УДК 514.76

А.Г. Седых, А.С. Березина

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО БЕРЖЕ И ДЕФОРМАЦИИ ЕГО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ SO(3)-СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Рассматриваются неприводимые SO(3)-структуры на пятимерном многообразии. Изучены топологические и геометрические свойства однородного пространства Берже SO(5)/SO(3). Приведены примеры групп Ли, вычислены ковариантные дивергенции структурного тензора до и после деформации геодезическими пространства Берже, исследовано свойство приближенной интегрируемости.

Ключевые слова: *специальная SO(3)-структура, однородное пространство Берже, группа Ли.*

Известно [1], что существует неприводимое представление группы SO(3) в пространстве $\mathbf{R}^5$. Оно основано на том, что векторное пространство $\mathbf{R}^5$ изоморфно множеству действительных симметричных бесследовых матриц порядка 3. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$X=(x_1,\dots,x_5)\leftrightarrow\sigma(X)=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{\sqrt{3}}-x_4 & x_2 & x_3\\ x_2 & \frac{x_1}{\sqrt{3}}+x_4 & x_5\\ x_3 & x_5 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x_1\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Неприводимое представление ρ на $\mathbf{R}^5$ задается формулой

$$\rho(h)X=h\sigma(X)h^{-1}, h\in SO(3).$$

Для элемента $\sigma(X)$ рассмотрим его характеристический полином

$$P_x(\lambda)=\det(\sigma(X)-\lambda I)=-\lambda^3+g(X,X)+\frac{2\sqrt{3}}{9}T(X,X,X).$$

Этот полином инвариантен относительно SO(3)-действия, заданного представлением ρ. Поэтому его коэффициенты являются SO(3)-инвариантными. При действии SO(5) группа изотропии тензора T совпадает [1] с SO(3). Билинейная форма g – это стандартное скалярное произведение на $\mathbf{R}^5$,

$$g(X,X)=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+x_5{}^2,$$

а трилинейная часть T задается формулой

$$T(X,X,X)=\frac{1}{2}x_1(6x_2{}^2+6x_4{}^2-2x_1{}^2-3x_3{}^2-3x_5{}^2)+\frac{3\sqrt{3}}{2}x_4(x_5{}^2-x_3{}^2)+3\sqrt{3}x_2x_3x_5.$$

Заметим, что $T(X,X,X)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\det(X)$, где X отождествляется с матрицей по формуле (1). Тензор $T=\sum_{i,j,k=1}^{5}t_{ijk}dx_i\otimes dx_j\otimes dx_k$ симметричен по всем аргументам, и свертка по любым его двум индексам равна нулю. Кроме того, он обладает еще одним свойством, которое удобно сформулировать при помощи эндоморфизмов $T_X = \iota_X T$, полученных сверткой с векторами: $T_X(\cdot,\cdot) = T(X,\cdot,\cdot)$. Тогда для всех $X \in \mathbf{R}^5$ имеет место равенство $(T_X)^2 X = g(X,X)X$. Неприводимое представление группы SO(3) в пространстве $\mathbf{R}^5$ дает возможность определить неприводимую SO(3)-структуру на пятимерном ориентированном римановом многообразии (M^5,g) как редукцию структурной группы SO(5) расслоения реперов к группе Ли SO(3). В работе [1] показано, что неприводимую SO(3)-структуру можно определить при помощи симметричного тензорного поля T типа (0,3) на M. В соответствии с этим подходом мы даем следующее определение:

Определение 1. [1] *Неприводимой SO(3)-структурой на 5-мерном римановом многообразии* (M,g) [2] *называется тензорное поле T типа* (0,3), *для которого линейное отображение* $X \to T_X \in End(TM)$, $X \in TM$, *удовлетворяет следующим свойствам*:

1) *симметричность*: $g(X,T_YZ) = g(Z,T_YX) = g(X,T_ZY)$,

2) *нулевой след*: $tr(T_X) = 0$,

3) для *любого векторного поля* $X \in TM$

$$T_X^2 X = g(X,X)X.$$

В статье [1] показано, что в каждом касательном пространстве можно выбрать адаптированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, в котором метрика g и тензор T будут иметь канонический вид, а именно $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$T = \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^2)^2 - 3(e^5)^2) +$$

$$+\frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5 .$$

Здесь $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ – дуальный репер. Из этого выражения получаем ненулевые компоненты тензора T в адаптированном репере:

$$t_{111} = -1,\ t_{122} = 1,\ t_{144} = 1,\ t_{133} = -\frac{1}{2},\ t_{155} = -\frac{1}{2},$$

$$t_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, неприводимая SO(3)-структура на многообразии – это риманова структура g и тензорное поле T, обладающее указанными выше свойствами 1) – 3).

