ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

№3 ПРИЛОЖЕНИЕ Сентябрь 2010

Секция 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ k-РАСШИРЕНИЯХ НАПРАВЛЕННЫХ ЗВЕЗД

М. Б. Абросимов

Звездой называется полный двудольный граф $K_{1,n}$, в котором одна вершина смежна с n попарно несмежными вершинами. *Направленной звездой* назовём диграф, симметризация которого является звездой, то есть направленный граф, получающийся из неориентированной звезды заменой каждого ребра дугой. Направленную звезду будем обозначать $Z_{m,n}$, где m и n — число вершин с одной исходящей и одной входящей дугой соответственно. Вершину, являющуюся концом или началом каждой дуги звезды, будем называть *центральной*.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) G^* является реберным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k ребер;
2) G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального k-расширения введено на основе конструкции оптимальной k-отказоустойчивой реализации. Понятие реберной отказоустойчивости было предложено Хейзом совместно с Харари в работе [1]. Было доказано, что задача проверки k-расширения для произвольного графа является NP-полной (см. [2]).

В работе [3] дается полное описание минимальных вершинных и реберных k-расширений неориентированных звезд. Удалось получить полное описание минимальных вершинных k-расширений направленных звезд (см. [4]). Основной результат данной работы устанавливает для направленных звезд вид их минимальных реберных k-расширений.

Обозначим через $ZK_{m,n,p}$ семейство графов, получающихся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $p-1$ центральной вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими и n исходящими дугами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$. По описанной схеме для заданной звезды в общем случае может быть построено много графов.

Теорема 1. Относительно минимальных реберных 1-расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ справедливо следующее:

1) при $m = n = 1$ звезда $Z_{1,1}$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение, которым является циклическая тройка;
2) при $mn > 1$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $K_{1,m+n}$ и графы, построенные по схемам $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$;

3) при $m > 0$, $n = 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m-1,n,2}$;
4) при $m = 0$, $n > 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m,n-1,2}$;
5) при $m = 2$, $n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг от нее во все остальные вершины;
6) при $m = 2$, $n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг в нее из всех остальных вершин.

Для общего случая результат формулируется следующим образом.

Теорема 2. Относительно минимальных реберных k-расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ при $k > 1$ справедливо следующее:

1) при $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой регулярный $(2k+1)$-вершинный турнир и только их;
2) при $m = n+1 = k$ звезда $Z_{m+1,m}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой $(2k+2)$-вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k+1)$-вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-источника;
3) при $m+1 = n = k$ звезда $Z_{m,m+1}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой $(2k+2)$-вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k+1)$-вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-стока;
4) кроме случая $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ при $k \leqslant m + n$ имеет минимальным реберным k-расширением графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где
$$m_1 + n_1 = m + n - k;$$
$$\max\{0, m-k\} \leqslant m_1 \leqslant m;$$
$$\max\{0, n-k\} \leqslant n_1 \leqslant m.$$
При $k > m + n$ звезда $Z_{m,n}$ не имеет минимальных реберных k-расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
2. *Абросимов М. Б.* О вычислительной сложности расширений графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. №1. С. 94–95.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: СГУ, 2006. Вып 7. С. 3–5.
4. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения направленных звезд // Проблемы теоретической кибернетики: тез. докл. XV Междунар. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань: Отечество. 2008. С. 2.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей