УДК 519.178

СТРУКТУРНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРАФА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА РАЗРЕЖЕННЫХ ГРАФАХ

В. В. Быкова

Формализовано понятие разреженного графа через числовой параметр, известный как древовидная ширина графа. Предложен декомпозиционный подход решения оптимизационных задач на разреженных графах. Этот подход реализует принцип «разделяй и властвуй» и основан на атомарном представлении входного графа. Показано, что атомарное представление графа может быть построено за полиномиальное время. Приведены свойства атомов, определяющие границы применения предлагаемого подхода. Представлены результаты использования атомарного представления графа в решении двух оптимизационных задах: вычисление кратчайших путей и нахождение наибольшей клики графа. Время выполнения результирующих алгоритмов линейно зависит от числа вершин входного графа, что позволяет с их помощью обрабатывать разреженные графы большой размерности за реальное время.

Ключевые слова: *разреженный граф, алгоритмы на графах, древовидная ширина, дерево декомпозиции, атом графа.*

В современных приложениях приходится иметь дело с гигантскими графами, содержащими несколько миллионов вершин. Например, такие графы возникают при моделировании крупных поисковых систем, телекоммуникационных сетей, финансовых и рыночных структур. Для хранения описаний гигантских графов используется внешняя память компьютеров, а их обработка ведётся с помощью операций ввода-вывода. Всё это приводит к существенному снижению эффективности классических алгоритмов решения оптимизационных задач на графах. Решение этой проблемы следует искать в подходах, основанных на особенностях обрабатываемых графов. Замечено, что гигантским графам, возникающим в различных приложениях, присущи следующие свойства: разреженность — они имеют мало рёбер по сравнению с числом вершин; «скученность» — в этих графах наблюдаются семейства вершин с высокой степенью; сравнительно небольшой диаметр, что обеспечивает высокий уровень достижимости из одной вершины другой. Графы с подобными свойствами названы графами «тесного мира» (Small World Graphs, SWG) [1–3]. В настоящее время их изучение осуществляется с использованием вероятностных и детерминированных моделей. В первом случае моделью служат случайные графы Эрдеша — Реньи и Барабаши — Альберт [4], а во втором — обычные детерминированные разреженные графы. Вероятностные модели применяются для установления структурных характеристик SWG, таких, как коэффициент кластеризации, средняя длина пути и др. В рамках детерминированного подхода исследуются вычислительные технологии, расширяющие возможности классических алгоритмов обработки SWG. В данной работе предлагается детерминированный декомпозиционный подход решения оптимизационных задач для разреженных графов. Рассматриваются только простые графы, т. е. конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Используются понятия и обозначения, принятые в [5–7].

Уточним понятие разреженности графа. Связный граф $G = (V, E)$ называют разреженным (или неплотным), если число его рёбер $|E|$ удовлетворяет условию

$$|E| \leqslant \alpha n^{\beta}, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $1 \leqslant \beta < 2$ — положительные вещественные константы и $n = |V|$. Считают, чем меньше значение β, тем более разреженным является граф G. Для сравнения, в каждом дереве число рёбер равно $n - 1$, что отвечает нижней границе значения β, а для любого полного n-вершинного графа $|E| = n(n-1)/2$, что соответствует верхней границе значения β. Существует другое, более тонкое определение разреженного графа, которое выражается через числовой параметр, называемый древовидной шириной графа. Данный параметр в большей степени отражает внутреннюю структуру графа, чем соотношение (1). Он показывает, насколько близок граф G к дереву, а также ограничивает размеры его клик и сепараторов.

Напомним, что множество вершин S — клика графа $G = (V, E)$, если подграф $G(S)$ графа G, индуцированный множеством $S \subseteq V$, является полным. Говорят, что множество $S \subseteq V$ разделяет несмежные вершины a и b графа $G = (V, E)$, если вершины a и b принадлежат различным компонентам связности графа $G(V \setminus S)$. Множество S при этом называют (a, b)-сепаратором, а также — минимальным (a, b)-сепаратором, если в нём нет собственного подмножества, являющегося (a, b)-сепаратором. Сепаратор S минимальный, если в G существует такая пара вершин a и b, что S является минимальным (a, b)-сепаратором. Множество $S \subseteq V$ считают кликовым минимальным сепаратором графа G, если S образует в G одновременно клику и минимальный сепаратор.