Теорема 1 [1]. *Стабилизатор тензора* T_{ijk} *– это неприводимая SO(3), вложенная в* O(5).

Поскольку стабилизатор T_{ijk} есть неприводимая SO(3), его орбита под действием O(5) – это 7-мерное однородное пространство O(5)/SO(3).

Теорема 2 [1]. O(5)-*орбита тензора* T_{ijk} *состоит из всех тензоров* Y_{ijk}, *для которых ассоциированное линейное отображение* $\mathbf{R}^5 \supset v \to Y_v \in End(\mathbf{R}^5)$, $(Y_v)_{ij} = Y_{ijk}v_k$, *удовлетворяет следующим трем условиям*:

1) *оно полностью симметрично, т.е.* $g(u,Y_vw) = g(w,Y_vu) = g(u,Y_wv)$;

2) *имеет нулевой след* $tr(Y_v) = 0$;

3) *для любого вектора* $v \in \mathbf{R}^{5:}$ $Y_v^2u = g(u,v)v$.

Замечание. O(5)-*орбита* T_{ijk}, *описанная инвариантом в вышеописанной теореме*, *состоит из двух* SO(5)-*орбит*: *орбиты* T_{ijk} *и орбиты* $-T_{ijk}$.

Рассмотрим однородное пространство $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$. Впервые оно было описано М. Берже как многообразие, допускающее нормальную однородную метрику положительной секционной кривизны. Оно топологически эквивалентно [2] S^3-расслоению над S^4.

Относительно биинвариантного скалярного произведения $\langle A, B\rangle = -\frac{1}{10} tr(AB)$ на SO(5) получим разложение $so(5) = so(3) \dotplus V$ алгебры Ли so(5) в прямую сумму алгебры Ли so(3) группы SO(3) и ad(SO(3)) – инвариантного подпространства V.

Выберем ортонормированный базис E_1, E_2, E_3, такой, что $E_1, E_2, E_3 \in so(3)$, а $\omega_1, \ldots, \omega_7 \in V$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем ненулевые скобки Ли элементов $\omega_1,\ldots,\omega_7$:

$$[\omega_1,\omega_2]=\frac{\sqrt{15}}{2}E_2+\omega_3,\ [\omega_1,\omega_3]=-\frac{1}{2}E_1-\omega_2,\ [\omega_1,\omega_4]=-2E_3+\omega_5,$$

$$[\omega_1,\omega_5]=-\omega_4,\ [\omega_1,\omega_6]=-\frac{1}{2}E_2-\omega_7,\ [\omega_1,\omega_7]=\frac{\sqrt{15}}{2}E_1+\omega_6,$$

$$[\omega_2,\omega_3]=-\frac{\sqrt{15}}{2}E_3+\omega_1,\ [\omega_2,\omega_4]=\omega_6,\ [\omega_2,\omega_5]=\frac{3}{2}E_2+\omega_7,$$

$$[\omega_2,\omega_6]=-\omega_4,\ [\omega_2,\omega_7]=\frac{3}{2}E_3-\omega_5,\ [\omega_3,\omega_4]=-2E_2+\omega_7,$$

$$[\omega_3,\omega_5]=\frac{\sqrt{15}}{2}E_1-\omega_6,\ [\omega_3,\omega_6]=\frac{1}{2}E_3+\omega_5,\ [\omega_3,\omega_7]=-\omega_4,$$

$$[\omega_4,\omega_5]=\omega_1,\ [\omega_4,\omega_6]=-2E_1+\omega_2,\ [\omega_4,\omega_7]=\omega_3,$$

$$[\omega_5,\omega_6]=\frac{\sqrt{15}}{2}E_2-\omega_3,\ [\omega_5,\omega_7]=-\frac{3}{2}E_1+\omega_2,\ [\omega_6,\omega_7]=-\frac{\sqrt{15}}{2}E_3-\omega_1.$$

