

УДК 1: 001; 001.8

В.А. Суровцев, К.А. Габрусенко

КРИТИКА Ф.П. РАМСЕЕМ ФОРМАЛИЗМА И ИНТУИЦИОНИЗМА В ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ*

Рассматривается позиция Ф.П. Рамсея относительно программ формализма и интуиционизма в основаниях математики. Анализируются его критические аргументы против соответствующих трактовок общих и экзистенциальных утверждений. Рассматривается критика формалистской трактовки математики как простого преобразования символов согласно заданным синтаксическим правилам и интуиционистского подхода к математическому рассуждению, требующему отказа от некоторых фундаментальных принципов классической логики.

Ключевые слова: *Ф.П. Рамсей, формализм, интуиционизм, общие и экзистенциальные утверждения, законы логики.*

В работе «Основания математики» (1925 г.) Ф.П. Рамсей, причисляя себя к сторонникам логицизма, писал: «Предмет данной статьи – дать удовлетворительное рассмотрение оснований математики в соответствии с общим методом Фреге, Уайтхеда и Рассела. Следуя этим авторам, я считаю, что математика является частью логики, и, таким образом, принадлежу школе, которую можно назвать логической в противоположность школам формалистской и интуиционистской» [1. С. 16]. Используя новации в истолковании предложений логики и смысла логических констант, предложенные Л. Витгенштейном в «Логико-философском трактате» [2], Рамсею удаётся модернизировать логицизм, дав иное истолкование некоторым спорным допущениям, принимаемым в его рамках (в частности, он даёт новую интерпретацию аксиомам сводимости, бесконечности и мультипликативности). В этом отношении разработанную Рамсеем теорию можно считать кульминацией программы логицизма. Однако не меньший интерес вызывают резоны Рамсея, заставляющие его отказаться от других программ обоснования математики. Ниже будут рассмотрены и проанализированы аргументы Рамсея, касающиеся этого вопроса.

В «Основаниях математики» Рамсей отвергает интуиционизм Брауэра и Вейля и формализм Д. Гилберта в основном по двум причинам: во-первых, они не соответствуют действительному состоянию математики; во-вторых, они не соответствуют практике применения математики.

Первое касается интуиционизма. Поскольку интуиционисты отказываются от некоторых плодотворных принципов классической логики, таких как закон исключённого третьего и связанных с ним принципов доказательства, например доказательства от противного, многое из того, что принимается в современной математике, оказывается за бортом. Как считает Рамсей, для

* Статья подготовлена при поддержке РФФИ, проект 12-06-00078-а и в рамках выполнения проекта государственного задания Томского государственного университета «Прикладная гуманитаристика: актуализация практически ориентированных подходов в исследовании культуры», код проекта 2111.

этого нет достаточной причины, кроме предубеждений самих интуиционистов, которые претендуют на обоснованность области, гораздо более узкой, чем современная математика. Причём эта область к тому же не вполне ясно определена.

Второе относится к формалистскому направлению. Гилберт и его последователи предпочитают концентрироваться на утверждениях математики, рассматривая математические понятия, из которых они состоят, в качестве лишённых смысла значков на бумаге. В этом отношении математические утверждения рассматриваются как последовательности значков, с которыми по определённым правилам разыгрывается некоторая игра. Согласно этим правилам из одних последовательностей значков выводятся другие последовательности значков. На эту точку зрения Рамсей выдвигает единственный, но убедительный аргумент. Если, например, '2' есть лишённый смысла значок на бумаге, то каким образом математические понятия могут применяться в повседневной жизни? Ведь в утверждении, что «До станции осталось 2 мили», 2 определённо не является лишённым смысла значком.

