

УДК 519.17: 681.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУР ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ

В. А. Мелентьев

Проблема синтеза отказоустойчивых сетей связи представлена в научной литературе достаточно широко. Наиболее распространенный подход к решению этой проблемы состоит в генерации случайных сетей с последующей режекцией не отвечающих заданным критериям вариантов. В качестве критериев при этом используют такие общеупотребимые показатели, как диаметр, связность, коэффициент кластеризации и т. п. Известные [1] исследования устойчивости вычислительных сетей и систем к случайному и/или преднамеренному удалению вершин из их структур свидетельствуют о большей устойчивости регулярных структур. При этом ни в теории сетей и систем, ни в фундаментальной ее основе — теории графов проблематика генерации структуры (графа) с заданными коммуникативными свойствами систематическими методами, включающими необходимость перебора, практически не исследована. Связано это было, по-видимому, с отсутствием аппарата описания графов, позволяющего максимально формализованно производить их анализ и преобразования.

В данной работе впервые сформулирован аналитический подход к решению проблемы синтеза регулярных графов заданного порядка n и степени s . Подход основан на предложенной автором формализации описания графа $G(V, E)$ его проекциями $P(v_0)$, $v_0 \in V$, и состоит в построении базовой проекции остоного дерева генерируемого графа, в анализе этой проекции и выявлении с ее помощью нижней границы диаметра $d(G)$ и верхней границы обхвата $g(G)$, а также в последующем доопределении неизвестных ребер графа другими его проекциями в соответствии с требуемыми значениями показателей. Таким образом, поиск недостающих в остоном подграфе ребер подобен решению системы уравнений, в качестве которой использовано множество проекций генерируемого графа.

Проекция $P(v_i)$ графа $G(V, E)$ представляет собой многоуровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена ракурсная вершина $v_i \in V$; порожденное ею единственное подмножество первого уровня содержит все вершины окружения $\mathcal{N}(v_i)$, а каждый k -й уровень ($k > 1$) представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной $(k - 1)$ -го уровня и является окружением этой вершины без тех его вершин, что ей предшествуют. Таким образом, отношение «предшествования вершины/порождения подмножества» фактически моделирует отношение смежности соответствующей вершины с вершинами соответствующего подмножества. Формальная запись этих отношений в скобочном описании двух произвольно взятых соседних уровней проекции графа имеет вид $\{a_1^{\{b_1, \dots, b_j\}}, \dots, a_i^{\{c_1, \dots, c_l\}}\}$. Здесь вершины a_1 и a_i одного из подмножеств произвольно взятого уровня предшествуют и смежны вершинам порожденных ими подмножеств $\{b_1, \dots, b_j\}$ и $\{c_1, \dots, c_l\}$.

Для конкретизации числа k уровней в проекции добавим в ее обозначение соответствующий индекс — $P_k(w)$. Тогда $P_0(w) = w$. Продолжив описание до 1-го уровня, получим $P_1(w) = w^{V_{wj}}$. Здесь множество вершин $V_{wj} = \mathcal{N}(w)$ является окружением вершины w и состоит из $s(w)$ вершин, где $s(w) = \deg(w)$ — степень вершины w . Таким образом, j -я вершина $(i - 1)$ -го уровня проекции порождает на следующем i -м уровне подмножество $V_{ij} \subset V$ вершин. Подмножеству V_{ij} поставим в соответствие множество предшествующих ему вершин $V'_{ij} \subset V$, включенных в маршрут $M(v_0, v_{i-1, j})$ из ракурса-

ной вершины v_0 в вершину $v_{i-1,j}$. Подмножества вершин i -го уровня, число которых равно числу вершин $(i-1)$ -го уровня, получаем вычитанием из окружений вершин $(i-1)$ -го уровня всех предшествующих им в проекции вершин из V'_{ij} : $V_{ij} = \mathcal{N}(v_{i-1,j}) \setminus V'_{ij}$.