Спроектируем скобки Ли на пространство V и результаты запишем в виде таблицы:

Проекции скобок Ли $[\omega_i,\omega_j]$ на векторное пространство V^7

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_1	0	ω_3	$-\omega_2$	$-\omega_5$	$-\omega_4$	$-\omega_7$	ω_6
ω_2	$-\omega_3$	0	ω_1	ω_6	ω_7	$-\omega_4$	ω_5
ω_3	ω_2	$-\omega_1$	0	ω_7	ω_6	$-\omega_5$	$-\omega_4$
ω_4	ω_5	$-\omega_6$	$-\omega_7$	0	$-\omega_1$	ω_2	ω_3
ω_5	ω_4	$-\omega_7$	$-\omega_6$	ω_1	0	ω_3	$-\omega_2$
ω_6	ω_7	ω_4	ω_5	$-\omega_2$	$-\omega_3$	0	$-\omega_1$
ω_7	$-\omega_6$	$-\omega_5$	ω_4	$-\omega_3$	ω_2	ω_1	0

Получаем, что операция $V\times V\to V$ для любых $A,B\in V$ определяет на семимерном пространстве V^7 векторное произведение. Рассмотрим кососимметричную 3-форму на векторном пространстве V^7:

$$\varphi(X,Y,Z)=\langle X,[Y,Z]\rangle.$$

В базисе $\omega_1,\ldots,\omega_7$ она имеет вид

$$\varphi=\omega^{123}+\omega^{145}-\omega^{167}+\omega^{246}+\omega^{257}+\omega^{347}-\omega^{356},$$

где $\omega^{ijk}=\omega^i\wedge\omega^j\wedge\omega^k$, ω^i – базис, дуальный к базису ω_i. Форма φ определяет так называемую, *ассоциативную калибровку* [3] пространства V^7. Дуальной к ней относительно оператора Ходжа (*) является форма

$$\psi=*\varphi=\omega^{4567}-\omega^{4523}-\omega^{4163}-\omega^{4127}+\omega^{2367}+\omega^{1357}+\omega^{1256},$$

которая задает *коассоциативную калибровку* [3] пространства V^7.

Продолжим эти две формы φ и ψ на все однородное пространство M^7 как инвариантные формы. Если $x=gH$, то

$$\varphi_x(X(x),Y(x),Z(x))=\varphi_o(dL_g^{-1}X(x),dL_g^{-1}Y(x),dL_g^{-1}Z(x)).$$

Это возможно вследствие биинвариантности скалярного произведения на SO(5) и Ad(SO(3))-инвариантности пространства V^7. Таким образом, мы получаем инвариантные ассоциативную и коассоциативную калибровки на однородном пространстве M^7.

Теорема 3. *Инвариантные формы* φ *и* ψ *на однородном пространстве* $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ *не являются параллельными. Их внешние дифференциалы имеют вид*

$$\mathrm{d}\varphi = -\omega^{1247} + \omega^{1256} + \omega^{1346} + \omega^{1357} + \omega^{2345} - \omega^{2367} - \omega^{4567},$$

$$\mathrm{d}\psi = 0.$$

Доказательство. Вычислим внешний дифференциал данных форм. Будем использовать обычную формулу [4, т. 1, с. 43]:

$$d\varphi(X_1,X_2,X_3,X_4) = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}X_i\varphi(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_4) +$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\varphi([X_i,X_j],X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_4)\,. \tag{2}$$

В качестве векторных полей X_i на M^7 возьмем киллинговы векторные поля, т.е. такие поля, которые получаются из правоинвариантных векторных полей на группе SO(5) при проекции $\mathrm{SO}(5) \to M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$. Вычисления будем проводить только в точке $o = [\mathrm{SO}(3)] \in M^7$.