Эту аргументацию Рамсей развивает в статье «Математическая логика» [3]. Относительно интуиционизма Брауэра он утверждает, что тот, по видимому, отказывается от закона исключённого третьего ввиду невозможности его обосновать ни *a priori*, ни *a posteriori*. Действительно, у нас нет априорных оснований утверждать, что высказывание *p* является истинным или ложным, без того, чтобы утверждать, что либо *p* – истинно, либо *p* – ложно, но, установив одну из этих альтернатив, нам уже нет необходимости утверждать истинность «*p* или не-*p*». Например, Брауэр отказался бы утверждать истинность высказывания «Дождь идёт или дождь не идёт» без того, чтобы выглянуть на улицу. Но как только мы установили истинность или ложность высказывания «Дождь идёт», ненужность предыдущего высказывания становится очевидной. То же самое касается возможности доказательства. Например, относительно числа $2\sqrt{2}$ мы не можем доказать ни его рациональность, ни его иррациональность, поскольку мы не можем привести

такие *m* и *n*, чтобы $\frac{m}{n} = 2\sqrt{2}$, но мы не можем доказать и то, что такие *m* и *n*

не существуют. Для Брауэра это свидетельствует о бессмысленности утверждения «Число $2\sqrt{2}$ либо рационально, либо иррационально». Но, как считает Рамсей, проблема не решается указанием на то, что число $2\sqrt{2}$ не является ни рациональным, ни иррациональным, поскольку это не даёт нам никакого знания об этом числе.

Относительно закона исключённого третьего Рамсей утверждает: «Хотя очевидно, что затруднительно дать философское объяснение нашему знанию этого закона логики, я не могу убедить себя в том, что с достоверностью не знаю об истинности закона исключённого третьего» [3. С. 91]. Здесь, ссылаясь на Аристотеля, он приводит следующий аргумент. Даже если считать, что наряду с истинными и ложными высказываниями есть ещё какие-то, скажем, сомнительные высказывания, то вполне можно задать вопрос о том, является ли данное высказывание сомнительным или же нет. Сомнения относительно

истинности или ложности ответа на данный вопрос порождают следующий вопрос о сомнительности или несомненности данного ответа и т.д., до бесконечности. Подобная бесконечность свидетельствует в пользу того, что сомнения в обоснованности закона исключённого третьего столь же не обоснованы, как и сам этот закон. Таким образом, даже если в пользу закона исключённого третьего и нет достаточных априорных оснований, то их также нет и против него. Если же учесть, что «Брауэр неспособен оправдать многое из обычной математики» [3. С. 92], то проще принять закон исключённого третьего, нежели от него отказаться.

Сомнения, касающиеся формалистского направления Д. Гилберта, относятся в основном к пониманию того, с чем имеет дело реально работающий математик. С точки зрения формалистов, математика разыгрывает некоторую игру с символами, записанными на бумаге. При этом некоторые последовательности символов рассматриваются в качестве исходных утверждений, или аксиом, из которых посредством фиксированных правил преобразования (иначе, правил вывода) выводятся новые последовательности символов. При этом правила преобразования рассматриваются как достаточные условия получения того, что заложено в исходных утверждениях. Таким образом, с точки зрения Рамсея, формалистское направление Гилберта сводится к выполнению двух следующих действий: Во-первых, необходимо задать, какие последовательности символов являются исходными; во-вторых, необходимо задать правила, посредством которых из исходных последовательностей символов можно получать новые последовательности символов.

Подобные преобразования не выходят за рамки операций со значками, написанными на бумаге. Разыгрываемая игра, по сути дела, представляет собой то, что мы, согласно принятым правилам, можем получить, преобразуя одни последовательности значков в другие. Критерий преобразования значков выводится в этом случае за рамки самой математики в область так называемой метаматематики, которая определяет, какие преобразования приемлемы. Именно метаматематика решает, что та или иная последовательность символов может интерпретироваться как допустимое математическое утверждение. Таким образом, с точки зрения Гилберта, работа математика должна заключаться, во-первых, в том, что он принимает некоторые последовательности символов в качестве исходных утверждений (или аксиом), во-вторых, в том, что он принимает определённые правила преобразования, посредством которых из аксиом можно получать следствия. Работа же метаматематика сводится к тому, чтобы установить, какие аксиомы и правила преобразования допустимы. Здесь главным и, пожалуй, единственным критерием выступает требование непротиворечивости всех возможных построений новых последовательностей символов из исходных последовательностей символов, согласно правилам преобразования, что сводится к невозможности построения символа определённого вида.

