Секция 6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.688

О ВОЗМОЖНОСТИ СОКРАЩЕНИЯ ПЕРЕБОРА В АЛГОРИТМЕ БАЛАША

Н. В. Анашкина

Предлагается оптимизация алгоритма Балаша на основании исследования особенностей геометрического строения окрестностей тупиковых точек.

Ключевые слова: *алгоритм Балаша, невязка, тупиковая точка.*

Широкий класс задач дискретной математики сводится к анализу и решению систем нелинейных уравнений. Известны методы сведения этих систем [1, 2] к системам линейных ограничений вида

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{array} \right. \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i — целые числа; $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Для нахождения решения (1) можно использовать как методы, работающие в действительной области, так и методы, позволяющие искать целочисленное решение [2–4]. Одним из таких алгоритмов является алгоритм Балаша, который предназначен для решения задач целочисленного программирования с булевыми переменными [1, 3, 5].

Для изложения алгоритма определим невязку системы (1) формулой

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{b_i - \sum\limits_j a_{ij}x_j > 0} \rho(\mathbf{x}, L_i),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\rho(\mathbf{x}, L_i)$ — расстояние от вершины n-мерного куба $\mathbf{x}$ до плоскости L_i, задаваемой i-м уравнением системы. Невязка $\mu(\mathbf{x})$ характеризует близость точки $\mathbf{x}$ к невыполнившимся неравенствам.

С геометрической точки зрения неравенства системы (1) задают разделяющие плоскости в n-мерном пространстве и введённая невязка представляет собой сумму расстояний от вершины $\mathbf{x}$ до отсекающих её плоскостей.

Алгоритм Балаша является локальным детерминированным траекторным алгоритмом. В качестве начального приближения $\mathbf{x}_0$ берётся вектор $(0, \dots, 0)$. В процессе поиска решения опробуются ближайшие к текущему векторы, на них вычисляется значение невязки системы, и следующим текущим становится вектор, на котором значение невязки минимально. Процесс продолжается до тех пор, пока не получим решение (нулевую невязку) или не попадём в тупиковую точку. Тупиковая точка характеризуется тем, что опробование всех векторов, отличающихся от полученного на предыдущем шаге одной ненулевой координатой, не приводит к уменьшению невязки. Существует несколько стратегий выхода из тупиковых точек, каждая из которых в конечном итоге приводит к увеличению числа опробуемых векторов и в худшем случае — к тотальному перебору.

Для некоторых классов систем вычислительная сложность работы алгоритма линейна [2, 3, 6]. При решении произвольной системы неравенств не всегда удаётся избежать попадания в тупиковую точку, в этом случае число итераций алгоритма зависит от количества встретившихся тупиковых точек. Естественно, что оптимизирующие модификации алгоритма должны тем или иным способом вести к уменьшению их количества. Одним из вариантов возможных модификаций является изменение критерия выбора приоритетного направления перемещения по вершинам n-мерного куба на основании учёта геометрических особенностей расположения плоскостей в окрестностях тупиковых точек.

Анализ причин попадания в тупиковые точки в процессе поиска решения с помощью алгоритма Балаша позволяет выявить в процессе работы алгоритма направления, продвижения в сторону которых приведёт к попаданию в тупиковую точку. Предположим, что на i-м шаге алгоритма при текущем векторе $\mathbf{x}_i$ минимальная невязка достигается на векторе $\mathbf{x}$, получаемом изменением j-й координаты $\mathbf{x}_i$, и при этом вектор $\mathbf{x}$ не является решением. Далее опробуются смежные с $\mathbf{x}$ векторы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, полученные заменой одной из его нулевых координат на 1. Рассмотрим следующие случаи расположения некоторой плоскости и вершин $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$:

1) плоскость отсекает вершину $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$;
2) плоскость отсекает $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$.

Переход в вершину $\mathbf{x}$ при выполнении одного из условий обязательно приведёт в тупиковую ситуацию. Поэтому вершина $\mathbf{x}$ не может стать текущей, даже если невязка для неё минимальна при опробовании на предыдущем шаге всех непройденных и смежных с вершиной $\mathbf{x}_i$ вершин. Из изложенного можно сделать вывод о том, что j-я координата вектора-решения равна нулю. Такой подход позволяет расставлять не только единицы, но и нули, строя приближение к вектору решений.

