В [1] обсуждалась следующая задача: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является граф G.

Теорема 2. Пусть G — связный граф. Тогда $p(G) = m + l - k$, где m — количество ребер графа G; l — количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечётных вершин графа G; k — максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. №2(12). С. 96–100.
2. *Карманова Е. О.* Конгруэнции цепей: некоторые комбинаторные свойства // Прикладная дискретная математика. 2012. №2(12). С. 86–89.

УДК 519.17

О РЁБЕРНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ Δ-РАСКРАСКЕ[1]

А. М. Магомедов

Входные данные к расписанию обработки устройств — заданий множества X — в системе устройств-процессоров Y представлены двудольным графом $G = (X, Y, E)$, где ребро (x, y) присутствует в множестве E тогда и только тогда, когда процессору y запланирована операция над заданием x.

Расписание работы устройств будем называть *непрерывным*, если каждое устройство работает без простоев с момента его включения до выключения.

Пусть n — число вершин, Δ — наибольшая степень вершины графа G (Δ служит нижней границей для длин непрерывных расписаний). Известно, что задача о существовании непрерывного расписания NP-полна (как и задача о существовании непрерывного расписания длины Δ); в ряде источников она формулируется как задача об интервальной рёберной раскраске [1, 2].

Двудольные графы $G = (X, Y, E)$ с небольшими значениями Δ и n, не допускающие интервальной раскраски, были построены следующими авторами: С. В. Севастьяновым ($\Delta = 21$, $n = 28$), M. Malafiejcki ($\Delta = 15$, $n = 19$), A. Hertz ($\Delta = 14$, $n = 23$), D. de Werra ($\Delta = 14$, $n = 21$), P. Erdős ($\Delta = 13$, $n = 27$). Отметим, что ни один из этих графов не является бирегулярным.

Построен пример $(6, 3)$-бирегулярного графа с $n = 33$, не обладающего интервальной рёберной раскраской в 6 цветов (в [3] доказана NP-полнота задачи об интервальной раскрашиваемости $(6, 3)$-бирегулярного графа шестью цветами).

Теорема 1. Задача об интервальной рёберной раскраске Δ цветами остается NP-полной и для двудольных мультиграфов $G = (X, Y, E)$ с $|X| = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асратян А. С., Камалян Р. Р.* Интервальные раскраски рёбер мультиграфа // Прикладная математика. 1987. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. С. 25–34.
2. *Севастьянов С. В.* Об интервальной раскрашиваемости рёбер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61–72.

[1]Работа поддержана гос. заданием, проект № 01.1923.2011.

3. *Asratian A. S. and Casselgren C. J.* Some results on interval edge colorings of (α, β)-biregular bipartite graphs. Linköping, Sweden: Linköpingsuniversitet, 2006.

УДК 519.1

СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ПАРОСОЧЕТАНИЙ[1]

Т. А. Магомедов

В [1, с. 165] приведены следующие достаточные условия существования в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания множества X с множеством Y:

$$\min_{x\in X} d_G x \geqslant \max_{y\in Y} d_G y. \tag{1}$$

Необходимые и достаточные условия сформулированы в известной теореме Холла [1, с. 164].

Теорема 1. Для существования в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания множества X с множеством Y достаточно выполнение условий

$$\forall (x, y) \in E \ \ (d_G x \geqslant d_G y)\,,$$

которые в дальнейшем будем называть «условиями доминирования».

Определение 1. Пусть граф $G = (X, Y, E)$ удовлетворяет условиям доминирования. Если после удаления из E некоторого паросочетания условия доминирования выполняются, то данное удаление назовём *сохраняющим.*

Определение 2. Разбиение множества рёбер E графа $G = (X, Y, E)$ на последовательность $A, B, C, \ldots$ из Δ паросочетаний называется *непрерывным*, если любое ребро, инцидентное вершине $x \in X$, включено в одно из первых $d_G x$ паросочетаний данной последовательности.

Теорема 2. Пусть граф $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ удовлетворяет условиям доминирования; $G_i = (X_1, Y_i, E_i)$ — граф, полученный удалением из графа $G_{i-1} = (X_1, Y_{i-1}, E_{i-1})$ минимального паросочетания M_{i-1}, насыщающего все вершины наибольшей степени в G_{i-1}, $i = 2, \ldots, \Delta$. Тогда

1) каждое из этих удалений является сохраняющим;
2) $M_\Delta \equiv E_\Delta$ является полным паросочетанием множества X_1 с множеством Y_1 в G_1;
3) последовательность $M_\Delta, \ldots, M_1$ представляет непрерывное разбиение множества E_1 на Δ паросочетаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

УДК 519.17

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ОСТОВНОГО ДЕРЕВА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ

Л. И. Сенникова А., А. Кочкаров

В работе предлагается описание *параллельного алгоритма* $\mathscr{R}$ поиска остовного дерева минимального веса (ОДМВ) [1] на предфрактальном графе [2, 3].

[1]Работа поддержана гос. заданием, проект № 01.1923.2011.