Секция 7

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ РАСШИРЕНИЙ ГРАФОВ

М. Б. Абросимов

В 1976 году Хейз в работе [1] предложил основанную на графах модель для исследования отказоустойчивости. Технической системе Σ сопоставляется помеченный граф G, вершины которого соответствуют элементам системы Σ, ребра (или дуги) — связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под отказом элемента системы Σ понимается удаление соответствующей вершины из графа системы G и всех связанных с ней ребер. Говорят, что система Σ^* является *k-отказоустойчивой реализацией* системы Σ, если отказ любых k элементов системы Σ^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы Σ с учетом меток вершин. Построение k-отказоустойчивой реализации системы можно представить себе как введение в нее определенного числа новых элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются*, а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры.

Пусть в системе Σ встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k-отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k-отказоустойчивой реализации системы Σ. В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы Σ. Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа.

k-отказоустойчивая реализация Σ^* системы Σ, состоящей из элементов t различных типов, называется *оптимальной*, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов каждого из t типов системы Σ, и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число связей.

Хейз предложил процедуры построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева. Позднее Хейз и Харари в работе [2] обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие *реберной отказоустойчивости*. Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются отказы элементов, в работе [3] было предложено называть *вершинной отказоустойчивостью*.

Если исключить понятие отказа, то рассмотренные ранее понятия могут быть естественным образом сформулированы с использованием обычных терминов теории графов. Впервые это было предложено автором в работе [4], и далее мы дадим формальные определения именно в таком виде.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *вершинным* (*реберным*) *k-расширением* (k — натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин (ребер).

Сформулируем задачу о вершинном k-расширении как задачу распознавания свойств, то есть задачу, ответом на которую может быть «да» или «нет»:

ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ

УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

ВОПРОС. Верно ли, что граф G является вершинным k-расширением графа H?

Теорема 1. Задача ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ является NP-полной.

Аналогично формулируется задача о реберном k-расширении:

РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ

УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

ВОПРОС. Верно ли, что граф G является реберным k-расширением графа H?

Теорема 2. Задача РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ является NP-полной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.-25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2008. С. 59–64.

УДК 519.171

ПОСТРОЕНИЕ ПОКРЫТИЙ РЁБЕР ГРАФА КЛИКАМИ

И. А. Бадеха, П. В. Ролдугин

Реберным покрытием кликами (РПК) графа G называется такой набор клик (полных подграфов) $K_1, ..., K_r$, что любое ребро графа G лежит хотя бы в одной из этих клик. Задача построения РПК, минимального по числу входящих в него клик, как известно, является NP-полной (см., например, [1]). Поскольку каждую из клик в наборе можно дополнить произвольным образом до максимальной клики и получить также РПК, то будем считать, что в определении РПК и далее речь идет о максимальных кликах.

Легко выделить клики, которые обязаны содержаться в каждом РПК для данного графа. Назовем ребро e графа G собственным ребром клики K, если оно лежит в этой клике и не лежит ни в какой другой клике графа G. Соответственно клику K, имеющую хотя бы одно собственное ребро, назовем зафиксированной.

Как известно, вершина графа называется *доминирующей*, если она соединена ребром с каждой из остальных вершин графа.

Определение 1. *Конструкцией* C в графе G будем называть порожденный подграф графа G, обладающий ненулевым количеством доминирующих вершин, и такой, что граф, получающийся из графа C удалением всех доминирующих вершин и инцидентных им рёбер, является непустым и связным.

В работе доказывается, что в связном графе без собственных рёбер существует конструкция.

Конструкция C может быть пригодной или непригодной для разбиения графа, что определяется свойствами рёбер, входящих в неё. Данные свойства подробно исследованы в работе. Все рёбра пригодной конструкции разбиваются на две категории: те,