

Теорема 1. Пусть $\vec{G}^*$ — точное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда отношения смежности α и α^* являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.

Теорема 2. Пусть $\vec{G}^*$ — точное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация $\vec{G}^*$ является точным вершинным k -расширением симметризации $\vec{G}$.

Теорема 3. Пусть $\vec{G}$ — диграф с числом вершин больше 1, тогда его точное вершинное k -расширение, если оно есть, также будет диграфом.

Теорема 4. Пусть $\vec{G}^*$ — точное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда дополнение $\vec{G}^*$ является точным вершинным k -расширением дополнения $\vec{G}$.

Обратным орграфом, или обращением орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется орграф $\vec{H} = (V, \beta)$, получающийся заменой ориентации всех дуг $\vec{G}$: $\beta = \alpha^{-1} = \{(u, v) \in V \times V : (v, u) \in \alpha\}$.

Теорема 5. Пусть $\vec{G}^*$ — точное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда обращение $\vec{G}^*$ является точным вершинным k -расширением обращения $\vec{G}$.

Точное вершинное k -расширение является частным случаем минимального вершинного k -расширения. При переходе к минимальным вершинным k -расширениям от точных вершинных k -расширений некоторые из полученных свойств сохранились. Удалось получить следующие результаты.

Теорема 6. Пусть $\vec{G}^*$ — минимальное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда отношения смежности α и α^* являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.

Теорема 7. Пусть $\vec{G}^*$ — минимальное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация $\vec{G}^*$ является вершинным k -расширением симметризации $\vec{G}$.

Теорема 8. Пусть $\vec{G}^*$ — минимальное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда обращение $\vec{G}^*$ является минимальным вершинным k -расширением обращения $\vec{G}$.

Отдельный интерес представляет случай, когда минимальное вершинное k -расширение диграфа также является диграфом. Был проведен вычислительный эксперимент по построению минимальных вершинных k -расширений всех диграфов с числом вершин до 6. В работе рассматриваются полученные в ходе эксперимента результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абросимов М. Б., Долгов А. А. Точные расширения некоторых турниров // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2007. № 23. С. 211–216.

УДК 519.178

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ДРЕВОВИДНОЙ ШИРИНЫ ГРАФА

В. В. Быкова

Древовидная ширина — числовой параметр, характеризующий меру древовидности графа. Графы с ограниченной древовидной шириной образуют специальный класс графов, называемых частичными k -деревьями. Этот класс графов был введен четверть

века назад Н. Робертсоном и П. Д. Сеймуром [1]. Широкий интерес к изучению древовидной ширины графа вызван тем, что многие NP-трудные задачи теории графов, возникающие в различных приложениях, в том числе при моделировании надежности и безопасности компьютерных и коммуникационных систем, полиномиально разрешимы, если модельный граф — частичное k -дерево. В этих условиях процесс решения задачи может быть организован по принципу «разделяй и властвуй», причем алгоритмическая эффективность достигается за счет разложения модельного графа на части с помощью небольших (мощности не более k) сепараторов [2].

Древовидная ширина графа вычисляется через специальную графовую структуру, которая называется деревом декомпозиции. Дерево декомпозиции графа $G = (V, E)$ представляет собой пару $(\mathcal{X}, T)$, где $\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}$ — семейство подмножеств множества V , называемых «мешками», а $T = (I, W)$ — дерево, узлам которого сопоставлены эти «мешки», и выполняются следующие условия:

- 1) $\bigcup_{i \in I} X_i = V$;
- 2) для всякого ребра графа G обязательно имеется хотя бы один «мешок», содержащий обе вершины этого ребра;
- 3) для любой вершины $v \in V$ графа G множество узлов $\{i \in I : v \in X_i\}$ индуцирует связный подграф, являющийся поддеревом дерева T .

Ширина дерева декомпозиции $(\mathcal{X}, T)$ равна $\max_{i \in I} \{|X_i| - 1\}$. Древовидная ширина (*treewidth*) графа G определяется как наименьшая ширина всех допустимых его деревьев декомпозиции и обозначается через $\text{tw}(G)$. Дерево декомпозиции $(\mathcal{X}, T)$ ширины $\text{tw}(G)$ называется оптимальным деревом декомпозиции графа G . Заметим, что для каждого связного графа G множество возможных деревьев декомпозиции не пусто и конечно. Когда граф G несвязен, то полагают $\text{tw}(G) = 0$. Следовательно, древовидная ширина $\text{tw}(G)$ может быть вычислена для любого конечного графа G .