Будем считать, что X_i – это киллингово векторное поле, соответствующее базисному элементу ω_i пространства $V = T_oM^7$. Оно соответствует правоинвариантному векторному полю на группе SO(5), $X_i(g) = d\pi(dR_g\omega_i)$. В этом случае их скобки Ли в точке $o = [\mathrm{SO}(3)]$ могут быть найдены по формуле $[X_i,X_j] = -\mathrm{d}\pi([\omega_i, \omega_j]) = -[\omega_i, \omega_j]_V$, что решает вопрос о вычислении второй суммы в формуле (2).

Вычислим первую сумму. Пусть g_t – однопараметрическая группа, порожденная полем W. Тогда, учитывая, что поля X,Y,Z – это проекции правоинвариантных векторных полей на SO(5), порожденных элементами X,Y,Z из V^7, получаем

$$W\varphi(X,Y,Z) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\varphi_{g_t}(X(g_t),Y(g_t),Z(g_t)) =$$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\varphi_e(d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}X(g_t), d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}Y(g_t), d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}Z(g_t)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\varphi_e(d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}dR_{g_t}X, d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}dR_{g_t}Y, d\pi\circ dL_{g_t}^{-1}dR_{g_t}Z) =$$

$$= -\varphi_e(d\pi([W,X]),Y,Z) - \varphi_e(X,d\pi([W,Y]),Z) -$$

$$\varphi_e(X,Y,d\pi([W,Z])) = -\varphi_e([W,X]_V,Y,Z) +$$

$$\varphi_e([W,Y]_V,X,Z) - \varphi_e([W,Z]_V,X,Y)$$

Учитывая, что $X_i = \omega_i$ в точке $o = [\mathrm{SO}(3)]$, первая сумма в формуле (4) имеет вид

$$X_i\varphi(X_j,X_k,X_s) - X_j\varphi(X_i,X_k,X_s) +$$

$$+X_k\varphi(X_i,X_j,X_s) - X_s\varphi(X_i,X_j,X_k) =$$

$$= -\varphi([\omega_i,\omega_j]_V,\omega_k,\omega_s) + \varphi([\omega_i,\omega_k]_V,\omega_j,\omega_s) -$$
$$-\varphi([\omega_i,\omega_s]_V,\omega_j,\omega_k) + \varphi([\omega_j,\omega_i]_V,\omega_k,\omega_s) -$$
$$-\varphi([\omega_j,\omega_k]_V,\omega_i,\omega_s) + \varphi([\omega_j,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_k) -$$
$$-\varphi([\omega_k,\omega_i]_V,\omega_j,\omega_s) + \varphi([\omega_k,\omega_j]_V,\omega_i,\omega_s) -$$
$$-\varphi([\omega_k,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_j) - +\varphi([\omega_s,\omega_i]_V,\omega_j,\omega_k) -$$
$$-\varphi([\omega_s,\omega_j]_V,\omega_i,\omega_k) + \varphi([\omega_s,\omega_k]_V,\omega_i,\omega_j) =$$
$$= -2\,\varphi([\omega_i,\omega_j]_V,\omega_k,\omega_s) + 2\varphi([\omega_i,\omega_k]_V,\omega_j,X_s) -$$
$$-2\,\varphi([\omega_i,\omega_s]_V,\omega_j,\omega_k) - 2\,\varphi([\omega_j,\omega_k]_V,\omega_i,\omega_s) +$$
$$+2\,\varphi([\omega_j,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_k) - 2\,\varphi([\omega_k,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_j)\,.$$

Вторую сумму в формуле (2) можно представить как

$$-\varphi([X_i,X_j],X_k,X_s) + \varphi([X_i,X_k],X_j,X_s) -$$
$$-\varphi([X_i,X_s],X_j,X_k) - \varphi([X_j,X_k],X_i,X_s) +$$
$$+\varphi([X_j,X_s],X_i,X_k) - \varphi([X_k,X_s],X_i,X_j).$$

