ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Mukhopadhyaya K. and Sinha B. P.* Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. 1992. V. 44. P. 95–99.
5. *Hsu L. H. and Lin C. K.* Graph Theory and Interconnection Networks. CRC Press, 2009.
6. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2000. Вып. 3. С. 3–10.
7. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2004. Вып. 6. С. 3–9.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
9. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения циклов с числом вершин не более одиннадцати / Саратов: СГУ, 2001. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1869-B2001.

УДК 519.17

ОБ ОРГРАФАХ, ИМЕЮЩИХ МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Понятие минимального вершинного k-расширения введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое предложено Дж. П. Хейзом [1]. В работе [2] исследована задача описания неориентированных графов с заданным числом дополнительных рёбер минимальных вершинных 1-расширений. В данной работе рассматривается аналогичная задача для орграфов без петель. В [3] приводится лемма, устанавливающая связь между минимальными вершинными k-расширениями неориентированного графа и его ориентации.

Лемма 1 [3]. Пусть G^* есть минимальное вершинное k-расширение орграфа G. Тогда симметризация G^* является вершинным k-расширением симметризации G.

Следствие 1. Число дополнительных дуг минимального вершинного k-расширения орграфа G не менее числа дополнительных рёбер минимального вершинного k-расширения симметризации орграфа G.

В работе [2] получены следующие результаты (теоремы 1–3).

Теорема 1. Графы со степенным множеством $\{1, 0\}$, и только они, имеют минимальные вершинные 1-расширения с одним дополнительным ребром; для каждого графа со степенным множеством $\{1, 0\}$ такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теоремы 1 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой.

Теорема 2. Среди связных графов только цепи имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными рёбрами; для каждой цепи такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теорем 1–2 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными дугами. Оказывается, что ориентация цепи имеет две дополнительные дуги в минимальном вершинном 1-расширении, только если цепь является гамильтоновой. Минимальным вершинным 1-расширением такой цепи является контур.

Теорема 3. Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 1$ имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение с точностью до изоморфизма совпадает с $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теорем 1–3 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными дугами.

Удалось получить следующие результаты.

Теорема 4. Орграфы, полученные объединением n двухвершинных цепей с m изолированными вершинами, где $m > 0$, и только они имеют минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой. Каждый такой орграф имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.

Теорема 5. Среди связных орграфов гамильтоновы цепи P_n, и только они, имеют две дополнительные дуги в минимальном вершинном 1-расширении. При $n > 2$ каждая цепь имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение. При $n = 2$ цепь имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: циклическую и транзитивную тройки.

Теорема 6. Среди несвязных орграфов без изолированных вершин только орграфы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 2$, где циклы являются контурами, а цепь — гамильтоновой цепью, имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами. При $n = 2$ возможен ещё один случай: вместо контура C_3 можно взять транзитивную тройку T_3. Граф $P_2 \cup T_3 \cup \ldots \cup T_3$ также имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами.

На рис. 1 представлена схема построения семейства графов из теоремы 6 и их минимальных вершинных 1-расширений.

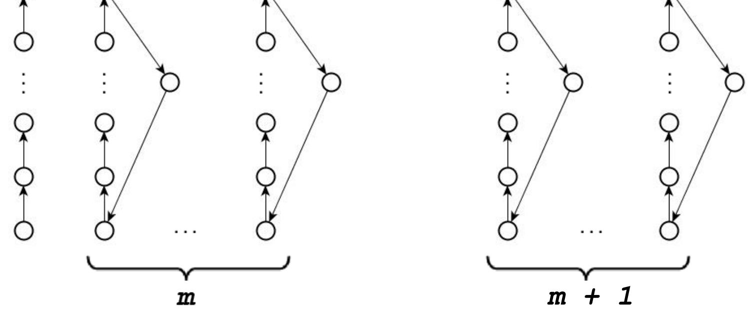

Рис. 1. Орграф и его минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. № 23:2. С. 93–102.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЧЕРНО-БЕЛЫХ ЦЕПЕЙ ОСОБОГО ВИДА

П. П. Бондаренко

Определение 1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* [1, 2] n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + kp$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + kp$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Определение 2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* [3] n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;

2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Вершины разных типов можно изображать различными цветами. Будем рассматривать минимальные вершинные и рёберные 1-расширения черно-белых неориентированных графов, в которых вершины имеют два типа: $p = 2$ (белые и чёрные вершины).

В результате вычислительного эксперимента построены все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения черно-белых цепей, в которых две белые вершины имеют степень 1, а чёрные — степень 2 (то есть белые вершины на концах цепи), с количеством вершин до 9.

Теорема 1. Минимальные вершинные расширения цепей P_n с вершинами двух типов, в которых белые вершины имеют степень 1, а чёрные — степень 2, содержат $m = 3k$ рёбер при чётном $n = 2k$, и одно из минимальных 1-вершинных расширений имеет вид, показанный на рис. 1,*а*. При нечётном $n = 2k + 1$ количество рёбер $m = 3k + 2$, и одно из минимальных вершинных расширений имеет вид, показанный на рис. 1,*б*.