согласия неприменимы, поскольку элементы данной выборки в общем случае не являются одинаково распределенными.

Введём следующее преобразование приращений деградационного показателя:

$$R_j^i = F_{Gamma}(X_j^i;\hat{\sigma},\hat{p}_j^i),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k_i}\ .$$

При справедливости гипотезы H_0

$$R_j^i \sim Uniform(0,1)\ ,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k_i}\ .$$

Таким образом, задача проверки гипотезы H_0 сводится к проверке гипотезы о равномерном распределении случайных величин R_j^i, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k_i}$. Для проверки данной гипотезы применим критерий согласия типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга.

Обозначим через $R_{(1)}^* \le R_{(2)}^* \le \ldots \le R_{(N)}^*$, $N = \sum_{i=1}^{n} k_i$, элементы вариационного ряда, построенного по выборке

$$\mathbf{R}_N = \left\{R_j^i, i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k_i}\right\}.$$

В критерии типа Колмогорова в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законами распределения используется статистика с поправкой Большева [10] вида

$$S_k = \frac{6ND_N+1}{6\sqrt{N}},$$

где $D_N = \max(D_N^+, D_N^-)$, $D_N^+ = \max\limits_{1\le i\le N}\left\{\dfrac{i}{N} - R_{(i)}^*\right\}$ $D_N^- = \max\limits_{1\le i\le N}\left\{R_{(i)}^* - \dfrac{i-1}{N}\right\}$.

В критерии Крамера–Мизеса–Смирнова используется статистика вида

$$S_\omega = N\omega_N^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^{N}\left\{R_{(i)}^* - \frac{2i-1}{2N}\right\}^2,$$

а в критерии типа Андерсона–Дарлинга – статистика в форме

$$S_\Omega = -N - 2\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{2i-1}{2N}\ln R_{(i)}^* + \left(1-\frac{2i-1}{2N}\right)\ln(1-R_{(i)}^*)\right\}.$$

Необходимо учитывать, что проверяемая гипотеза является сложной, поскольку неизвестные параметры модели оцениваются по тем же данным, по которым проверяется согласие. При проверке сложных гипотез условные распределения данных статистик зависят от ряда факторов: метода оценивания параметров, типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров, а в случае гамма-распределения – от конкретного значения параметра формы [10]. Поэтому для вычисления достигнутого уровня значимости и принятия решения о гипотезе H_0 условное распределение статистики критерия согласия $G(S|H_0)$ может быть оценено только в интерактивном режиме проверки гипотезы в соответствии со следующим алгоритмом:

1. На основе деградационной гамма-модели, с которой проверяется гипотеза о согласии, сгенерировать выборку приращений $\mathbf{X}_n$ в соответствии с заданным планом эксперимента (при заданных значениях ковариаты, тех же количествах объектов в группах с разными значениями ковариаты, а также с теми же моментами времени замера показателя деградации).

2. По полученной выборке $\mathbf{X}_n$ оценить параметры модели методом максимального правдоподобия (2).

3. Сформировать выборку $\mathbf{R}_N$.

4. По выборке $\mathbf{R}_N$ вычислить значение статистики критерия согласия (статистики S_K, S_ω или S_Ω).

5. Повторяя пункты 1–4 M раз, получим выборку статистик объёма *M*, на основе которой построить эмпирическую функцию распределения $G_M(S|H_0)$.

По полученному эмпирическому распределению $G_M(S|H_0)$ вычисляется оценка достигнутого уровня значимости $\alpha_N = 1 - G_M(S_N|H_0)$, где S_N – значение соответствующей статистики, полученное по исходной выборке, по которой проверяется гипотеза о согласии H_0. Если α_N не превышает заданного уровня значимости α, то гипотеза H_0 отвергается.

3. Исследование распределений статистик критериев согласия типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга для деградационной гамма-модели надежности

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, в случае проверки сложной гипотезы о согласии распределения статистик рассматриваемых критериев зависят от ряда факторов, в том числе и от значения параметра формы в случае гамма-распределения. Параметр формы деградационной гамма-модели (1) представляет собой значение функции тренда, которая, в свою очередь, зависит от функции от ковариат $r(x;\beta)$. Следовательно, распределения статистик критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга при проверке сложной гипотезы о согласии (3) будут зависеть от вида параметрической функции тренда, вида параметрической функции от ковариат, плана эксперимента (моментов времени замера показателя деградации и значений ковариат, при которых наблюдались объекты).