Из проекции единичного куба ($n = 8, s = 3$)

$$P_3(0) = 0_{\{1\{4\{2,7\},5\{3,7\}\},2\{4\{1,7\},6\{3,7\}\},3\{5\{1,7\},6\{2,7\}\}\}}$$

видно, что его диаметр равен 3. В работе показано, что минимальное значение эксцентриситета $e(v_0)$ корневой вершины проекции $P(v_0)$ для пары (n, s) достигается при $1 + s \sum_{i=1}^{e-1} (s-1)^{i-1} < n \leq 1 + s \sum_{i=1}^e (s-1)^{i-1}$. Это означает, что для $4 < n \leq 10$ и $s = 3$ могут быть получены более компактные (с $d = 2$) графы, базовая проекция которых имеет вид

$$P_2(0) = 0_{\{1\{2,3,4,5,6,7\}_2,2\{1,3,4,5,6,7\}_2,3\{1,2,4,5,6,7\}_2\}}.$$

Доказано утверждение о том, что обхват g графа не превышает удвоенного эксцентриситета его проекции, поэтому значение $d = 2$ в генерируемом графе с $n = 8, s = 3$ может быть обеспечено как с $g = 3$, так и с $g = 4$. Применение подхода показано в работе на примере генерации таких графов, их минимальные полные проекции и соответствующие им графы приведены на рис. 1.

$$g = 3 : P_2(0) = 0_{\{1\{2\{5\},4\{6,7\}\},2\{1\{4\},5\{6,7\}\},3\{6\{4,5\},7\{4,5\}\}\}},$$

$$g = 4 : P_2(0) = 0_{\{1\{4\{3,6\},5\{6,7\}\},2\{6\{4,5\},7\{3,5\}\},3\{4\{1,6\},7\{2,5\}\}\}}.$$

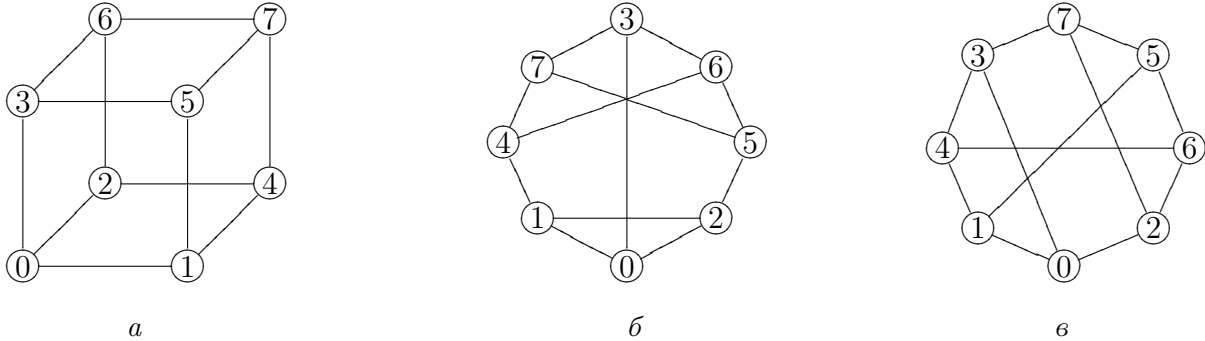


Рис. 1. Единичный куб (а), граф с $n = 8, s = 3, g = 3$ (б) и граф с $n = 8, s = 3, g = 4$ (в)

Обобщенное изложение последовательности действий в процессе синтеза дано на примере синтеза графа той же степени, что и ранее рассмотренные, но большего порядка. Показано, что применение сформулированного подхода не ограничено рассмотренными в работе случаями синтеза регулярных графов: подход может быть с успехом использован для решения более общих сетевых задач, включая задачи масштабирования и наращивания структуры системы. Внедрение же аналитических методов решения этих задач в теорию и практику построения отказоустойчивых систем существенно повысит их оптимальность, реактивность и предсказуемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valente A. X. C. N., Sarkar A., Stone H. A. 2-Peak and 3-Peak Optimal Complex Networks // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. No. 11.