Учитывая, что $X_i = \omega_i$ в точке $o = [\mathrm{SO}(3)]$ и $[X_i,X_j] = -\,d\pi([\omega_i,\ \omega_j]) = -[\omega_i,\ \omega_j]_V$, получаем

$$d\varphi(\omega_i,\omega_j,\omega_k,\omega_s) = -\varphi([\omega_i,\omega_j]_V,\omega_k,\omega_s) +$$
$$+\varphi([\omega_i,\omega_k]_V,\omega_j,\omega_s) - \varphi([\omega_i,\omega_s]_V,\omega_j,X_k) +$$
$$+\varphi([\omega_j,\omega_k]_V,\omega_i,\omega_s) - \varphi([\omega_j,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_k) +$$
$$+\varphi([\omega_k,\omega_s]_V,\omega_i,\omega_j).$$

Совершенно аналогично вычисляется внешний дифференциал формы $\psi = {*}\varphi$:

$$d\psi(\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5) = -\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\psi([\omega_i,\omega_j],\omega_1,\ldots,\hat{\omega}_i,\ldots,\hat{\omega}_j,\ldots\omega_5)\,.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$d\varphi = -\omega^{1247} + \omega^{1256} + \omega^{1346} + \omega^{1357} + \omega^{2345} - \omega^{2367} - \omega^{4567},\ \ d\psi = 0.$$

Теорема 4. *Однородное пространство* $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ *имеет положительную непостоянную секционную кривизну, является эйнштейновым, кривизны Риччи* $Ric = \dfrac{27}{2}$ *и имеет скалярную кривизну равную* $sc = \dfrac{189}{2}$.

Доказательство. Вычислим кривизну однородного пространства $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ по формулам [5, с. 214]:

$$(R(X,Y)Y,X) = \frac{1}{4}|[X,Y]_v|^2 + g([X,Y]_{\mathrm{so}(3)},[X,Y]_{\mathrm{so}(3)}),$$

$$Ric(X,X) = -\frac{1}{4}B(X,X) + \frac{1}{2}\sum_i g([X,\omega_i]_{\mathrm{so}(3)},[X,\omega_i]_{\mathrm{so}(3)})\,,$$

$$sc = \sum_i Ric(\omega_i,\omega_i)\,,$$

где $$B(X,X) = -\sum_i ([X,\omega_i]_{\mathrm{so}(5)},[X,\omega_i]_{\mathrm{so}(5)}) - \sum_j ([X,E_j]_{\mathrm{so}(5)},[X,E_j]_{\mathrm{so}(5)})\,),$$

$g(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение на алгебре so(5) и $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение на V, $X,Y \in V$. Положительность секционной кривизны очевидно следует из первой формулы. Прямые вычисления в системе Maple показывают, что секционная кривизна на площадках, образованных базисными векторами принимает значения от $\frac{1}{4}$ до $\frac{17}{4}$:

$$K_{15} = K_{24} = K_{26} = K_{37} = K_{45} = K_{47} = \frac{1}{4},$$

$$K_{13} = K_{16} = K_{36} = \frac{1}{2},\ K_{25} = K_{27} = K_{57} = \frac{5}{2},$$

$$K_{12} = K_{17} = K_{23} = K_{25} = K_{56} = K_{67} = 4,$$

$$K_{14} = K_{34} = K_{37} = \frac{17}{4}.$$

Тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, $Ric = \frac{27}{2}g$. Скалярная кривизна, $sc = \frac{189}{2}$.

Рассмотрим еще одну инвариантную риманову метрику на пространстве $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$. Тензор T определяет [1] эндоморфизм пространства so(5) по формуле $\widehat{T}(W)^{ik} = 4T_{ijm}T_{klm}W^{jl}$. Это позволяет определить на so(5) еще одно инвариантное скалярное произведение по формуле [1]

$$(W,W') = *(\widehat{T}(W) \wedge *W'),$$

где * – оператор Ходжа. Это скалярное произведение сохраняет ортогональность разложения $\mathrm{so}(5) = \mathrm{so}(3) + V$ и имеет сигнатуру (3,7). В выбранном базисе оно имеет вид: $(E_i, E_j) = -7\delta_{ij}$, $(\omega_i, \omega_j) = 8\delta_{ij}$. Получается метрика g_2 на пространстве $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$, пропорциональная рассмотренной выше метрике g.

