УДК 519.17

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ[1]

А. А. Кочкаров, Л. И. Сенникова, Н. Н. Болуров

*Фрактальные графы* [1, 2] используются для моделирования структур, растущих по одним и тем же правилам независимо от точки роста. Не исключается множественный одновременный рост во всей структуре системы. Формальным отражением этих правил является операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ) [1, 2], она же лежит в основе определения фрактальных графов.

Термином «*затравка*» условимся называть какой-либо связный граф $H = (W, Q)$. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v} \in V$ выделяется множество $\widetilde{V} = \{\tilde{v}_j : j = 1, 2, ..., |\widetilde{V}|\}$ смежных ей вершин. Далее из графа $G$ удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j \in \widetilde{V}$ соединяется ребром с одной из вершин затравки $H = (W, Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где $V_L$ — множество вершин графа, а $E_L$ — множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1, 2, ..., L-1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожден затравкой* $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа $G_L$, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L$, называемой *траекторией.* Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией. Ранг $L$ определяет «возраст» (число этапов порождения) и размер (число вершин) предфрактального графа.

Использование операции ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа $G_L$ для элементов $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1, 2, ..., L-1\}$, его траектории позволяет ввести отображение $\varphi$, такое, что $\varphi(V_l) = V_{l+1}$, $\varphi^t(V_l) = V_{l+t}$, $\quad t = 1, 2, ..., L-l$.

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа $G_L$ является случай, когда вместо единственной затравки $H$ используется множество затравок $\mathscr{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t, \ldots, H_T\}$, $T \geqslant 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа $G_{l-1}$ к графу $G_l$ каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathscr{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1, G_2, \ldots, G_L$ из траектории предфрактального графа $G_L$ разбивает множество ребер $E_L$ на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L) = \left\{z_s^{(l)} : l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}\right\}$, где $n = |W|$. Такое разбиение на подмножества позволяет сохранить информацию о смежности старых ребер на момент их появления в предфрактальном графе. В траектории переход от графа $G_{l-1}$ к $G_l$ осуществляется $|V_{l-1}| = n^{l-1}$ операциями ЗВЗ, поэтому общее число использованных затравок в порождении предфрактального графа $G_L$ равно

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00786-а.

$1+n+n^2+...+n^{L-1} = \dfrac{n^L-1}{n-1}$. Тогда мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа $G_L$ также равна $\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

*Число точек сочленения* графа $H=(W,Q)$ обозначим через $m(H)$.

**Теорема 1.** Для всякого предфрактального графа $G_L$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа точек сочленения $m(H)n^{L-1} \leqslant m(G_L) \leqslant m(H)n^{L-1} + \dfrac{n^L-n}{n-1}$, если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.

*Число мостов* графа $H=(W,Q)$ обозначим через $k(H)$.

**Теорема 2.** Для всякого предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа мостов:

$$k(H) \leqslant k(G_L) \leqslant k(H)\frac{n^L-n}{n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочкаров А. М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
2. *Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. №6. С. 1157–1162.

УДК 519.17: 681.3

# КОМПАКТНЫЕ ГРАФЫ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ИХ СИНТЕЗА

В. А. Мелентьев

Проблема анализа и синтеза структур вычислительных систем (ВС) традиционно решается методами теории графов. При этом между множествами модулей ВС и вершин $V$ графа $G(V,E)$ и между множествами линий связи и ребер $E$ графа устанавливают биективные соответствия; задержки при этом оценивают метрическими характеристиками соответствующих графов — их диаметром $d$ или радиусом. В рамках решения проблемы синтеза структур ВС рассматривается синтез $s$-регулярного графа порядка $n=|V|$ с минимально возможным при значениях $n$ и $s$ диаметром $d$. Такие графы далее называем $n(s)$-компактными.

Решение задачи основано на предложенном в [1] описании графа проекциями. Проекция $P(v_j)$ графа $G(V,E)$ является многоуровневой конструкцией, на нулевом уровне которой расположена ракурсная вершина $v_j$ из $V$. Порожденное ею подмножество вершин первого уровня $V_{1j}$ содержит все вершины ее окружения $\mathcal{N}(v_j)$, а $i$-й уровень ($i \geqslant 1$) представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной $(i-1)$-го уровня и является окружением этой вершины без вершин, предшествующих ей в проекции. Вершине $v_{ij}$ $k$-уровневой проекции $P_k(v_0)$ соответствует упорядоченное множество вершин $W(v_{ij}) = (v_0, v_{10}, \ldots, v_{ij})$, представляющее собой простую цепь из ракурсной вершины $v_0$ нулевого уровня этой проекции в вершину $v_{ij}$ $i$-го уровня ($i \leqslant k$); длина этой цепи $L(v_0, v_{ij}) = i$. В общем случае некоторые вершины проекции $P_k(v_0)$ могут быть $m_{ij}$-кратными ($1 \leqslant m_{ij}$). Значение кратности $m_{ij}$ соответствует числу простых цепей из ракурсной вершины $v_0$ в вершину $v_{ij}$. Номер $i$ уровня