С использованием методов имитационного моделирования исследуем зависимость распределений статистик критериев согласия от данных факторов. Результаты исследования распределений статистик рассматриваемых критериев согласия приведем на примере критерия типа Колмогорова. На рис. 1 представлены эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова $G_M(S_K|H_0)$, полученные при различных вариантах выбора моментов времени замера деградационного показателя: $T_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $T_2 = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, $T_3 = \{0,2,4,6,8,10\}$. Выборки приращений $\mathbf{X}_n$ объема $n = 30$ генерировались на основе гамма-модели со степенной функцией тренда и логлинейной функцией от ковариат. План эксперимента включает пять групп, соответствующих различным значениям скалярной ковариаты $x \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$. Значения параметров модели: $\sigma = 1$, $\gamma_0 = 0,7$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0,5$. Объем моделирования $M = 16\,600$.

Как видно из рис. 1, распределение статистики критерия существенно зависит как от числа замеров показателя деградации, так и от выбора самих моментов времени замера. Аналогичным образом выявлена зависимость распределений статистик от числа групп (количества различных значений ковариаты) в плане эксперимента.

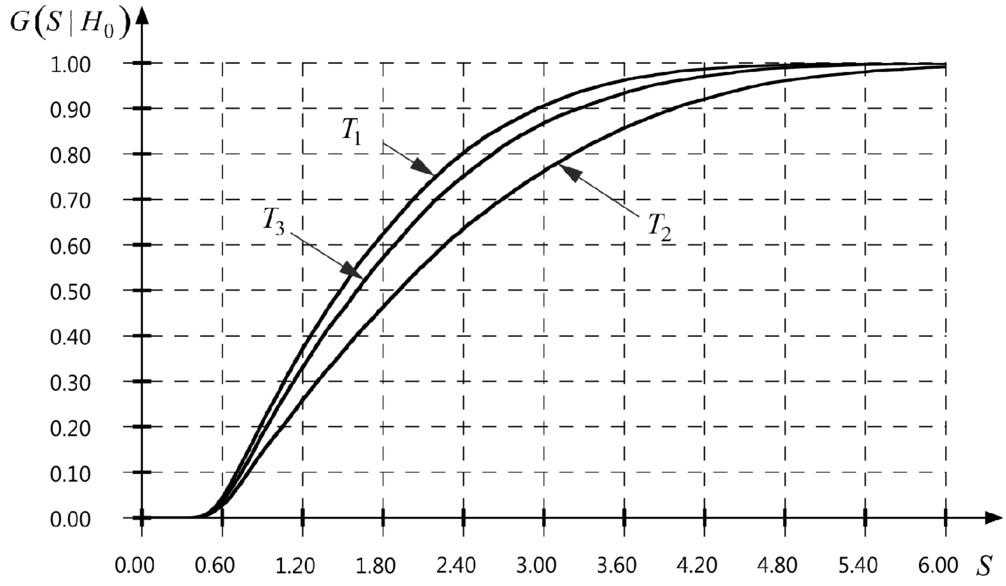

Рис. 1. Эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова при проверке сложной гипотезы для гамма-модели в зависимости от выбора моментов замера показателей старения и их количества

Рассмотрим зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от выбора функции от ковариат. На рис. 2 представлены эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова $G_M(S_K \mid H_0)$, полученные для деградационных гамма-моделей с различными функциями от ковариат: логлинейной, Аррениуса и функции правила мощности. Выборки приращений $\mathbf{X}_n$ объема $n = 30$ генерировались на основе модели со степенной функцией тренда. План эксперимента включает пять групп, соответствующих различным значениям скалярной ковариаты $x \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$, и замеры по времени $T = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Значения параметров: $\sigma = 1$, $\gamma_0 = 0,7$, регрессионные параметры в случае логлинейной модели и модели Аррениуса $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0,5$ и для модели правила мощности $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -0,5$. Объем моделирования $M = 16\,600$.