Другими словами, если при принятых исходных последовательностях символов и при принятых правилах преобразования исходных последовательностей в новые мы не можем получить символ определённого вида, то математическое доказательство является вполне обоснованным. В метамате-

матике основное значение приобретает доказательство непротиворечивости, т.е. доказательство невозможности построения символа определённого вида, например $0 \neq 0$. Но остаются вопросы: На каких основаниях последовательности символов определённого вида принимаются за аксиомы и почему некоторые последовательности символов считаются недопустимыми? Как утверждает Рамсей, «что бы ни делал математик, он определённо оставляет значки на бумаге, и поэтому эта точка зрения безусловно истина; но трудно предположить, что в этом вся истина. Должна быть некоторая причина для выбора аксиом и какая-то причина, по которой особый значок $0 \neq 0$ рассматривается с таким предубеждением» [3. С. 95].

Ответ заключается в том, что аксиомы и правила игры со значками задаются именно таким образом, чтобы получить противоречие было невозможно. Это достигается именно тем, что рассматриваются исключительно значки на бумаге, которые конечны и обозримы. Усомниться можно в значении математических понятий, используемых в реальной работе математика и в повседневной жизни. Но если принять точку зрения формализма, то усомниться в использовании значков нельзя, поскольку значки на бумаге осязаемы и перечислимы. Однако, как считает Рамсей, «приняв всё это за само собой разумеющееся, всё ещё необходимо спросить, какое предназначение или достоинство заключается в той игре, которую разыгрывают математики, если это действительно игра, а не форма знания. Единственный ответ, который даётся, состоит в том, что некоторые формулы математиков имеют значение или же им можно было бы его придать и что, если эти формулы могут быть доказаны в символической системе, их значение будет истинным» [3. С. 96].

Действительно, в повседневной жизни используются не значки на бумаге, а реальное содержание понятий. Например, если у меня есть две собаки и две кошки, я могу сделать вывод, что у меня четыре домашних животных. И здесь ' $2 + 2 = 4$ ' используется отнюдь не как символическое соглашение, имеющее значение только в рамках определённой игры со значками. Оно указывает на действительное соотношение предметов.

В рукописи, озаглавленной «Формализм», Рамсей более определённо выказывает сомнение в формализме применительно к поставленной перед собой задаче улучшить программу логицизма: «Главная цель метаматематики заключается в том, чтобы доказать, что заданное множество аксиом не может породить противоречие. Математический прогресс состоит: (1) в выведении новых формул из аксиом; (2) в добавлении новых аксиом и доказательстве того, что противоречие не возникает. Поэтому формализм не имеет общего очевидного преимущества в отношении достоверности. Здесь выдвигаемые преимущества связаны с 3 аксиомами: (1) сводимости; (2) мультипликативности; (3) бесконечности, в которых мы не можем быть уверены и в отношении которых было бы интересно получить доказательство, не предполагая, что они не могут привести к противоречию. Такое доказательство могло бы быть задано независимостью значения, но оно не даёт нам аргумента в пользу формализма» [4. С. 184]. Таким образом, Рамсей считает, что доказательство того, что присоединение дополнительных аксиом к исходной системе не приводит к противоречию, конечно, имеет значение, но для их понимания необ-

ходимо дополнительное обоснование, выходящее за рамки символических преобразований.

Но всё-таки в большей степени возражения Рамсея против интуиционизма и формализма касаются не столько самих их программ обоснования математики, сколько понимания общих и экзистенциальных утверждений.