При условии связности графа $G = (V, E)$ верны естественные границы значений древовидной ширины: $1 \leq \text{tw}(G) \leq |V| - 1$. Древовидная ширина отражает, насколько близок граф G к дереву, и определяет размеры его клик и сепараторов: чем меньше $\text{tw}(G)$, тем ближе граф G к дереву и тем меньше у него по мощности клики и сепараторы. Так, все n -вершинные деревья ($n \geq 2$) имеют единичную древовидную ширину, размер всякой клики такого дерева равен 2, а каждый сепаратор — точка сочленения. Считается, что граф G обладает ограниченной древовидной шириной, если $\text{tw}(G) \leq k$ и k — положительная целая константа, не зависящая от $|V|$. Например, если G — последовательно-параллельный граф, то $\text{tw}(G) \leq 2$, а для всякого графа Халина неизменно $\text{tw}(G) \leq 3$. Однако значения $\text{tw}(G)$ всегда зависят от $|V|$ для полных графов и графов типа «сетка» — графов, составленных из правильных многогранников.

Установить, имеет ли заданный граф ограниченную древовидную ширину, не всегда просто. В [3] доказана NP-полнота следующей задачи: для графа $G = (V, E)$ и целого числа $0 < k < |V|$ верно ли, что $\text{tw}(G) \leq k$? Данное теоретическое препятствие не мешает на практике вычислять древовидную ширину графа во многих ситуациях. Во-первых, известны точные неполиномиальные по времени алгоритмы нахождения $\text{tw}(G)$, основанные на методе динамического программирования и методе ветвей и границ [4, 5]. Разработаны также FPT-алгоритмы (*Fixed-Parameter Tractable algorithms*) [1, 6], способные при фиксированном k за время $O(2^k |V|^{O(1)})$ дать ответ на вопрос: $\text{tw}(G) \leq k$? Во-вторых, найдены алгоритмы полиномиальной сложности для некоторых специальных классов графов (хордальных, последовательно-параллельных и др.) [7, 8]. В-третьих, выявлены необходимые полиномиально проверяемые признаки

частичного k -дерева [3]. Так, если $G = (V, E)$ — частичное k -дерево, то

$$|E| \leq k|V| - k(k+1)/2.$$

В-четвертых, к настоящему времени предложены различные схемы приближений [9] и эвристические алгоритмы [10], позволяющие за полиномиальное время находить значения, близкие к истинному значению древовидной ширины графа. И наконец, актуальны границы возможных значений древовидной ширины графа и методы их уточнения.

В работе дан краткий обзор современных результатов по проблеме вычисления древовидной ширины. Представлены некоторые нижние и верхние оценки древовидной ширины, связывающие данный параметр с другими числовыми параметрами графа (наименьшей степенью вершины, числом вершинной связности, плотностью, хроматическим числом). Проанализировано их качество и сложность вычисления. Предложены и теоретически обоснованы полиномиальные по сложности алгоритмические методы улучшения этих оценок, основанные на немонотонности числовых параметров графа относительно операции удаления вершин графа и разложении графа сепараторами. В частности, доказано, что дерево блоков и точек сочленения графа G определяет дерево декомпозиции, ширина которого устанавливает верхнюю границу значений для $\text{tw}(G)$.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson N. and Seymour P. D. Graph minors. II. Algorithmic aspects of treewidth // J. Algorithms. 1986. V. 7. P. 309–322.
2. Kleinberg J. and Tardos E. Algorithm Design. Boston: Addison-Wesley, 2005.
3. Arnborg S., Corneil D. G., and Proskurowski A. Complexity of finding embeddings in a k -tree // SIAM J. Alg. Disc. Math. 1987. V. 8. P. 277–284.
4. Gogate V. and Dechter R. A complete anytime algorithm for treewidth // Proc. UAI'04. Uncertainty in Artificial Intelligence. 2004.
5. Bodlaender H. L., Grigoriev A., and Koster A. M. C. A. On exact algorithms for treewidth // Proc. 14Th Annual European Symposium on Algorithms ESA. 2006. V. 4168. P. 672–683.
6. Bodlaender H. L. and Kloks T. Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs // J. Algorithms. 1996. V. 21. P. 358–402.
7. Bodlaender H. L. and Rotics U. Computing the treewidth and the minimum fill-in with the modular decomposition // Algorithmica. 2003. V. 36. P. 375–408.
8. Broersma H., Dahlhaus E., and Kloks T. A linear time algorithm for minimum fill-in and tree width for distance hereditary graphs // Disc. Appl. Math. 2000. V. 99. P. 367–400.
9. Bouchitte V., Kratsch D., Muller H., and Todinca I. On treewidth approximations // Disc. Appl. Math. 2004. V. 6. P. 183–196.
10. Clautiaux F., Moukrim A., Negre S., and Carlier J. Heuristic and meta-heuristic methods for computing graph treewidth // RAIRO Oper. Res. 2004. V. 38. P. 13–26.
11. Быкова В. В. Вычислительные аспекты древовидной ширины графов // Прикладная дискретная математика. 2011 (в печати).