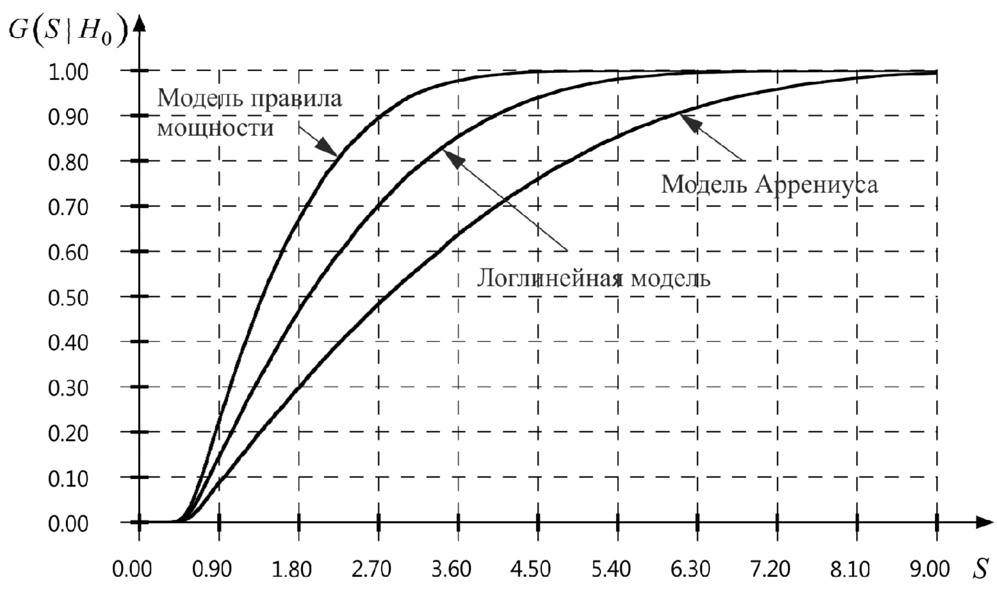

Рис. 2. Эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова при проверке сложной гипотезы для гамма-модели в зависимости от выбора функции влияния объясняющих переменных

Как видно из рис. 2, выбор функции от ковариат для гамма-модели оказывает существенное влияние на распределение статистики критерия типа Колмогорова при проверке сложной гипотезы. Аналогичные исследования были проведены для различных функций тренда показателя деградации: линейной и степенной. Показано, что выбор функции тренда для деградационной гамма-модели также существенно влияет на распределение статистики критерия типа Колмогорова.

Аналогичные результаты исследований распределений статистик были получены для критериев согласия типа Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга.

4. Исследование мощности критериев согласия типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга для деградационной гамма-модели

Мощностью критерия называется вероятность отвергнуть неверную гипотезу при уровне значимости α: $1-G(S_\alpha \mid H_1)$. Понятно, что чем больше мощность критерия, тем выше его способность различать близкие конкурирующие гипотезы.

С использованием методов имитационного моделирования проведем исследование мощности критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга при проверке сложной гипотезы H_0, соответствующей деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда и логлинейной функцией от ковариат.

Рассмотрим три различные конкурирующие гипотезы:

1. H_1^1: Общая деградационная модель [11] с линейной функцией тренда и логлинейной функцией от ковариат, с распределением приращений по закону Вейбулла.

2. H_1^2: деградационная гамма-модель со степенной функцией тренда с параметром $\gamma_0 = 1{,}3$ и логлинейной функцией от ковариат.

3. H_1^3: деградационная гамма-модель с линейной функцией тренда и функцией Аррениуса в качестве функции от ковариат.

Моделирование будем проводить для $M = 10\,000$, число объектов $n = 20$ и $n = 40$, число замеров деградационного показателя для каждого объекта равно $k_i = 10$ и $k_i = 20$ соответственно, $i = 1,...,n;$ скалярная ковариата $x \in \{1, 2\}$.

В табл. 1, 2 и 3 представлены оценки мощности рассматриваемых критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 против конкурирующих гипотез H_1^1, H_1^2 и H_1^3 соответственно.