В рамках интуиционизма основные претензии Рамсея касаются Г. Вейля, который, в отличие от Брауэра, исповедует ‘умеренный’ интуиционизм, не отказывая в применении закона исключённого третьего к сингулярным суждениям. В отличие от Брауэра, Вейль вряд ли стал бы выглядывать в окно для верификации утверждения «Дождь идёт или дождь не идёт», поскольку считает, что утверждения об единичных предметах или событиях являются истинными или ложными. Сложнее дело обстоит с высказываниями, где употребляются кванторные выражения ‘все’ и ‘существует’. Позиция Вейля связана с критикой процедур перехода от экзистенциальных утверждений к общим и наоборот, которые допускаются в традиционной математике, основанной на классической логике, где, например, доказательство того, что натуральный ряд чисел не обладает некоторым свойством, приводит к утверждению существования числа, не обладающего таким свойством, а доказательство невозможности числа с определённым свойством влечет общие утверждения об отсутствии такого свойства у всего ряда¹. Таким образом, необоснованным оказывается закон исключённого третьего для общих и экзистенциальных суждений, поскольку в отсутствие конкретного примера необоснованность общих и экзистенциальных утверждений не принимается. Доказать – значит привести пример, при отсутствии такого примера доказательства нет, а значит, нет и возможности утверждать, что оно могло или не могло бы быть. С точки зрения Вейля, «2 есть простое число» – настоящее суждение, имеющее истинностное значение, но, например, «Существуют простые числа» – это утверждение, не имеющее истинностного значения, оно является ‘абстракцией’ суждения, которая указывает направление поиска конкретных примеров. Оно не является истинным или ложным, но представляет собой инструкцию, которой можно воспользоваться. Излагая точку зрения Вейля, Рамсей пишет: «Общие и экзистенциальные пропозиции на самом деле вообще не являются пропозициями. Если я говорю “2 есть простое число”, то это подлинное суждение, утверждающее факт, но если я говорю “Существуют простые числа” или “Все числа являются простыми”, то вообще не выражаю суждения... Мы можем сказать “Существует простое число” только тогда, когда мы прежде сказали “Это – простое число” и забыли или предпочли не обращать внимание на то, какое именно число это было. Следовательно, неоправданно говорить “Существует то-то и то-то”, если у нас нет программы его действительного поиска. В результате, математика должна быть весьма значительно изменена» [3. С. 94].

Значительное изменение математики Рамсей считает неприемлемым. Общие и экзистенциальные утверждения должны трактоваться так, чтобы

¹ Рамсей имеет в виду работу Вейля «О новом кризисе основ математики» [5], с которой он был хорошо знаком и которая впоследствии во многом послужила основанием изменения его собственных взглядов (подробнее см. [6]).

всё, что достигнуто обыкновенной математикой, оставалось обоснованным и не связывалось бы с затруднениями в применении определённых процедур доказательства.

Аналогичные претензии Рамсей предъявляет формалистской позиции Д. Гилберта. Значки на бумаге не дают действительного утверждения об общности некоторого свойства, поскольку касаются конкретных преобразований на бумаге. Эти преобразования могут относиться только к конкретным числам и не выходят за рамки арифметики. Тогда возникает вопрос: Как возможна алгебра? Гилберт рассматривает переменные, используемые в алгебраических формулах, которыми заменяются конкретные, перечислимые значки на бумаге, в качестве идеалов. Эти идеалы служат заменой значкам. Они, по существу, служат сокращениями для того, что не может быть записано за конечную или обозримую последовательность шагов. Но чем являются такие сокращения? Очевидно, что они не могут заменить подлинных общих или экзистенциальных утверждений, поскольку утверждают о всех или некоторых значках обоснованно в не большей степени, чем кванторные утверждения, использующие выражения 'все' и 'существует'. Кроме того, все преобразования в рамках натурального ряда, хотя и не всегда обозримы, – всегда конечны. Таким образом, оказывается, что алгебра совершенно бесполезна, поскольку сводится к арифметике, вычисляющей значки, записанные на бумаге. Рамсей утверждает: «Затруднительно видеть, каким образом предполагается использовать эти идеалы, ибо собственно математика, по-видимому, сводится к элементарной арифметике, не допускающей даже алгебры, поскольку сущность алгебры в общих утверждениях. Любое же высказывание арифметики может быть легко проверено или доказано без использования высшей математики, которая, если её существование предполагается только ради простой арифметики, кажется совершенно бесцельной» [3. С. 97].

Тем не менее, как считает Рамсей, «явно индивидуальные факты простой арифметики кажутся мне на самом деле общими» [3. С. 99]. Любое утверждение о каком-то предмете уже предполагает возможность экзистенциального обобщения либо отталкивается от общего закона. Действительно, сингулярное утверждение о том, что у меня есть собака по имени 'Ральф' уже ведёт к утверждению с кванторным выражением, что эта собака есть, а значит, вообще есть какие-то собаки. При этом скорее общее утверждение свидетельствует в пользу того, что мы можем привести пример, а не сингулярное утверждение позволяет сделать вывод, что предметы с заданными свойствами существуют. Обратимся к Рамсею: «Предположение, что общее и экзистенциальное знание существует просто ради индивидуального знания, кажется мне совершенно ложным. В теоретизировании нас в принципе восхищает его общность, и в обыденной жизни вполне достаточно знать, что на некоем поле пасётся бык, и нет никакой пользы в том, чтобы, вместо какого-то быка на каком-то поле, знать, что это за бык и где это поле» [3. С. 100].

