

Н-МОДЕЛИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

А. В. МЕДВЕДЕВ

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнёва (г. Красноярск)
saor_medvedev@sibsau.ru

Рассматривается проблема моделирования дискретно-непрерывных процессов в условиях неопределенности и наличия случайных факторов. Подобные процессы часто встречаются в организационных системах. Исследуется случай, когда процесс имеет «трубчатую» структуру в пространстве «входных-выходных» переменных. Приводятся Н-модели подобных процессов, представляющих собой органический синтез параметрических и непараметрических моделей. Специально исследуется случай, приводящий к возникновению пространств дробной размерности, а также изменяющейся с течением времени размерности пространства. Даны формулы вычисления размерности пространства, а также результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: модель, неопределенность, индикаторная функция, непараметрические модели, дробная размерность пространства, изменяющаяся размерность пространства.

*Даже незначительное отступление от истины в дальнейшем ведет к бесконечным ошибкам.
Демокрит*

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование многих организационных процессов приводит к необходимости установления стохастических связей между входными и выходными переменными. Одна из трудностей, возникающих на этом пути, состоит в экспертном оценивании значений компонент выходной переменной, которое осуществляется со значительными задержками. Это

приводит к тому, что объект, по существу динамический, может быть представлен только как статический с запаздыванием.

Такой процесс можно представить в виде [1]

$$x(t) = f(u(t - \tau), \xi(t)), \quad (1)$$

где $x(t)$ – выходная переменная объекта, $u(t - \tau)$ – векторная входная переменная, τ – запаздывание, $\xi(t)$ – случайное возмущение, действующее на объект, t – непрерывное время. Покажем это на нижеследующем рисунке:

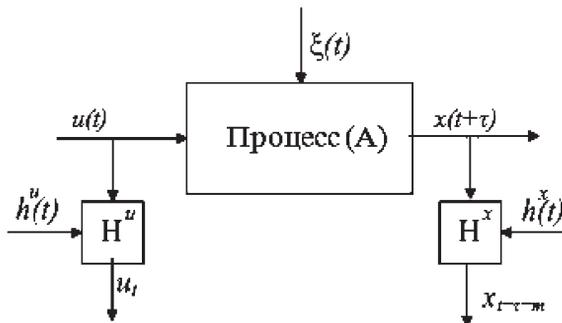


Рис. 1. Принятая схема контроля «входных-выходных» переменных процесса

На рисунке 1 показаны каналы измерения H с соответствующими дискретностями контроля измерения $u(t)$ и $x(t)$. Таким образом, выборка наблюдений в дискретном виде может быть представлена следующим образом: $u[t]$, $x[t + n + m]$, где n – дискретность запаздывания, $n = \tau / \Delta t$, а m – задержка, вызванная длительностью контроля T , $m = T / \Delta t$, $t = 1, 2, \dots, s$. Осуществляя сдвиг реализации x_t , $t = 1, \dots, s$ на $(n + m)$ тактов, выборку наблюдений можно переписать следующим образом: $\{u_t, x_t, t = 1, \dots, s\}$ и, без нарушения общности, свести задачу идентификации к идентификации статического объекта с запаздыванием.

Наиболее общая схема исследуемого организационного процесса представлена на рис. 2 [2].

На рисунке 2 приняты обозначения: $\delta(t)$, $z(t)$, $q(t)$ – выходные переменные процесса, $\dot{e}(t)$ – управляющее воздействие, $\mu(t)$ – входная неуправляемая, но измеряемая переменная процесса, $\lambda(t)$ – входная неуправляемая и неизмеряемая переменная процесса, $\theta(t)$ – переменная, регламентирующая ход процесса (стандарты, распоряжения, приказы и т.п.), $\xi(t)$ – случайное воздействие, $\omega^i(t)$: $i = 1, 2, \dots, k$ – промежуточные переменные, характеризующие состояние процесса, (t) – непрерывное время, H^μ , H^u , H^x , H^z , H^q , H^ω , H^θ – каналы связи, соответствующие различным переменным, включающие в себя средства контроля, μ_t , u_t , x_t , $z_{\Delta T}$, q_T , ω_t , θ_t – означает измерение $\mu(t)$, $\dot{e}(t)$, $x(t)$,