Как видно из табл. 1–3, с ростом объема выборки мощность критериев увеличивается, при этом более предпочтительными по мощности для всех рассмотренных пар конкурирующих гипотез оказались критерии типа Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга.

Таблица 1

Мощность критериев в случае конкурирующей гипотезы H_1^1

Критерий согласия	$n = 20,\ k = 10$	$n = 20,\ k = 20$	$n = 40,\ k = 10$
Колмогорова	0,483	0,711	0,725
Крамера–Мизеса–Смирнова	0,578	0,836	0,843
Андерсона–Дарлинга	0,614	0,792	0,821

Таблица 2

Мощность критериев в случае конкурирующей гипотезы H_1^2

Критерий согласия	$n = 20,\ k = 10$	$n = 20,\ k = 20$	$n = 40,\ k = 10$
Колмогорова	0,766	0,883	0,892
Крамера–Мизеса–Смирнова	0,827	0,921	0,929
Андерсона–Дарлинга	0,836	0,976	0,981

Таблица 3

Мощность критериев в случае конкурирующей гипотезы H_1^3

Критерий согласия	$n=20,\ k=10$	$n=20,\ k=20$	$n=40,\ k=10$
Колмогорова	0,624	0,782	0,794
Крамера–Мизеса–Смирнова	0,683	0,855	0,860
Андерсона–Дарлинга	0,716	0,827	0,846

4. Пример построение деградационной гамма-модели по данным об углеродистых резисторах

Углеродистые резисторы (Carbon Film resistors) применяются в радиотехнической и электронной аппаратуре. Данные резисторы отличаются тем, что в качестве проводящего слоя они используют пленку пиролитического углерода. Отказ наступает в тот момент, когда процент повышения сопротивления относительно начального значения достигает критического уровня $\tilde{z}$ (2 или 5% в зависимости от типа резисторов.

В [12] представлены результаты ускоренных испытаний на надежность 29 резисторов в течение 8 084 ч. План эксперимента представляет собой три группы по 9, 10 и 10 резисторов соответственно. Исследования проводились при повышенной температуре: для первой группы резисторов температура составила 83°C, для второй – 133°C, для третьей – 173°C. На основе полученных данных построим деградационную гамма-модель с линейной функцией тренда и функцией Аррениуса в качестве функции от ковариат. В результате решения задачи (2) найдены ОМП параметров деградационной гамма-модели: $\hat{\sigma}=2{,}7131$, $\hat{\beta}_0=13{,}1012$, $\hat{\beta}_1=-7{,}9512$.

Проверим гипотезу о согласии с гамма-моделью для критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга. Для критерия типа Колмогорова получены значение статистики $S_k=0{,}882$ и достигнутый уровень значимости $\alpha_N=0{,}418$; для критерия типа Крамера–Мизеса–Смирнова $S_\omega=0{,}073$, $\alpha_N=0{,}733$; для критерия Андерсона-Дарлинга $S_\Omega=0{,}66$, $\alpha_N=0{,}593$. Так как полученный достигнутый уровень значимости $\alpha_N>\alpha=0{,}05$ для всех рассмотренных критериев, гипотеза о согласии с выбранной моделью не отвергается.

Рассчитаем прогноз времени безотказной работы для данных резисторов при различной фиксированной температуре и различных критических уровнях превышения сопротивления при допустимом проценте превышения. Результаты расчета времени прогноза для различных условий проведения эксперимента представлены в табл. 4.

Таблица 4

Оценка вероятности безотказной работы при различных условиях проведения эксперимента

Температура, °C	Критический уровень $\tilde{z}$, %	Время безотказной работы t_k, ч	Оценка надежности $S_x(t_k)$
125	2	1 000	0,990
125	5	3 000	0,989
60	2	8 760 (1 год)	0,998

Как видно из табл. 4, с вероятностью около 0,99 при температуре 125°C время безотказной работы в случае критического повышения сопротивления $\tilde{z}=2\%$ составит 1 000 ч, а для $\tilde{z}=5\%$ – 3 000 ч. При температуре 60°C и $\tilde{z}=2\%$ время безотказной работы составит 8 760 ч (примерно 1 год) с вероятностью 0,998.