Однако главное не в том, что по некоторым основаниям интуиционизм и формализм отказываются от того, чтобы считать общие и экзистенциальные утверждения подлинными суждениями, являющимися истинными или лож-

ными, со всеми вытекающими отсюда последствиями, вплоть до отмены закона исключённого третьего.

Эта критика служит для Рамсея дополнительным аргументом в пользу традиционной трактовки математики, как она представлена в логицизме А. Уайтхеда и Б. Рассела [7]. Действительно, в «Основаниях математики», используя теорию Витгенштейна, Рамсею удаётся дать такое истолкование общих и экзистенциальных утверждений, которое в целом согласуется с подходом классической математики и при этом в определённой степени свободно от недостатков версии логицизма Уайтхеда – Рассела.

Литература

1. *Рамсей Ф.П.* Основания математики // Рамсей Ф.П. *Философские работы*. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. С. 16–86.
2. *Витгенштейн Л.* *Логико-философский трактат*. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008.
3. *Рамсей Ф.П.* *Математическая логика* // Рамсей Ф.П. *Философские работы*. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. С. 87–109.
4. *Ramsey F.P.* *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics* (ed. M.C. Galavotti). Napoli: Bibliopolis, 1991.
5. *Вейль Г.* *О философии математики*. М.: КомКнига, 2005.
6. *Суровцев В.А., Эннс И.А.* Ф.П. Рамсей и интуиционизм Г. Вейля // *Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология*. № 2 (18). 2012. С. 173–187.
7. *Уайтхед А.Н., Рассел Б.* *Основания математики*: в 3 т. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2005–2006.

Surovtsev Valery A. Tomsk state university (Tomsk, Russian Federation)

Gabrusenko Kirill A. Tomsk state university (Tomsk, Russian Federation)

F.P. RAMSEY'S CRITICS OF FORMALISM AND INTUITIONISM IN THE FOUNDATION OF MATHEMATICS

Keywords: F.P. Ramsey, formalism, intuitionism, general and existential statements

F.P. Ramsey's position concerning programs of formalism and intuitionism in the foundation of mathematics is considered. His critical arguments against corresponding treatments of the general and existential statements are analyzed. The critical arguments of F.P. Ramsey against the formalist of treatment of mathematics as simple transformation of symbols according to the set syntactic rules and the intuitionistic approach to the mathematical reasoning demanding refusal of some fundamental principles of the classical logic is considered.

References

1. Ramsey F.P. *Filosofskie raboty* [Philosophical works]. Moscow: Kanon+, Reabilitatsiya Publ., 2011, pp. 16–86.
2. Wittgenstein L. *Logiko-filosofskiy traktat* [Tractatus Logico-Philosophicus]. Moscow: Kanon+, Reabilitatsiya Publ., 2008.
3. Ramsey F.P. *Filosofskie raboty* [Philosophical works]. Moscow: Kanon+, Reabilitatsiya Publ., 2011, pp. 87–109.
4. Ramsey F.P. *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*. Napoli: Bibliopolis, 1991.
5. Weyl G. *O filosofii matematiki* [On the philosophy of mathematics]. Translated from German by A.P. Yushkevich. Moscow: KomKniga Publ., 2005. 128 p.
6. Surovtsev V.A., Enns I.A. F.P. Ramsey and intuitionism of H. Weyl. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science*, 2012, no. 2 (18), pp. 173–187. (In Russian).
7. Whitehead A., Russell B. *Osnovaniya matematiki*: v 3 t. [Foundations of Mathematics: in 3 vols.]. Translated from English by Yu.N. Radaev, A.V. Ershov, R.A. Revinskiy, I.S. Frolov. Samara: Samara State University Publ., 2005–2006.