

МЕХАНИКА

УДК 532.546

А.М. Бубенчиков, В.Б. Цыренова, С.Г. Цыдыпов

ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗО-ЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ
В ПЛОСКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

При описании двухфазных фильтрационных течений, наряду с проблемами построения модели физического процесса, существуют сложности вычислительного характера, связанные с проявлением разномасштабности процессов фильтрации фаз. В работе представлена универсальная вычислительная технология, реализующая математическую модель Van Genuchten'a. Дан пример двухфазной фильтрации в плоской области.

Ключевые слова: пористый объем, анизотропная среда, двухфазная фильтрация, влагонасыщенность, капиллярное давление, итерационно-разностная технология.

Проблемы охраны окружающей среды выдвигают в качестве важнейшей задачу исследования миграции загрязнённой солесодержащей воды (флюида) в угольных пластах. Так как угольные пласты являются, как правило, неоднородными и имеют трещиноватую структуру, то требуются новые численные модели, позволяющие учитывать неоднородность и анизотропию пористого скелета, а также пространственный характер движения двухфазной среды в пласте.

Теория двухфазной фильтрации базируется на обобщенном законе Дарси, справедливом для медленной стационарной фильтрации несмешивающихся сред. Согласно обобщенному закону Дарси, неподвижная пористая среда и одна из подвижных фаз рассматриваются как некая фиктивная пористая среда, в которой происходит фильтрация другой фазы. Такая схематизация предполагает, что при медленном стационарном течении формируется равновесное распределение фаз, которое в процессе двухфазной фильтрации сохраняется статистически постоянным. В процессе двухфазной фильтрации формируется фиктивная пористость, состоящая из активных, соединяющихся между собой пор, образующих каналы, по которым происходит движение фаз из застойных зон, где фазы неподвижны, или находятся в состоянии медленного циркуляционного движения. Смачивающая и несмачивающая фазы движутся каждая по своей системе каналов. Движение каждой из фаз происходит под действием своего фазового давления, а проницаемость фиктивной пористой среды определяется своей фазовой проницаемостью.

Эти результаты позволяют распространить теорию двухфазной фильтрации на течения в анизотропных средах и указать метод проведения и интерпретации экспериментов для определения коэффициентов в тензорных связях.

В настоящей работе используется математическая модель двухфазной фильтрации в пористых пластах, сформулированная на основе анализа работ [1–4]:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{K k_r^G}{\mu^G} \rho^G (\vec{\nabla} p^G - \rho^G \vec{g}) \right) = q^G; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{K k_r^F}{\mu^F} \rho^F (\vec{\nabla} p^F - \rho^F \vec{g}) \right) = q^F; \quad (2)$$

$\rho^G = \rho^G(p^G) = \rho^{G,0} \frac{p^G}{p^0}$, p^0 – атмосферное давление;

$m = \frac{V_n}{V}$ – пористость (V_n – объем пор, V – общий объем);

s – эффективная влагонасыщенность (в принципе меняется от 0 до 1);

K – тензор проницаемости, в общем случае полно заполненный;

$k_r^G = \sqrt{1-s}(1-s^2)$ – относительная проницаемость для газовой фазы;

μ^G – вязкость газа; q^G – источниковый член в балансе газовой фазы;

q^F – источниковый член в балансе жидкости;

$\rho^F = \rho^{F,0} \frac{p^F}{p^0}$, $\rho^{F,0}$ – плотность флюида при атмосферном давлении;

$k_r^F = \sqrt{s}(1-\sqrt{1-s^2})^2$ – относительная проницаемость для жидкой фазы;

μ^F – вязкость флюида;

$p^F = p^G - p^c(s)$; $p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}$ – капиллярное давление; p^d – пороговое

давление, причем $p^d = \frac{\rho^F g}{\alpha}$, где α – параметр, характеризующий пористую среду.

Плоская задача изотропной фильтрации

Примем, что источники отсутствуют, то есть $q^G = q^F = 0$. Будем решать плоскую задачу, в этом случае $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$, $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. Кроме того, примем, что движение происходит в горизонтальном направлении: $(\vec{g})_x = 0$, $(\vec{g})_y = 0$.

В этом случае уравнения (1), (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^G}{\mu^G} \rho^G \left(\frac{\partial p^G}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K k_r^G}{\mu^G} \rho^G \left(\frac{\partial p^G}{\partial y} \right) \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^F}{\mu^F} \rho^F \left(\frac{\partial p^F}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K k_r^F}{\mu^F} \rho^F \left(\frac{\partial p^F}{\partial y} \right) \right). \quad (4)$$

Здесь K – коэффициент проницаемости, в настоящих расчетах скалярная характеристика.