Заключение

В данной работе рассмотрены вопросы построения деградационной гамма-модели надежности по результатам измерений деградационного показателя при различных постоянных во времени нагрузках. Предложен метод проверки сложной гипотезы о согласии для данной модели с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга. В результате исследований мощности рассматриваемых критериев можно утверждать, что предложенный метод проверки гипотезы о согласии позволяет проверять предположения как о виде распределения приращений, так и о виде функции тренда и функции от ковариат.

Рассмотрен пример построения деградационной гамма-модели надежности по данным об углеродистых резисторах. Проведена проверка гипотезы о согласии и на основе полученной модели рассчитаны вероятности безотказной работы для некоторых значений времени наработки при различных температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bordes L., Paroissin C., Salami A.* Parametric inference in a perturbed gamma degradation process // Preprint/Statistics & Probability Letters. Pau, 2010. P. 13.
2. *Liao C.M., Tseng S.-T.* Optimal design for step-stress accelerated degradation test // IEEE Trans. Reliab. 2006. V. 55. P. 59–66.
3. *Tang L.C., Yang L.C., Xie M.* Planning of step-stress accelerated degradation test // Los Angeles: Reliability and Maintainability Annual Symposium, 2004.
4. *Tsai C.-C., Tseng S.-T., Balakrishnan N.* Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes // Journal of Statistical Planning and Inference. 2011. No. 12. P. 25–35.
5. *Crowder M., Lawless, J.* On a scheme for predictive maintenance // European J. Oper. Res. 2007. V. 16. P. 1713–1722.
6. *Антонов А.В., Никулин М.С.* Статистические модели в теории надежности. М. : Абрис, 2012. 390 с.
7. *Park C., Padgett W.J.* Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma process // Lifetime Data Analysis. 2005. V. 11. P. 511–527.
8. *Nikulin M., Bagdonavicius N.* Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analisys // Boca Raton: Chapman & Hall/CRC. 2001. P. 334.
9. *Галанова Н.С., Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.* Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний // Автометрия. 2012. № 6. С. 53–68.
10. *Лемешко Б.Ю. и др.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
11. *Chimitova E., Chetvertakova E.* Alternatives for Wiener and gamma degradation models: method of selection // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA'2013. Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. Novosibirsk : NSTU Publisher., 2013. P. 77–82.
12. *Meeker W.Q., Escobar L.A.* Statistical Methods for Reliability Data. N.Y. : John Wiley and Sons, 1998.

Чимитова Екатерина Владимировна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com
Четвертакова Евгения Сергеевна. E-mail: evgenia.chetvertakova@gmail.com
Новосибирский государственный технический университет

Поступила в редакцию 2 октября 2014 г.

Chimitova EkaterinaV., Chetvertakova Evgenia S. (Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).

The construction of the gamma degradation model with covariates.

Keywords: gamma degradation model; reliability function; accelerated testing; maximum likelihood; goodness-of-fit tests.

In this paper, we consider the problem of constructing the gamma degradation model as the most frequently used one for description of a degradation process and prediction of non-failure operation time.

A stochastic process $Z(t)$ characterizing degradation process is referred to as gamma degradation process with a shape parameter $\nu(t)$ and scale parameter σ, if

1. $Z(0)=0$.
2. $Z(t)$ is a stochastic process with independent increments.
3. the increments $\Delta Z(t)=Z(t+\Delta t)-Z(t)$ follows the gamma distribution with the probability density function

$$f_{Gamma}\left(t;\sigma,\Delta\nu(t)\right)=\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Delta\nu(t)-1}\frac{e^{-t/\sigma}}{\sigma\cdot\Gamma\left(\Delta\nu(t)\right)},$$

where $\Delta\nu(t)=\nu(t+\Delta t)-\nu(t)$ is the shape parameter and $\sigma>0$ is the scale parameter.

The gamma distribution is a repeatable distribution (if random variables ξ_1 and ξ_2 follow the gamma distribution with a scale parameter σ and shape parameters ν_1 and ν_2, then $\xi_1+\xi_2$ follows the gamma distribution with the scale parameter σ and the shape parameter $\nu_1+\nu_2$) that explains the fact of using the gamma distribution as a distribution of increments.