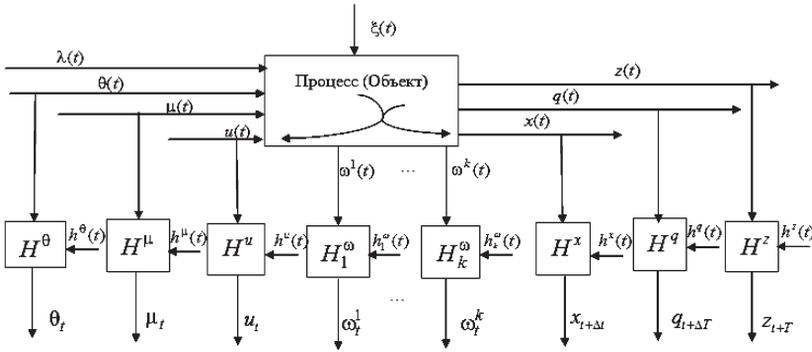


Рис. 2. Общая схема исследуемого организационного процесса

$z(t)$, $q(t)$, $\omega(t)$, $\theta(t)$ в дискретное время, $h^\mu(t)$, $h^u(t)$, $h^x(t)$, $h^z(t)$, $h^q(t)$, $h^\omega(t)$, $h^\theta(t)$ со значком сверху – случайные помехи измерений соответствующих переменных процесса.

Отметим существенное отличие выходных переменных $z(t)$, $q(t)$ и $x(t)$, представленных на рис. 2. Выходная переменная $x(t)$, равно как и входные, контролируется через интервалы времени Δt , $q(t)$ контролируются через существенно большие интервалы времени ΔT , z – через T ($T > \Delta T > \Delta t$). С практической точки зрения для исследуемого процесса наиболее важным часто является контроль переменных $z(t)$. Особенностью здесь является то, что измеренное значение выхода объекта станет известным только через определенные промежутки времени, этим объясняется задержка в измерениях выходных переменных объекта $x(t)$, $q(t)$ и $z(t)$. В активных системах «измерения» многих переменных осуществляются экспертами или группой экспертов, а иногда в виде опроса респондентов.

В этом случае значения выходных переменных зависят от входных переменных и значений $\omega(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A(u(t), \mu(t), \omega(t), \lambda(t), \theta(t), \xi(t), t). \\
 q(t) &= A(u(t), \mu(t), \omega(t), \lambda(t), \theta(t), \xi(t), x(\cdot), t). \\
 z(t) &= A(u(t), \mu(t), \omega(t), \lambda(t), \theta(t), \xi(t), x(t), q(\cdot), t)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

При моделировании подобных процессов, учитывая различную дискретизацию контроля измерений $x(t)$, $q(t)$ и $z(t)$ при прогнозировании $q(t)$ и $z(t)$ естественно использовать весь набор переменных, влияющих на прогноз $x(t)$, $q(t)$, $z(t)$.

Для дальнейшего изложения, без нарушения общности, «свернем» все входные и выходные переменные в соответствующие векторы. Тогда исследуемый процесс по некоторым каналам может быть представлен в следующем виде (рис. 3).

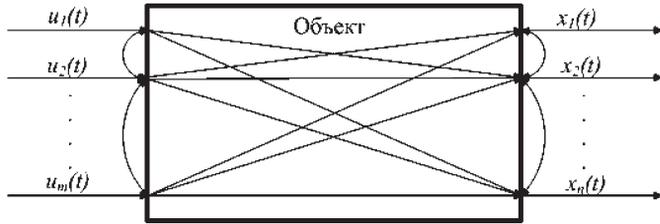


Рис. 3. Один из каналов исследуемого процесса

Показанные на рис. 3 дугообразные стрелки процесса характеризуют влияние отдельных входных компонент на те или иные компоненты вектора выхода системы. Стрелки между компонентами вектора входных переменных $u(t)$ и вектора выходных переменных $x(t)$ характеризуют стохастическую связь между соответствующими компонентами.

