ние собственных значений из спектра графа и спектров его подграфов. Этот подход позволяет рассмотреть вопрос поиска полного инварианта для классов графов, используя алгебраические свойства матриц, представляющих графы, и допускает обобщения на более широкие классы графов. Вариант такого обобщения также рассматривается в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Balasubramanian K., Parthasarathy K. R.* In search of a complete invariant for graphs // Lect. Notes Mathem. 1981. V. 885. P. 42–59.
2. *Lindell S.* A Logspace Algorithm for Tree Canonization // Proc. of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. New York: ACM, 1992. P. 400–404.
3. *Datta S., Limaye N., Nimbhorkar P., Thierauf T., Wagner F.* Planar Graph Isomorphism is in Log-Space // 24th Annual IEEE Conference on Computational Complexity. Paris, France, July 15 – July 18, 2009. ISBN: 978-0-7695-3717-7.

УДК 519.17

О КАРКАСЕ АВТОМАТА

В. Н. Салий

В [1] было введено понятие каркаса автомата. Это упорядоченное множество, которое образуют слои автомата вместе с отношением обратной достижимости. Оно сыграло весьма существенную роль в описании автоматов, у которых каждая конгруэнция является ядром подходящего эндоморфизма. В работе устанавливаются некоторые свойства каркаса, связанные с основными алгебраическими конструкциями для автоматов, такими, как подавтомат, гомоморфизм, конгруэнция.

Автомат — это тройка $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$, где S и X — конечные непустые множества, соответственно множество состояний и множество входных сигналов, а $\delta : S \times X \to S$ — отображение, называемое функцией переходов.

Подмножество $S' \subseteq S$ называется устойчивым в автомате $\mathbf{A}$, если $\delta(s, x) \in S'$ для любых $s \in S'$ и $x \in X$. Если S' устойчиво в $\mathbf{A}$, то, ограничивая функцию переходов δ на $S' \times X$, получают автомат $\mathbf{A'} = (S', X, \delta)$ — подавтомат автомата $\mathbf{A}$, соответствующий S'. Совокупность Sub$\mathbf{A}$ всех подавтоматов автомата $\mathbf{A}$, упорядоченная отношением $\mathbf{A_1} \leqslant \mathbf{A_2} \iff S_1 \subseteq S_2$, где $\mathbf{A_i} = (S_i, X, \delta)$, $i = 1, 2$, является дистрибутивной решеткой.

Пусть $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$ и $\mathbf{B} = (T, X, \delta)$ — сравнимые автоматы, т. е. автоматы с одним и тем же множеством входных сигналов. Отображение $\varphi : S \to T$ по определению является гомоморфизмом автомата $\mathbf{A}$ в автомат $\mathbf{B}$, если $\varphi(\delta(s, x)) = \delta(\varphi(s), x)$ для любых $s \in S$, $x \in X$. Взаимно однозначные гомоморфизмы автоматов называются вложениями, а их биективные гомоморфизмы — изоморфизмами. Эндоморфизмы автомата — это его гомоморфизмы в себя, автоморфизмы — изоморфизмы на себя.

Отношение эквивалентности $\theta \subseteq S \times S$ называется конгруэнцией автомата $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$, если оно согласовано с функцией переходов в том смысле, что $(\forall s, t \in S)(\forall x \in X)((s, t) \in \theta \Longrightarrow (\delta(s, x), \delta(t, x)) \in \theta)$. Каждая конгруэнция θ автомата $\mathbf{A}$ определяет его фактор-автомат $\mathbf{A}/\theta = (S/\theta, X, \delta)$, где $\delta(\theta(s), x) := \theta(\delta(s, x))$ для любых $s \in S$, $x \in X$.

Пусть X^* — множество всех конечных слов над алфавитом X. Продолжим функцию переходов δ на множество $S \times X^*$, полагая $\delta(s, e) = s$, где $e \in X^*$ — пустое слово, и $\delta(s, px) = \delta(\delta(s, p), x)$ для любых $s \in S$, $x \in X$, $p \in X^*$. Говорят, что состояние t

достижимо в автомате $\mathbf{A}$ из состояния s, если найдется входное слово $p \in X^*$, такое, что $\delta(s,p) = t$. Записывая это в виде $(s,t) \in \tau$, вводим отношение достижимости τ в автомате $\mathbf{A}$.

Симметричная часть $\sigma = \tau \cap \tau^{-1}$ отношения достижимости называется отношением взаимной достижимости в $\mathbf{A}$. Классы этой эквивалентности называют слоями автомата $\mathbf{A}$. Каркасом автомата $\mathbf{A}$ назовем упорядоченное множество $F(\mathbf{A}) = (S/\sigma, \tau^{-1})$. Его элементами являются слои автомата $\mathbf{A}$, а порядком — отношение, обратное достижимости, перенесенное на слои: $(\sigma(t), \sigma(s)) \in \tau^{-1}$ равносильно тому, что $(s,t) \in \tau$.

Теорема 1. Каждое конечное упорядоченное множество изоморфно каркасу подходящего автомата с двумя входными сигналами.

Теорема 2. Конечное упорядоченное множество тогда и только тогда изоморфно каркасу автономного автомата, когда у каждого его элемента имеется не более чем один нижний сосед.

Теорема 3. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные автоматы, то $\mathrm{Sub}\mathbf{A} \cong \mathrm{Sub}\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $F(\mathbf{A}) \cong F(\mathbf{B})$.

Теорема 4. Если φ — вложение автомата $\mathbf{A}$ в автомат $\mathbf{B}$ и $F(\mathbf{A}) \cong F(\mathbf{B})$, то φ — изоморфизм $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Следствие 1. Если $\mathbf{A}'$ — подавтомат автомата $\mathbf{A}$ и $F(\mathbf{A}') \cong F(\mathbf{A})$, то $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Следствие 2. Если φ — эндоморфизм автомата $\mathbf{A}$ и $F(\varphi(\mathbf{A})) \cong F(\mathbf{A})$, то φ — автоморфизм.

Теорема 5. Если θ — конгруэнция автомата $\mathbf{A}$, то $F(\mathbf{A}/\theta) \cong F(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда $\theta \subseteq \sigma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салий В. Н.* Автоматы, у которых все конгруэнции — внутренние // Изв. вузов. Математика. 2009. № 9. С. 36–45.

УДК 519.5

КЛАССЫ ГРАФОВ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

Е. А. Татаринов

Рассматривается задача [1] восстановления конечного связного неориентированного графа G без петель и кратных ребер при помощи агента, который премещается по ребрам графа G, считывает и изменяет метки на вершинах и инциденторах. На основе собранной информации агент строит граф H, изоморфный графу G с точностью до меток на вершинах и инциденторах графов. Необходимо найти метод обхода и разметки графа G с целью его восстановления.

Известен ряд методов восстановления графа [2, 3], которые используют не более четырех различных красок, однако имеют верхнюю оценку временной сложности восстановления, равную квадратичной и кубической функцией от числа вершин в восстанавливаемом графе соответственно. Для каждого метода нижней оценкой временной сложности восстановления является линейная функция от числа вершин в графе G. Данная работа посвящена выделению классов графов, для которых верхняя