В уравнениях (3), (4) перейдем к давлениям p^G, p^F . Для этого заменим ρ^G и ρ^F , входящие в левые части этих уравнений, по следующим формулам:

$$\rho^G = \frac{\rho^{G,0}}{p^0} p^G, \quad \rho^F = \frac{\rho^{F,0}}{p^0} p^F. \quad (5)$$

В результате получим два уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial p^G \alpha^G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial y} \right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial p^F \alpha^F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^F \frac{\partial p^F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta^F \frac{\partial p^F}{\partial y} \right); \quad (7)$$

$$\alpha^G = m(1-s) \frac{\rho^{G,0}}{p^0}, \quad \alpha^F = ms \frac{\rho^{F,0}}{p^0}, \quad \beta^G = K \frac{\rho^{G,0}}{p^0} \frac{k_r^G}{\mu^G} p^G, \quad \beta^F = K \frac{\rho^{F,0}}{p^0} \frac{k_r^F}{\mu^F} p^F; \quad (8)$$

p^0 – атмосферное давление; $\rho^{G,0}$ – плотность газа при атмосферном давлении; $\rho^{F,0}$ – плотность жидкости при атмосферном давлении.

Итерационно-разностный алгоритм

Вернемся теперь к уравнениям (6), (7). Решение этой системы разберем на примере уравнения (6):

$$\frac{\partial p^G \alpha^G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Из зависимости β^G от p^G (см. (8)) уравнение (9) является нелинейным, поэтому решение его будет строиться с использованием итерационного подхода. Предварительно строим полностью неявную разностную схему для уравнения (9), которая, по опыту решения задач теплопроводности и диффузии, должна быть абсолютно устойчивой.

Аппроксимируя пространственные производные простейшими разностями на неравномерной сетке, а производную по времени разностями назад, найдем

$$a_e p_{j-1,k}^G + a_w p_{j+1,k}^G - a_p p_{j,k}^G + a_s p_{j,k-1}^G + a_n p_{j,k+1}^G + b = 0, \quad (10)$$

где

$$a_e = \frac{2\beta_{j-\frac{1}{2},k}^G}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}; \quad a_w = \frac{2\beta_{j+\frac{1}{2},k}^G}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)}; \quad (11)$$

$$a_s = \frac{2\beta_{j,k-\frac{1}{2}}^G}{(y_{k+1} - y_{k-1})(y_k - y_{k-1})}; \quad a_n = \frac{2\beta_{j,k+\frac{1}{2}}^G}{(y_{k+1} - y_{k-1})(y_{k+1} - y_k)}; \quad (12)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n + \frac{\alpha_{j,k}^G}{\Delta t}; \quad b = \frac{(\alpha_{j,k}^G)^{n-1} (p_{j,k}^G)^{n-1}}{\Delta t}. \quad (13)$$

Значения диффузионного коэффициента β в дробной точке определяются как полусумма значений в целых точках, например

$$\beta_{j,k-\frac{1}{2}}^G = \frac{\beta_{j,k}^G + \beta_{j,k-1}^G}{2}.$$

Коэффициенты в этом разностном уравнении определены на новом слое по времени, но с использованием значений на предыдущей итерации.

Выражая из (10) p_j^G , найдем

$$p_{j,k}^G = \frac{a_e p_{j-1,k}^G + a_w p_{j+1,k}^G + a_s p_{j,k-1}^G + a_n p_{j,k+1}^G + b}{a_p}. \quad (14)$$

Заметим, что при вычислении источника b необходимо помнить значения величин на предыдущем слое по времени (в формулах (13) эти величины обозначены индексом $n-1$ сверху).

Расчет с использованием итерационно-разностной технология (ИРТ) выполняется следующим образом:

1. Задаем начальные распределения давлений (газовой и жидкой фаз) по всей области.

2. С помощью граничных условий вычисляем значения плотностей на концах трубы на новом слое по времени.

3. Используя (14), последовательно перевычисляем давления во внутренних узлах расчетной области. Когда перебор точек по индексам j и k закончен, считаем одну глобальную итерацию завершенной.

4. Делаем порядка $M = N \cdot K$ глобальных итераций. Здесь N, K – количества шагов по отдельным координатным направлениям. После этого считается законченным расчет на очередном слое по времени.

5. Далее осуществляется переход к новому слою по времени, то есть возвращаемся к пункту 2.