Моделирование организационного процесса

Пусть $u = (u_1, \dots, u_k) \in \Omega(u) \subset R^k$, $x \in \Omega(x) \subset R^l$. Вообще говоря, каждая компонента вектора $u_i \in [a_i; b_i]$, $i = \overline{1, k}$, а $x \in [c; d]$. При исследовании реальных процессов значения коэффициентов $\{a_i, b_i, c, d\}$, $i = \overline{1, k}$ всегда известны. В дальнейшем, без нарушения общности, эти интервалы примем единичными, тогда $\Omega(u)$ – единичный гиперкуб, $\Omega_k(u) = [0; 1]$, т.е. $u \in [0; 1]$, $\Omega_{k+1}(u, x) = [0; 1]$ (u, x) $\in \Omega_{k+1}$.

Задачу идентификации часто сводят к параметрической, состоящей из двух основных этапов: первый этап – выбор (определение) параметрической модели (1) в виде $\hat{x} = \hat{f}(u, \alpha)$, где α – вектор параметров, второй этап – последующая оценка параметров α на основании поступающих элементов выборки (u_1, x_1) (u_2, x_2) ... (u_s, x_s) , т.е. получение оценки α_s .

Такова общая схема решения задач параметрической идентификации. Отметим только, что наиболее «слабым» местом здесь является выбор параметрической структуры модели. Если на первом этапе допущена достаточно грубая ошибка, то, в итоге, полученная модель вряд ли будет удовлетворительной. Эта проблема достаточно подробно обсуждалась в [7]. Там же предложен новый класс K -моделей, учитывающий в комплексе знание фундаментальных законов, другую априорную информацию об объекте, в том числе разнотипную. Обратим внимание на то, что параметрические модели типа $\hat{x} = \hat{f}(u, \alpha)$ представляют собой гиперповерхности в пространстве «входных-выходных» переменных объекта, т.е. $(u, x) \in \Omega(u, x) \subset R^{k+l}$.

Проанализируем два важных обстоятельства, возникающих при моделировании реальных процессов [3]. Первое из них состоит в том, что объем выборки S , $\{x_i, u_i, i = \overline{1, S}\}$ катастрофически мал по отношению к

размерности вектора $u = (u_1, \dots, u_k) \in \Omega(u)$, как того «требует» математическая статистика. Например, в практических задачах часто возникает ситуация, когда $k = 20 \div 30$, а $s = 90 \div 100$. Иными словами, в этом случае нельзя получить удовлетворительного решения задачи идентификации. Второе обстоятельство состоит в том, что если построена модель типа (4), по имеющимся данным, то при $u \in \Omega(u) \subset R^k$ можем получить оценку $x_s \notin \Omega(x)$, т.е. вне допустимых значений. Оба эти факта могут быть объяснены, исходя из следующих соображений.

Итак, исследуемый процесс, без нарушения общности, протекает в единичном кубе $\Omega(u, x) = \Omega(u_1, u_2, x) \subset R^3$. Если опустить влияние случайных возмущений $\xi(t)$ и погрешностей измерений u_1, u_2, x , т.е. отсутствие h^u, h^x и ξ из соображений простоты иллюстраций, то процесс протекает по поверхности $\Omega^H(u, x) \subset \Omega(u, x)$, как это следует из модели класса (4), представляющей собой поверхность $\Omega(u, x)$. Реальный же процесс проходит по линии J (рис. 4а), лежащей на поверхности $S(u, x) \subset \Omega(u, x)$, т.е. $J \in S(u, x)$. Из рисунка 4а видно, что точка $C \notin S(u, x)$, $B \in S(u, x)$, но $B \notin J$, и точка $A \in J \subset S(u, x) \subset \Omega(u, x)$. А на рисунке 4б представлен случай, учитывающий влияние помех h и ξ . Важно заметить, что априори неизвестно, имеет ли исследуемый процесс «трубчатую» структуру. На этот факт было обращено внимание в [4]. Для того чтобы установить это, необходимо, как это обычно делается, построить модель и проанализировать поведение оценок $\hat{x}(u_j)$ при произвольных значениях компонент вектора $u_j = (u_1^j, \dots, u_k^j) \in \Omega(u)$.