Теорема 5. *Однородное пространство* $M^7 = \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ *с инвариантной римановой структурой* g_2 *имеет положительную непостоянную секционную кривизну и является эйнштейновым.*

Для примера деформации структурного тензора T рассмотрим однопараметрическую подгруппу, соответствующую ω_1:

$$g_x = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}x & -\sin\sqrt{5}x & 0 & 0 & 0 \\ \sin\sqrt{5}x & \cos\sqrt{5}x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что g_x является геодезической на однородном пространстве. Подействуем геодезической g_x на структурный тензор

$$(g_x T)_{ijk} = T_{prs} g_i^p g_j^r g_k^s.$$

Получим ненулевые компоненты деформированного тензора

$$(g_x t)_{111} = -\cos\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x - 3),$$

$$(g_x t)_{112} = \sin\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x - 1),$$

$$(g_x t)_{122} = \cos\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x - 3),$$

$$(g_x t)_{222} = -\sin\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x - 1),$$

$$(g_x t)_{133} = -\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{135} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{144} = \cos\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{155} = -\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{222} = -\sin\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x - 1),$$

$$(g_x t)_{233} = \frac{1}{2}\sin\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{244} = -\sin\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{255} = \frac{1}{2}\sin\sqrt{5}x,$$

$$(g_x t)_{334} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ (g_x t)_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим, как влияет деформация на такие характеристики структурного тензора, как ковариантная дивергенция и свойство приближенной интегрируемости.

Определение 2 [1]. Неприводимая SO(3)-структура на многообразии M называется приближенно интегрируемой, если $(\nabla_X T)(X,X,X) = 0$ для любого векторного поля X на M.

Теорема 6 [6]. *Если* SO(3)-*структура T приблизительно интегрируемая*, *то ковариантная дивергенция тензора T равна нулю*, $\delta T = 0$. *Обратно не верно*.

Пример 1. Алгебра Ли $so(3)\times_\rho \mathbf{R}^2$ задается следующими коммутационными соотношениями: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_3,e_1] = e_2$. Обе структуры являются приблизительно интегрируемыми.

Пример 2. Алгебра $\mathbf{g}_{5,1}$ [7] задается следующими коммутационными соотношениями $[e_2,e_4]=e_1$, $[e_3,e_5]=e_1$. Ковариантная дивергенция тензора T будет равна 0. Данная SO(3)-структура не является приблизительно интегрируемой. Выпишем ненулевые компоненты ковариантной дивергенции деформированного тензора

$$\delta(g_xT)_{14}=\delta(g_xT)_{41}=-\sin\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x-1),$$

$$\delta(g_xT)_{24}=\delta(g_xT)_{42}=\cos\sqrt{5}x-\cos\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x-3),$$

$$\delta(g_xT)_{33}=-\delta(g_xT)_{55}=\sqrt{3}\sin\sqrt{5}x.$$

По теореме 3 эта структура не является приблизительно интегрируемой.

Пример 3. Алгебра Ли aff($\mathbf{R}$)$\times_\rho$so(3) задается следующими коммутационными соотношениями: $[e_1,e_2]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_5$, $[e_3,e_5]=-e_4$, $[e_4,e_5]=e_3$. Ковариантные дивергенции тензоров T и g_xT соответственно равны

$$\delta T=\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\delta(g_xT)_{11}=-\delta(g_xT)_{22}=-3\cos\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x-3),$$

$$\delta(g_xT)_{12}=\delta(g_xT)_{21}=-3\sin\sqrt{5}x(4\cos^2\sqrt{5}x-1),$$

$$\delta(g_xT)_{33}=\delta(g_xT)_{55}=\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}x,$$

$$\delta(g_xT)_{35}=\delta(g_xT)_{53}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{5}x,$$

$$\delta(g_xT)_{55}=\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}x.$$

Аналогично, можно рассмотреть деформации другими геодезическими пространства SO(5)/SO(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bobienski M.M.*, *Nurowski P.* Irreducible SO(3) geometry in dimension five // J. Reine Angew. Math. 2007. Vol. 605. P. 51–93.
2. *Goette S.*, *Kitchloo N.*, *Shankar K.* Diffeomorphism type of the Berger space SO(5)/SO(3) // arXiv: math.DG/ 06001066, v1, 2006.
3. *Harvey R.*, *Lawson H.* Calibrated geometries. // Acta Math. 1982. No. 148. P. 47–157.
4. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981.
5. *Берестовский В.Н.*, *Никоноров Ю.Г.* Римановы многообразия и однородные геодезические. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2011. 400 с.
6. *Седых А.Г.* О приближенно интегрируемых SO(3)-структурах на 5-мерных многообразиях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23).
7. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv: math.DG/0403555, v2, 2004.