С алгоритмической точки зрения попадания в тупиковую ситуацию в ряде случаев можно избежать, анализируя состояние системы в момент перехода в следующую вершину. При этом достаточно ввести для опробуемых и текущей вершин векторы-индикаторы выполнившихся неравенств. С их помощью легко выявить возникновение в ходе работы алгоритма случаев 1 и 2. Модификация алгоритма требует дополнительной емкостной сложности $\mathrm{O}(m)$ и вычислительной сложности $\mathrm{O}(n)$.

Проиллюстрируем работу модифицированного алгоритма на примере решения следующей системы линейных ограничений:

$$\left\{\begin{array}{c}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_5 - 6x_6 + x_7 \geqslant -5,\\
-3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6 - x_7 \geqslant -3,\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 5x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant -3,\\
-x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 8x_7 \geqslant 4,\\
x_1 1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 6x_7 \geqslant 3,\\
-x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 \geqslant 12,\\
x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 - 4x_7 \geqslant 0.
\end{array}\right. \qquad (2)$$

Традиционный алгоритм Балаша стартует из вершины $x_0 = (0,0,0,0,0,0,0)$, в которой невязка системы $\mu(x_0) = 19$. Опробование одной проставленной единицы даёт минимальное значение невязки, равное 8, на векторе $x_1 = (0,0,0,0,0,0,\mathbf{1})$.

Из этого вектора, в свою очередь, последовательно переходим в $x_2 = (0, \mathbf{1}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{1})$ с $\mu(x_2) = 3$, $x_3 = (0, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ с $\mu(x_3) = 2$, $x_4 = (0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1})$ с $\mu(x_4) = 2$ и попадаем в тупиковую точку. Эта ветвь алгоритма потребовала проведения 25 вычислений невязок и так и не привела к успеху.

Предложенный модифицированный алгоритм уже на первом шаге устанавливает запрет на проставление единицы в первой и седьмой координатах вектора и присваивает шестой координате значение 1: $x_1 = 0$, $x_7 = 0$ и $x_6 = 1$. Отметим, что срабатывают первый и второй случаи стратегии запрета перехода в следующую вершину и блокируются возможности расстановки единиц соответственно по переменным x_7 и x_1, при этом $\mu(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = 8$ и является минимальной из всех посчитанных на первом шаге. В результате $x_1 = (\mathbf{0}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{0})$. На втором шаге запрещается присваивание единицы переменным x_3 и x_5, переменной x_2 даётся значение 1 и получается вектор $x_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$. Присваивание единицы четвёртой координате приводит к нахождению решения $x_3 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$. При этом модифицированная версия алгоритма потребовала вычисления невязки всего 11 раз.

Экспериментальные исследования, которые проводились на случайных системах неравенств, показали, что эффективность применения как базового алгоритма Балаша, так и его модификации зависит от структуры системы неравенств. Основным достоинством предложенной модификации алгоритма Балаша является исключение попадания в целые классы тупиковых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакин Г. В., Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 3. С. 389–401.
2. *Рыбников К. К., Никонов Н. В.* Прикладные задачи, сводящиеся к анализу и решению систем линейных неравенств. Метод разделяющих плоскостей // Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. 2002. № 2(22). С.191–195.
3. *Анашкина Н. В.* Использование алгоритма Балаша для нахождения решения системы линейных ограничений специального вида // Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. 2004. № 4(35). С. 176–179.
4. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1977. 432 с.
5. *Анашкина Н. В.* Обзор методов решения систем линейных неравенств // Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. 2004. № 1(32). С. 144–148.
6. *Гришухин В. П.* Среднее число итераций в алгоритме Балаша // Сб. статей. Численные методы в линейном программировании. М.: Наука, 1973. С. 31–38.

УДК 519.688

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ГЛАДКИХ ЧИСЕЛ

Д. С. Арбузов, Л. И. Туктарова

Приводятся результаты экспериментальных исследований трёх алгоритмов нахождения чисел, разложимых в заданной факторной базе: просеивания (с делением и логарифмического) и Бернштейна.

Ключевые слова: *гладкие числа, просеивание, алгоритм Бернштейна.*