Если исследуемый процесс имеет «трубчатую» структуру, то его модель может быть взята в виде

$$x_s(u) = F(u, \alpha, \bar{u}_s, \bar{x}_s), \tag{3}$$

где \bar{u}_s, \bar{x}_s – временные векторы, $\bar{u}_s = (u_1, u_2, \dots, u_s)$, $\bar{x}_s = (x_1, x_2, \dots, x_s)$, $F(\cdot)$ – не-

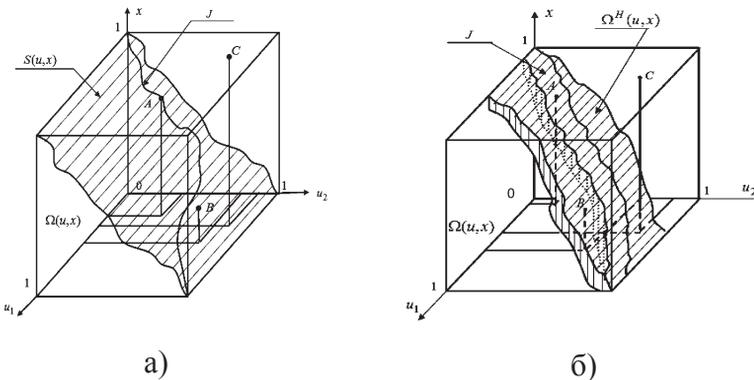


Рис. 4. Примеры Н-процессов

который функционал, включающий в себя как параметрическую составляющую, так и соответствующие непараметрические оценки. Таким образом, модель класса (3) представляет собою «генетический» продукт от методов параметрической и непараметрической идентификации. Иными словами, он есть «дитя» от «родителей» – методов параметрической и локальной аппроксимации.

В частном случае можно подкорректировать стандартную модель следующим образом:

$$\hat{x}_s(u) = \hat{f}(u, \alpha_s) I_s(u) \quad (4)$$

либо

$$\hat{x}_s(u) = I_s(u) \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(u), \quad (5)$$

где индикатор $I_s(u)$ имеет вид:

$$I_s(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in \Omega^H(u); \\ 0, & \text{если } u \notin \Omega^H(u). \end{cases} \quad (6)$$

Заметим лишь, что, вообще говоря, область $\Omega^H(u)$ нам не известна, а известна лишь выборка $\{x_i, u_i, i = \overline{1, s}\}$. Если индикатор равен нулю, то оценка $\hat{x}(u)$, $\hat{x}_s(u)$ не может быть вычислена, т.е. при таких значениях компонент вектора $u \in \Omega(u)$ процесс протекать не может. Если индикатор $I_s(u)$ при любом значении $u \in \Omega(u)$ равен единице, то модель (4) совпадает с общеизвестными. В качестве оценки индикатора $I_s(u)$ можно принять следующее приближение:

$$I_s(u) = \text{sgn}(sc_s)^{-1} \sum_{i=1}^s \Phi(c_s^{-1}(x_s(u) - x_i)) \prod_{j=1}^k \Phi(c_s^{-1}(u^j - u_i^j)), \quad (7)$$

где

$$x_s(u) = \sum_{i=1}^s x_i \prod_{j=1}^k \hat{O}(c_s^{-1}(u^j - u_i^j)) / \sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^k \hat{O}(c_s^{-1}(u^j - u_i^j)), \quad (8)$$

а параметр размытости c_s и колоколообразная функция $\hat{O}(\cdot)$ удовлетворяют условиям [5].

Об одной особенности моделирования «трубчатых» процессов

Приведем следующий пример, имеющий отношение к идентификации безынерционной системы. Пусть объект описывается уравнением

$$x(u) = f(u_1, u_2, u_3), \quad (9)$$

где трехмерный вектор $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ является входной переменной, а $x \in R^1$ – выходная переменная. Традиционный путь построения модели процесса, описываемого (9), состоит в определении класса параметрических зависимостей $\hat{x}(u) = f(u_1, u_2, u_3, \alpha)$ и последующей оценки параметров α тем или иным способом по выборке наблюдений $(u_i, x_i), i = \overline{1, s}$, где s – объем выборки. Проанализируем этот пример с разных точек зрения. Пусть компоненты вектора входных переменных $u = (u_1, u_2, u_3)$ стоха-

стически никак не связаны, т.е. независимы. В этом случае естественно использовать обычный традиционный прием, описанный выше. Теперь предположим, что объективно компоненты вектора входных переменных функционально связаны, например,

$$u_2 = \varphi_1(u_1), u_3 = \varphi_2(u_2) = \varphi_2(\varphi_1(u_1)). \quad (10)$$

Естественно, исследователь не знает о существовании зависимостей (10). В противном случае можно было бы сделать подстановку (10) в (9) и получить следующую зависимость x уже от одной переменной u_1 вида

$$x(u) = f(u_1, \varphi_1(u_1), \varphi_2(\varphi_1(u_1))). \quad (11)$$

Таким образом зависимость (9) в приведенных выше условиях может быть сведена к одномерной зависимости x от u_1 .

