6. *Nedjah N., de Macedo M. L.* Finding minimal addition chains using ant colony // IDEAL / ed. by R. Y. Zheng, R. M. Everson, Y. Hujun. LNCS. 2004. V. 3177. P. 642–647.
7. *Downey P., Leong B., Sethi R.* Computing sequences with addition chains // SIAM J. Computing. 1981. V. 10. No. 3. P. 638–646.

УДК 519.171

О СООТНОШЕНИЯХ СТЕПЕНИ И ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

И. А. Бадеха, П. В. Ролдугин

В данной работе наиболее важным является понятие реберного покрытия графа кликами (РПК). РПК — это такой набор клик (полных подграфов) $K_1, \ldots, K_r$, что любое ребро графа G лежит хотя бы в одной из этих клик. В качестве клик, входящих в РПК, подразумеваются только максимальные по включению клики. Кроме того, будем отождествлять клику и множество ее вершин, то есть выражение «множество вершин R образует клику в графе G» означает, что множество вершин R порождает максимальный полный подграф в графе G. Назовем ребро e графа G собственным ребром клики K, если оно лежит в этой клике и не лежит ни в какой другой максимальной по включению клике графа G. Соответственно клику K, имеющую хотя бы одно собственное ребро, назовем зафиксированной.

Утверждение 1. Клика K входит в любое РПК графа G тогда и только тогда, когда она является зафиксированной.

Собственные ребра и соответственно зафиксированные клики допускают простую характеризацию, позволяющую легко распознать их в графе.

Утверждение 2. Ребро $e \in E(G)$ является собственным ребром некоторой клики K тогда и только тогда, когда множество вершин графа G, смежных одновременно с обоими концами ребра e, порождает полный подграф в G. Кроме того, этот полный подграф в объединении с концами ребра e образует клику K.

Из данного утверждения следует возможность нахождения всех зафиксированных клик графа за полиномиальное время (трудоемкость не более $O(n^4)$, где $n = |V(G)|$). Отсюда следует, что в определенном смысле графами, в которых сложно строить минимальное РПК, являются графы, не содержащие зафиксированных клик, или, что эквивалентно, собственных ребер. Далее такие графы, то есть графы, в которых каждое ребро лежит не менее чем в двух кликах, назовем графами, свободными от собственных ребер. Введем на множестве вершин графа G отношение эквивалентности. Две вершины x и y называются эквивалентными, если они смежны и их окружения совпадают, то есть $N(x) = N(y)$. Сжатым графом назовем граф, в котором все вершины попарно неэквивалентны.

Основное содержание работы отражает следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что G является связным сжатым графом, свободным от собственных ребер. Тогда

1) $\rho(G) \leqslant \Delta(G) - 1$;
2) если $\rho(G) = \Delta(G) - 1$, то $\Delta(G) = 4$, и граф G эквивалентен графу B;
3) если $\rho(G) = \Delta(G) - 2$, то в графе G существует не менее двух вершин степени $\Delta(G)$, либо граф G получается из графа B добавлением одной доминирующей вершины.

С помощью введения специальных операций над сжатыми графами, свободными от собственных ребер, сохраняющих данные свойства, и с использованием данной теоремы доказывается следующее утверждение.

Утверждение 3. Существуют непустые сжатые графы, свободные от зафиксированных клик, имеющие $\rho(G) = \rho$ и $\Delta(G) = \Delta$, где Δ и ρ — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие ограничениям: $\rho \geqslant 3$, $\Delta \geqslant \rho + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cavers M. S.* Clique partitions and coverings of graphs. University of Waterloo, 2005.
2. *Kou L. T., Stockmeyer L. J., Wong C. K.* Covering edges by cliques with regard to keyword conflicts and intersection graphs // Communicat. ACM. 1978. V. 21. No. 2. P. 135–139.
3. *Orlin J.* Contentment in graph theory: Covering graphs with cliques // Indagationes Math. 1977. V. 39. P. 406–424.

УДК 519.7

БЕНТ-ФУНКЦИИ И ЛИНЕЙНЫЕ КОДЫ В CDMA[1]

А. В. Павлов

Булева функция от четного числа переменных называется *бент-функцией*, если она максимально удалена от класса аффинных булевых функций. Задача построения бент-функций возникает во многих областях, в том числе в теории кодирования, где находит свое применение в системах коллективного доступа, таких, как стандарты цифровой сотовой связи CDMA. Данные стандарты используют бент-функции для построения кодов постоянной амплитуды, что позволяет предельно снизить коэффициент отношения пиковой и средней мощностей сигнала. Такие коды состоят из векторов значений бент-функций. И как известно, предпочтение отдается линейным кодам, так как они довольно просты в реализации.

Так возникла задача построения максимального линейного кода на основе заданной бент-функции, такого, что при сдвиге данной бент-функции на любое кодовое слово не нарушалось бы свойство «бент». В [1] предлагается использовать для построения кода конструкцию Мак-Фарланда [2] $f(x, y) = \langle x, \pi(y)\rangle + g(y)$, где $x, y \in E^{n/2}$; $g(y)$ — булева функция от $n/2$ переменных; π — подстановка на $E^{n/2}$; $E^{n/2}$ — булев куб размерности $n/2$. Рассмотрим линейный код длины 2^n, состоящий из векторов значений функций $h(x, y) = g(y)$ и всех аффинных функций от n переменных. Размерность данного кода равна $k = 2^{n/2} + n/2$, кодовое расстояние равно $d = 2^{n/2}$. Например, для любой бент-функции из класса Мак-Фарланда от 6 переменных имеем линейный код с параметрами $[2^6, 11, 8]$, а для 8 переменных — с параметрами $[2^8, 20, 16]$.

В [3] было доказано, что две бент-функции находятся на минимальном расстоянии $2^{n/2}$ друг от друга тогда и только тогда, когда они отличаются на аффинном подпространстве размерности $n/2$ и обе на нём аффинны. Исходя из этого критерия, предложен следующий алгоритм построения максимального линейного кода.

Алгоритм

1) Вход: бент-функция f.
2) Добавляем f в список функций $functionList$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК №1250.2009.1).