Статья поступила 14.11.2014 г.

Sedykh A.G., Berezina A.S. HOMOGENEOUS BERGER SPACE AND DEFORMATIONS OF THE SO(3)-STRUCTURE BY ITS GEODESIC ON 5-DIMENSION LIE GROUPS

An irreducible SO(3)-structure can be defined by means of a symmetric tensor field T of type (0,3) on a manifold M.

Definition 1. *An* $SO(3)$ *structure on a* 5*-dimensional Riemannian manifold* (M, g) *is a structure defined by means of a rank* 3 *tensor field T for which the associated linear map* $X \to T_X \in End(TM)$, $X \in TM$, *satisfies the following condition:*

(1) *symmetricity, i. e.* $g(X,T_YZ) = g(Z,T_YX) = g(X,T_ZY)$,

(2) *the trace* $tr(T_X) = 0$,

(3) *for any vector field* $X \in TM$,

$$T_X^2 X = g(X,X)X.$$

In any tangent space, it is possible to choose an adapted basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ in which metrics g and tensor T have the canonical form $g_{ij} = \delta_{ij}$ and

$$T = \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^2)^2 - 3(e^5)^2) +$$

$$+\frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5 .$$

Her, $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ is the dual coframe. Polarising the expression yields components of T:

$$t_{111} = -1,\ t_{122} = 1,\ t_{144} = 1,\ t_{133} = -\frac{1}{2},\ t_{155} = -\frac{1}{2},$$

$$t_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Thus, an irreducible SO(3)-structure on a manifold is a Riemannian structure g and a tensor field T possessing properties (1) – (3).

Theorem 1. *The stabilizer of* T_{ijk} *is an irreducible* $SO(3)$ *embedded into* $O(5)$.

Since the stabilizer T_{ijk} is an irreducible SO(3), its orbit under the action of O(5) is a 7-dimension homogeneous space O(5)/SO(3).

A homogeneous Berger space M^7 = SO(5)/SO(3) is topologically equivalent to an S^3 fiber bundle over S^4.

With respect to the biinvariant scalar product $\langle A,B\rangle = -\frac{1}{10}tr(AB)$ on SO(5), a decomposition of the Lie algebra so(5) into a direct sum so(5) = so(3) + V of the Lie algebra and ad(SO(3)) of an invariant space V has been obtained.

Examples of deformations of the structural tensor T by geodesics g_t of the homogeneous space SO(5)/SO(3) are considered, the covariant divergence of the obtained structure tensor is calculated, and the property of nearly integrability is investigated.

Keywords: special SO(3) structure, homogeneous Berger space, Lie group.

Sedykh Anna Gennadyevna (M.Sc., Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: Sedykh-anna@mail.ru

Berezina Anna Sergeevna (M.Sc., Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: Berezina_1979@mail.ru

REFERENCES

1. Bobienski M.M., Nurowski P. Irreducible SO(3) geometry in dimension five. *J. Reine Angew. Math*., 2007, vol. 605, pp. 51–93.
2. Goette S., Kitchloo N., Shankar K. Diffeomorphism type of the Berger space SO(5)/SO(3). *arXiv: math.DG/06001066*, v1, 2006.
3. Harvey R., Lawson H. Calibrated geometries. *Acta Math*., 1982, no. 148, pp. 47–157.
4. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii*: v 2 t. Moskow, Nauka Publ., 1981. (in Russian)
5. Berestovskiy V.N., Nikonorov Yu.G. *Rimanovy mnogoobraziya i odnorodnye geodezicheskie*. Vladikavkaz, VNTs RAN Publ., 2011. 400 p. (in Russian)
6. Sedykh A.G. O priblizhenno integriruemykh SO(3)-strukturakh na 5-mernykh mnogoobra–ziyakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 3(23). (in Russian)
7. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups. *arXiv: math.DG/0403555*, v2, 2004.