Non-failure operation time, which depends on covariate x, is equal to

$$T_x = \sup\{t : Z_x(t) < \tilde{z}\},$$

where $\tilde{z}$ is the critical value of degradation index, when the failure is fixed.

Then, the reliability function for gamma degradation model is equal to

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = F_{Gamma}\left(\tilde{z}; \sigma, \frac{m_x(t)}{\sigma}\right),$$

where $m_x(t) = \sigma\nu\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right)$ is a positive monotone increasing trend function, $r(x;\beta)$ is a positive covariate function.

The main problem of using the gamma degradation model is the absence of mathematical methods for testing the statistical hypothesis of goodness-of-fit for the model. We propose an approach to testing goodness-of-fit of the gamma degradation model with covariates, which implies the investigation of test statistic distributions with computer simulation methods in interactive mode of testing hypothesis. The non-parametric goodness-of-fit tests of Kolmogorov, Cramer-von Mises-Smirnov and Anderson-Darling are recommended for testing this hypothesis.

In this paper, we have carried out the research of statistics distributions and the power of the considered goodness-of-fit tests for the gamma degradation model by means of computer simulation methods. It has been shown that the distributions of the test statistics in the case of composite hypotheses depend on the type of the parametric trend function, the type of the parametric covariate function, and the design of experiment (the moments of time, in which degradation index was measured, and the values of covariates, for which objects were observed). We have carried out an empirical analysis of the power of considered tests for various pairs of competing hypotheses. It has been shown, that the proposed method of testing the goodness-of-fit hypothesis enables to test the assumption of a distribution of degradation increments, as well as the assumptions about the trend function and the covariate function. We have also considered an example of construction of the gamma degradation model for Carbon Film resistors data.

REFERENCES

1. Bordes L., Paroissin C., Salami A. *Parametric inference in a perturbed gamma degradation process*. In: *Statistics & Probability Letters*. Pau, 2010, pp. 13.
2. Liao C.M., Tseng S.-T. Optimal design for step-stress accelerated degradation test. *IEEE Trans. Reliab*, 2006, vol. 55, pp. 59-66.
3. Tang L.C., Yang L.C., Xie M. *Planning of step-stress accelerated degradation test*. Los Angeles: Reliability and Maintainability Annual Symposium, 2004.
4. Tsai C.-C., Tseng S.-T., Balakrishnan N. Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes. *Journal of Statistical Planning and Inference,* 2011, no.12. pp. 25-35. DOI: 10.1016/j.jspi.2011.06.008
5. Crowder, M., Lawless, J. On a scheme for predictive maintenance. *European Journal Oper. Res,* 2007, vol. 16, pp. 1713-1722. DOI: 10.1016/j.ejor.2005.10.051
6. Antonov A.V., Nikulin M.S (eds.) *Statisticheskie modeli v teorii nadezhnosti* [Statistical models in reliability theory]. Moscow: Abris Publ., 2012.
7. Park, C., Padgett, W.J. Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma process. *Lifetime Data Analysis,* 2005, vol. 11, pp. 511-527. DOI: 10.1007/s10985-005-5237-8
8. Nikulin M., Bagdonavicius N. *Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analisys*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.
9. Galanova N.S., Lemeshko B.Yu., Chimitova E.V. Using nonparametric goodness-of-fit tests to validate accelerated failure time models. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48. no. 6. pp. 580-592. DOI: 10.3103/S8756699012060064
10. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N., Chimitova E.V. *Statisticheskiy analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroyatnostnykh zakonomernostey. Kom-p'yuternyy podkhod* [Statistical data analysis, simulation and study of probability regularities computer approach]. Novosibirsk: NSTU Publ., 2011. 888 p.
11. Chimitova E., Chetvertakova E. [Alternatives for Wiener and gamma degradation models: method of selection]. *Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA'2013*. Proc. of the intern. workshop. Novosibirsk: NSTU Publ., 2013, pp. 77-82. (In Russian).
12. Meeker W.Q., Escobar L.A. *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley and Sons, 1998.