С помощью (11) – (14) можно решать все плоские задачи двухфазной фильтрации в однородных анизотропных пластах.

Тестирование алгоритма

С использованием описанной математической модели были решены различные тестовые задачи, в частности одномерная задача.

Вычисления проводились при следующих значениях определяющих параметров:

$$\begin{aligned} \rho^F &= 1000 \text{ кг/м}^3; \rho^{G,0} = 1,27 \text{ кг/м}^3; \\ K &= 9,869233 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \\ \mu^F &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Па}\cdot\text{с}; \mu^G = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}. \end{aligned}$$

Было рассмотрено движение газо-жидкостной среды в трубе, заполненной пористым материалом, в частности песком ($m = 0,4$).

В стационарном случае постоянной насыщенности уравнение для давления газа принимает вид уравнения Лапласа для квадрата давления, решение которого легко находится аналитически. Получено, что расчетные распределения практически совпадают с аналитическим решением, что говорит о корректности применения рассматриваемого численного метода для решения данных уравнений.

Результаты вычислений

При указанных выше параметрах проводился численный эксперимент, отслеживающий динамику развития течения в плоской области, заполненной пористым изотропным материалом. Была рассмотрена прямоугольная изолированная область с двумя окнами проницаемости. Линейный размер окна составляет 20 % от линейного размера самой области. Рассчитаны давления флюида и газа, а также распределение насыщенности флюидом пористого пространства с течением времени. Полученные результаты позволяют анализировать характер заполнения пористого пространства и распределения в нем влагонасыщенности, скоростей и давлений фаз.

Поскольку в представленном примере в левом окне давление газа и флюида было выше, то левое окно мы называли входом, а нижнее выходом. При этом в расчетах принято

$$p_{\text{вх}}^G = 10^5 \text{ Па}, \quad p_{\text{вх}}^F = 6,9 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

$$p_{\text{вых}}^G = 9 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad p_{\text{вых}}^F = 5 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Из-за разности плотностей фаз почти на три порядка заполнение пространства газовой фазой происходит существенно быстрее, а флюидом медленнее. Начальные распределения давлений были равны величинам этих давлений на выходе.

Задача решалась как эволюционная с итерациями на каждом шаге по времени. Как видно из рис. 1, к моменту времени $t = 10^6$ с распределение давления газа становится симметричным, что при симметричном расположении окон проницаемости говорит о правильности работы вычислительной программы.

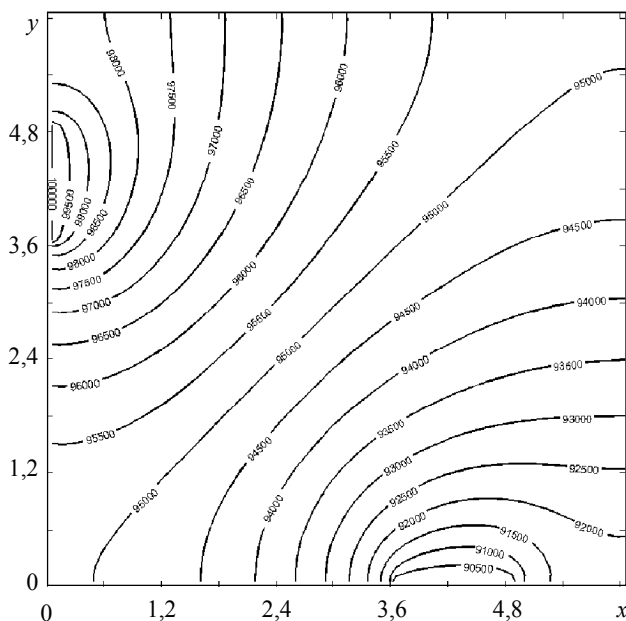


Рис. 1. Распространение давления газа в плоской области с двумя окнами проницаемости

Рис. 2 и 3 определяют жидкую фазу, которая распространяется по плоской области существенно медленнее, нежели газ. Поэтому установление стационарных и симметричных распределений требует более продолжительных расчетов. В случае, если вся область является проницаемой для газа, эти расчеты могут быть выполнены при заданном, уже рассчитанном на начальном этапе поля давлений в газе.