В случае, если зависимость u_3 от u_2 объективно отсутствует, то (9) легко приводится к виду

$$x(u) = f(u_1, \varphi_1(u_1), u_3), \quad (12)$$

т.е. к двумерной зависимости x от u_1, u_3 . Отсюда можно заключить, что при наличии функциональной зависимости между компонентами вектора u мы получаем зависимость x от u , в данном случае – одно-двух-трехмерные. Подчеркнем еще раз, что о наличии функциональных зависимостей между компонентами вектора входных переменных исследователю не известно. Просто мы проанализировали случай: «Если бы...». А теперь проанализируем наиболее интересный случай, имеющий непосредственное отношение к Н-процессам. Пусть u_3 и u_2 , хотя и неизвестным образом, но стохастически связаны. Подчеркнем – стохастически, а не функционально. Вернемся еще раз к анализу того, что произошло. Во-первых, если компоненты вектора u независимы, то исследуемый процесс описывается функцией трех переменных. Если две компоненты вектора входных переменных u связаны функциональной зависимостью, то процесс описывается функцией двух переменных. Наконец, если две переменные связаны стохастически, то процесс описывается функцией более чем двух переменных и менее чем трех?! Можно считать, что мы приходим к зависимости от дробного числа переменных и, следовательно, к пространству дробной размерности. Такой факт в математике был уже известен, правда, истоки его лежали в области геометрических исследований природных объектов и описаны в книге Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы» [4]. Приведем небольшой фрагмент: «Жидкость, газ, твердое тело – три привычных физических состояния вещества, существующего в трехмерном мире. Но какова размерность клуба дыма, облака, точнее их границ, непрерывно размываемых турбулентным движением воздуха? Оказалось, что она больше двух, но меньше трех. Дробная величина! Аналогичным образом можно посчитать и размерность других реальных природных объектов – например, береговой линии, размываемой прибоем,

или кроны дерева, шелестящей под ветром. Кровеносная система человека – пульсирующая, живая – имеет размерность 2.7». Ранее этот факт был известен как размерность пространства Хаусдорфа – Безиковича. Из опыта разработки некоторых компьютерных систем моделирования и управления дискретно-непрерывными процессами мы приходим к заключению о том, что многие реально существующие процессы могут быть отнесены к классу Н-процессов, а их модели – к классу Н-моделей.

Моделирование динамических процессов. В общем виде модель линейной динамической системы может быть описана уравнением

$$x_t = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^k b_i u_{t-i+1}, \quad (13)$$

где x и u – соответственно выходная и входная переменные объекта. Введём векторные обозначения:

$z_t = (x_{t-1}, \dots, x_{t-m}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k})$, $\alpha = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k)$,
тогда уравнение (13) переписывается в виде

$$x_t = \sum_{i=1}^{\theta} \alpha_i z_{t,i}, \quad (14)$$

где $\theta = k + m$. На рисунке 5 представлен аналог объекта (13) при $k=1$.



Рис. 5. Схема объекта

Следует обратить внимание на тот факт, что мы, по существу, свели задачу идентификации линейной динамической системы к задаче идентификации многомерного линейного объекта без памяти. К сожалению, это не приводит к каким-либо упрощениям решения исходной задачи, а разве лишь к алгоритмической простоте.

В случае, если процесс относится к классу нелинейных динамических, то

$$x_t = \Psi(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-m}, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-k+1}), \quad (15)$$

где $\Psi(\cdot)$ – некоторая функция. Для динамических объектов А. А. Фельдбаум использовал термин – объект с памятью. Мне представляется, что объект с памятью и динамический объект не всегда одно и то же, например, $x_t = \Psi(x_{t-q}, u_{t-h})$, где θ и η принимают некоторые целочисленные значения. В частности,

$$x_t = \Psi(x_{t-1}, x_{t-3}, x_{t-7}, u_{t-1}, u_{t-5}). \quad (16)$$

Выражение (16) может не являться дискретным аналогом какого-либо дифференциального уравнения.