Древовидная ширина связного графа вычисляется через специальное представление этого графа — дерево декомпозиции. Дерево декомпозиции графа $G = (V, E)$ определяется как пара (M, T), задающая некоторое разбиение множества вершин и множества рёбер данного графа. При этом $M = \{X_i \subseteq V : i \in I\}$ — семейство подмножеств множества V, именуемых «мешками», а $T = (I, W)$ — помеченное дерево, каждому узлу которого сопоставляется некоторый «мешок» из M. Для всякого дерева декомпозиции (M, T) графа $G = (V, E)$ семейство «мешков» M и множество рёбер W дерева $T = (I, W)$ обязательно должны удовлетворять следующим трём условиям: объединение всех «мешков» совпадает с множеством вершин V графа G; для всякого ребра графа G обязательно имеется хотя бы один «мешок», содержащий обе вершины этого ребра; для любой вершины графа G множество узлов дерева T, «мешки» которых содержат эту вершину, индуцирует связный подграф, являющийся поддеревом дерева T [6]. Всякое дерево декомпозиции (M, T) графа G характеризуется шириной, значение которой вычисляется по формуле $\max\{|X_i| - 1 : i \in I\}$. Для одного и того же графа может быть построено несколько различных деревьев декомпозиции, каждому из которых присуща некоторая ширина. Древовидная ширина графа $G = (V, E)$ определяется как наименьшая ширина всех допустимых его деревьев декомпозиции и обозначается через $\mathrm{tw}(G)$. Так, всякое n-вершинное дерево ($n \geqslant 2$) имеет единичную древовидную ширину, а полному n-вершинному графу свойственна древовидная ширина равная $n - 1$.

Пусть k — некоторая заданная положительная целая константа и $k < n = |V|$. Если $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$, то говорят, что граф $G = (V, E)$ обладает ограниченной (значением k) древовидной шириной. Считается, чем меньше значение k, тем более разреженным является граф G. Известно, что если $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$, то для числа рёбер графа $G = (V, E)$ справедливо неравенство

$$|E| \leqslant kn - k(k+1)/2. \tag{2}$$

Подстановка в (2) значений $k = 1$ и $k = n - 1$ приводит к неравенствам (1), соответствующим деревьям и полным графам. Следовательно, ограничение на древовидную ширину графа G не противоречит условию (1) и задает естественную меру разреженности этого графа. Подмечено, что большинство графов «тесного мира» имеют малую древовидную ширину (как правило, для них значение k не превышает 6). Далее будем полагать, что граф G, для которого требуется найти точное решение некоторой оптимизационной задачи, обладает ограниченной древовидной шириной, т. е. $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$, и при этом значение k намного меньше числа вершин графа G. Кроме того, будем считать, что этот граф имеет кликовые минимальные сепараторы. Эти предположения определённым образом формализуют свойства разреженности и «скученности» входного графа. Подобная формализация данных свойств объясняется следующими особенностями дерева декомпозиции [5]: это дерево представляет граф с точностью до клик и сепараторов, так как всякая клика графа всегда находится в отдельном «мешке»; пересечение «мешков» двух соседних узлов дерева декомпозиции задаёт сепаратор графа; чем меньше древовидная ширина графа, тем ближе этот граф к дереву и тем меньше у него по мощности клики и сепараторы.

Суть предлагаемого декомпозиционного подхода — это сведение решаемой задачи для разреженного графа большой размерности к конечному множеству таких задач для графов меньшей размерности. Процесс решения включает в себя три этапа. На первом этапе выполняется разбиение входного графа $G = (V, E)$ на конечное множество атомов $\Omega(G)$. Множество $\Omega(G)$ будем называть атомарным представлением графа G. Здесь атом графа G — это максимальный относительно включения связный его подграф, не имеющий кликовых минимальных сепараторов. Второй этап — это решение задачи для каждого образованного атома с помощью некоторого известного классического алгоритма. И наконец, на третьем этапе осуществляется построение решения задачи для графа G путём попарного соединения (или связывания) решений, полученных для всех его атомов. С вычислительной точки зрения такой декомпозиционный подход целесообразен, если выполнены следующие условия: атомарное представление $\Omega(G)$ входного графа $G = (V, E)$ может быть построено за полиномиальное время; атомарное представление $\Omega(G)$ допускает корректное связывание решений, выполняемое на третьем этапе; количество атомов в $\Omega(G)$ не превосходит числа вершин графа G; число вершин каждого атома из $\Omega(G)$ ограничено сверху некоторой положительной целой константой $k < n = |V|$. В работе показано, что если входной граф обладает малой древовидной шириной и содержит кликовые минимальные сепараторы, то эти требования выполнимы. При этом атомарное представление $\Omega(G)$ графа $G = (V, E)$ может быть построено за время $\mathrm{O}(n^\tau)$, $2 \leqslant \tau < 3$.