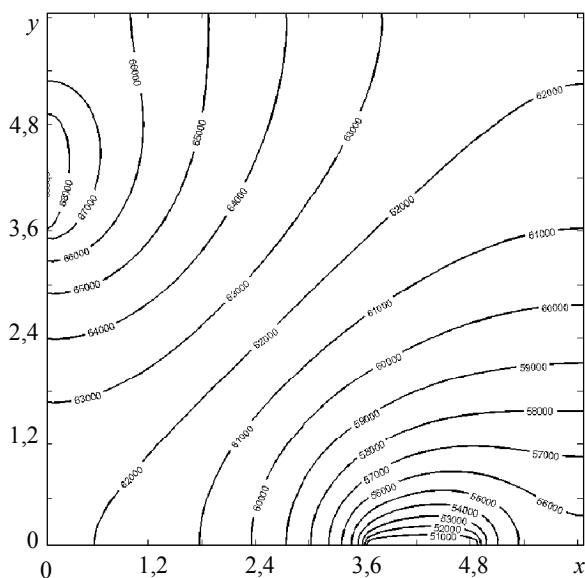


Рис. 2. Распространение давления флюида в плоской области с двумя окнами проницаемости

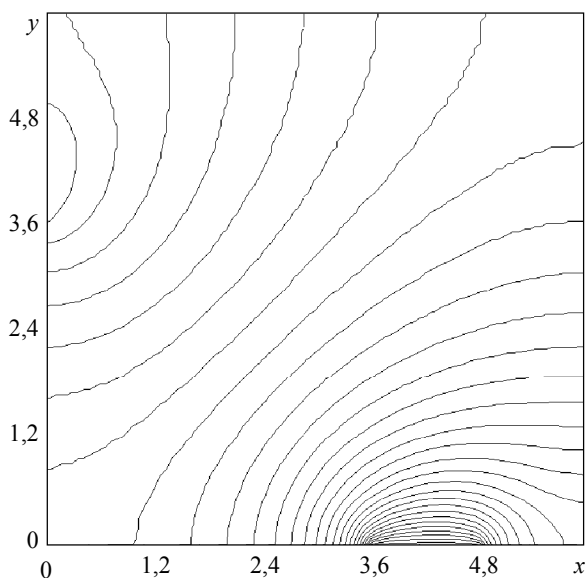


Рис. 3. Распределение влагонасыщенности в плоском горизонтальном пласте

ЛИТЕРАТУРА

1. Shikuo C. Displacement mechanism of the two-phase flow model for water and gas based on adsorption and desorption in coal seams / Chen Shikuo, Yang Tianhong, Wei Chenhui // *Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications*, Chengdu City, CHINA. 2010. P. 597–603.
2. Van Genuchten M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils / M. Th. van Genuchten // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. Vol. 44. P. 892–898.
3. Schaap M.G. A modified Mualem–van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation / M.G. Schaap, M.Th. van Genuchten // *Vadose Zone J.* 2006. Vol. 5. P. 27–34.
4. Никитин К.Д. Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2010. 105 с.

Статья поступила 18.07.2014 г.

Bubenchikov A.M., Tsyrenova V.B., Tsydyrov S.G. FILTRATION OF A GAS-LIQUID MEDIUM IN A PLANE HORIZONTAL REGION

In describing two-phase filtration flows, along with problems of constructing a model of a physical process, there are difficulties of the computational character as well, which are associated with the manifestation of different-scale filtration processes of phases. The paper presents a universal computing technology that implements the van Genuchten mathematical model. An example of two-phase filtration in a plane region is presented.

Keywords: porous volume; anisotropic medium; two-phase filtration; moisture saturation; capillary pressure; iterative-difference technique.

BUBENCHIKOV Alexey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: alexy121@mail.ru

TSYRENOVA Valentina Babasanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Prof.,
Buryat State university, Ulan-Ude, Russian Federation)
E-mail: v.ts@mail.ru

TSYDYPOV Sevan Guro-Tsyrenovich (Buryat State university, Ulan-Ude, Russian Federation)
E-mail: sivan77@mail.ru

REFERENCES

1. Shikuo C., Tianhong Y., Chenhui W. Displacement mechanism of the two-phase flow model for water and gas based on adsorption and desorption in coal seams. *Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications*, Chengdu City, CHINA, 2010, pp. 597–603.
2. Van Genuchten M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980, vol. 44, pp. 892–898.
3. Schaap M.G., Van Genuchten M.Th. A modified Mualem–van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation. *Vadose Zone J.*, 2006, vol. 5, pp. 27–34.
4. Nikitin K.D. *Metod konechnykh ob"emov dlya zadachi konveksii-diffuzii i modeley dvukhfaznykh techeniy*. Dis. kand. fiz.-mat. nauk. Moscow, 2010. 105 p. (in Russian)