УДК 519.214

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА МОНОТОННЫХ ЦЕПОЧЕК В СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛОЖНЫМ ПУАССОНОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

А. А. Минаков

Рассматривается распределение числа монотонных цепочек в последовательности независимых равномерно распределённых на множестве $\{0,\ldots,N-1\}$ случайных величин. С помощью метода Стейна получена оценка расстояния по вариации между распределением числа монотонных цепочек и сложным пуассоновским распределением. На основании оценки доказана предельная теорема для числа монотонных цепочек, где аппроксимирующим распределением является распределение суммы пуассоновского числа независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение.

Ключевые слова: *монотонные цепочки, оценка расстояния по вариации сложной пуассоновской аппроксимации, сложное пуассоновское распределение, метод Стейна.*

Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ есть отрезок последовательности, состоящий из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0,\ldots,N-1\}$.

Определение 1. Монотонной цепочкой длины s ($s \in \mathbb{N}$) с началом в t назовём событие $E_t = \{X_t, \ldots, X_{t+s-1} : X_t \leqslant X_{t+1} \leqslant \ldots \leqslant X_{t+s-1}\}$.

Введём случайную величину $\xi_n(s) = \sum\limits_{t=1}^{n-s+1} \operatorname{Ind}\{E_t\}$, равную числу монотонных цепочек длины s в последовательности X.

J. Wolfowitz [1] сформулировал условия сходимости распределения числа монотонных серий заданной длины в конечной бесповторной последовательности к распределению Пуассона и стандартному нормальному распределению. F. N. David и D. E. Barton [2] сформулировали условия для пуассоновской аппроксимации числа монотонных серий длины больше заданной в конечной бесповторной последовательности. Их результаты обобщил B. G. Pittel [3], который сформулировал теорему о сходимости распределения числа монотонных серий длины больше заданной к распределению Пуассона. O. Chryssaphinou, S Papastavridis и E. Vaggelatou [4] доказали теорему об аппроксимации распределения числа монотонных серий заданной длины в стационарной цепи Маркова пуассоновским распределением. Н. М. Меженная [5] сформулировала и доказала многомерную нормальную теорему для числа монотонных серий заданной длины.

Введём некоторые обозначения. Условимся обозначать $d(\Phi, \Psi)$ расстояние по вариации между распределениями Φ и Ψ. Для распределений Φ и Ψ на множестве $\{0, 1, \ldots\}$ справедлива следующая формула (теорема Шеффе):

$$d(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |\Psi\{m\} - \Phi\{m\}| .$$

Распределение случайной величины ζ будем обозначать $L(\zeta)$.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — последовательность неотрицательных действительных чисел, причём сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$. Пусть $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных величин, причём случайная величина θ_k имеет распределение Пуассона с параметром λ_k, $k \in \mathbb{N}$. Распределение случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\theta_k$ называется сложным распределением Пуассона, которое будем обозначать $CP\,(\Lambda)$.

На основе метода Стейна и результатов работ [6, 7] получена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — отрезок последовательности, состоящий из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0, \ldots, N-1\}$ и $N \geqslant 3$, тогда

$$d\left(L\left(\xi_n\left(s\right)\right), CP\left(\lambda N^{-1}\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-2}\left(1-N^{-1}\right), \lambda N^{-3}\left(1-N^{-1}\right), \ldots\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant (n-s+1)\,(6s-5)\begin{pmatrix} s+N \\ s \end{pmatrix}^2 \left(sN^{-1}+1\right)^{-2} N^{-2s}.$$

На основании результата теоремы 1 сформулируем предельную теорему для случайной величины $\xi_n\,(s)$.

Теорема 2. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — отрезок последовательности, состоящий из независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на множестве $\{0, \ldots, N-1\}$ и $N \geqslant 3$. Если $n, s \to \infty$ так, что

1) $s/n \to 0$,
2) величина $n\,(s+N)^{N-1} N^{-s+1} (N!)^{-1} \to \lambda$, где N и λ — константы, такие, что $N \geqslant 3$ и $\lambda > 0$,

то $L\,(\xi_n\,(s)) \to CP\,(\lambda N^{-1}\,(1-N^{-1}), \lambda N^{-2}\,(1-N^{-1}), \lambda N^{-3}\,(1-N^{-1}), \ldots)$.

Предельным распределением в теореме 2 является распределение суммы пуассоновского (с параметром λ) числа независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение (с параметром $1/N$). Так как N фиксировано, а $s \to \infty$, то число монотонных цепочек длины s, не содержащих все символы из множества $\{0, \ldots, N-1\}$, стремится к нулю. В пределе количества монотонных цепочек длины s в сериях независимы и имеют геометрическое распределение (с параметром $1/N$), а число таких серий распределено по закону Пуассона (с параметром λ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfowitz J.* Asymptotics distribution of runs up and down // Ann. Math. Statist. 1944. V. 15. P. 163–172.
2. *David F. N. and Barton D. E.* Combinatorial Chance. Hafner Publishing Co., New York, 1962.
3. *Pittel B. G.* Limiting behavior of a process of runs // Ann. Probab. 1981. V. 9. No. 1. P. 119–129.
4. *Chryssaphinou O., Papastavridis S., and Vaggelatou E.* Poisson approximation for the non-overlapping appearances of several words in Markov chains // Combinatorics, Probability and Computing. 2001. V. 10. No. 4. P. 293–308.
5. *Меженная Н. М.* Многомерная нормальная теорема для числа монотонных серий заданной длины в равновероятной случайной последовательности // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14. Вып. 3. С. 503–505.
6. *Roos V.* Stein's method for compound Poisson approximation: The local approach // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. No. 4. P. 1177–1187.
7. *Barbour A. D., Chen L. H. Y., and Loh W.-L.* Compound Poisson approximation for nonnegative random variables via Stein's method // Ann. Appl. Probab. 1992. V. 20. No. 4. P. 1843–1866.