Заметим, что атомарное представление $\Omega(G)$ графа G является обобщением разложения его на блоки: когда множество кликовых минимальных сепараторов состоит лишь из точек сочленения графа G, каждый атом из $\Omega(G)$ представляет собой блок этого графа. Известно, что разложение графа на блоки уникально [7]. Аналогичное утверждение справедливо также для атомарного представления графа [5]: если множество $\Omega(G)$ формировать лишь на основе кликовых (и никаких других) минимальных сепараторов, то $\Omega(G)$ уникально для всякого связного графа G. Отметим наиболее важные свойства атомов: всякий атом из $\Omega(G)$ является индуцированным подграфом графа G; если граф G имеет ограниченную (значением k) древовидную ширину, то число вершин каждого атома не превышает k; множество $\Omega(G)$ сохраняет все клики графа G, т. е. всякая клика графа G становится кликой одного из его атомов и новых клик при разложении не возникает. Таким образом, атомарное представление графа применимо к оптимизационным задачам на графах, базирующимся на отношении смежности. К ним, в частности, относятся такие задачи: поиск кратчайших путей, нахождение наибольшей клики, вычисление хроматического числа, определение наибольшего независимого множества вершин графа, поиск наименьшего пополнения графа до хордального, распознавание класса совершенных графов и др. Большинство из этих задач являются NP-трудными.

В работе атомарное представление графа применено к двум оптимизационным задачам: вычислению кратчайших путей для всех пар вершин взвешенного графа (All-Pairs Shortest-Path, APSP) и нахождению наибольшей клики графа (Maximum-Clique-Problem, MCP). Первая задача полиномиально разрешимая, а вторая NP-трудная. Совместное использование алгоритма Флойда — Уоршолла [7] и атомарного представления входного n-вершинного графа позволяет находить точное решение задачи APSP за время $\mathrm{O}(nk^3)$. Применение алгоритма Уилфа [7] к каждому атому и связывание решений, полученных для всех атомов входного графа, приводит к точному решению задачи MCP за время $\mathrm{O}(n \cdot 1{,}39^k)$. Заметим, что в обоих случаях время нахождения решения линейно зависит от n. Кроме того, чем меньше значение k, т. е. чем более разреженным является входной граф, тем быстрее работает алгоритм.

Таким образом, предложенный декомпозиционный подход даёт возможность создавать алгоритмы, способные за реальное время обрабатывать разреженные графы большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gardiner E., Willett P., and Artymiuk P.* Graph-theoretic techniques for macromolecular docking // J. Chem. Inf. Comput. 2000. No. 40. P. 273–279.
2. *Broder A., Kumar R., Maghoul F., et al.* Graph structure in the Web // Comput. Networks. 2000. V. 33. P. 309–320.
3. *Boginski V., Butenko S., and Pardalos P. M.* Mining market data: A network approach // Comput. & Operat. Res. 2006. No. 33. P. 3171–3184.
4. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.
5. *Быкова В. В.* О разложении гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2012. № 1(5). С. 36–45.
6. *Быкова В. В.* FPT-алгоритмы на графах ограниченной древовидной ширины // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(16). С. 65–78.
7. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В.И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

УДК 519.1

ФОРМАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ В ТЕРМИНАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Гоцуленко

Рассмотрены некоторые обобщения числа размещений с повторениями при различных типах ограничений. Подсчёт данных комбинаторных чисел приводит к определению числа целых неотрицательных решений систем линейных диофантовых уравнений при соответствующих дополнительных ограничениях. Получены производящие функции и интегральные формулы для вычисления введённых