О пространстве с изменяющейся размерностью. Рассмотрим следующую ситуацию [7]. Из простоты соображений, пусть интересующий нас процесс описывается уравнением (9).

В случае стохастической зависимости между переменными $u_2(u_1)$, $u_3(u_1)$ по имеющимся в наличии обучающим выборкам можно вычислить квадратичную ошибку прогноза $u_{2s}(u_1)$, $u_{3s}(u_1)$. Здесь $u_{2s}(u_1)$, $u_{3s}(u_1)$ есть непараметрические оценки.

$$\delta_{21} = \sum_{i=1}^s (u_2 - u_{2s}(u_1))^2 / \sigma_{u_2}^2, \quad \delta_{31} = \sum_{i=1}^s (u_3 - u_{3s}(u_1))^2 / \sigma_{u_3}^2, \quad (17)$$

где δ_{21} и δ_{31} – квадратичные ошибки, полученные при непараметрическом восстановлении принятых зависимостей. При наличии функции многих переменных могут быть приняты и другие варианты зависимостей одних компонент вектора входа от других. Возвращаясь к предыдущему примеру, «силу» стохастической связи λ между двумя произвольными переменными можно, например, вычислить по формуле

$$\lambda = 1 - \delta, \quad (18)$$

где δ может быть равно δ_{21} либо δ_{31} .

Отсюда видно, что самая сильная стохастическая связь (функциональная) равна 1, отсутствие связи при $\lambda=0$, а при стохастической зависимости между входными переменными $0 < \lambda < 1$.

Если в более общем случае такого рода процессы интерпретировать как функции многих переменных, то изменчивость этой функции во времени может быть, например, показана на нижеследующей цепочке соотношений, действующих во времени.

$x = f(t, \mathbf{u1}, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, \mathbf{u4}, \mathbf{u5})$	– T1	
$x = f(t, u1, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5})$	– T2	
$x = f(t, u1, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5})$	– T3	
$x = f(t, u1, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5})$	– T4	
$x = f(t, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5}, u6)$	– T5	
$x = f(t, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5}, u6)$	– T6	
$x = f(t, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, u4, \mathbf{u5}, u6)$	– T7	
$x = f(t, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}, \mathbf{u5}, u6)$	– T8	(19)
$x = f(t, u1, \mathbf{u2}, u3, u4, \mathbf{u5}, \mathbf{u6}, u7)$	– T9	
$x = f(t, u1, u2, u3, u4, \mathbf{u5}, \mathbf{u6}, u7)$	– T10	
$x = f(t, u1, u2, u3, u4, \mathbf{u5}, u6, u7)$	– T11	
$x = f(t, \mathbf{u1}, u2, u3, \mathbf{u4}, u5, u6, u7)$	– T12	
$x = f(t, \mathbf{u1}, u2, \mathbf{u3}, \mathbf{u4}, u5, u6, u7)$	– T13	
$x = f(t, \mathbf{u1}, u2, \mathbf{u3}, \mathbf{u4}, u5, \mathbf{u7})$	– T14	

Поясним наши обозначения. Наиболее темным цветом (**u1**) обозначены переменные, которые оказывают самое сильное влияние на x (возможно, функциональная зависимость). Менее темное обозначение (**u1**) говорит о более слабом влиянии переменной на x (возможно, стохастическая зависимость), более слабое влияние на x оказывают **u1** и **u1**. T_i , где $i = \overline{1,9}$ – интервалы существования соответствующих зависимостей. Таким образом, в реально действующих процессах подобного рода роли значения переменных существенно изменчивы. Из приведенных выше зависимостей видно, что некоторые переменные могут утрачивать свое значение, а некоторые утрачивают, а потом восстанавливаются, а некоторые новые переменные появляются впервые, как, например, **u6**, **u7**. В более общем виде модель организационного процесса может быть представлена следующей цепочкой соотношений:

$$\begin{aligned}
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t)) & - T1, t \in [t_0, t_1] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t)) & - T2, t \in [t_1, t_2] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t)) & - T3, t \in [t_2, t_3] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t)) & - T4, t \in [t_3, t_4] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t)) & - T5, t \in [t_4, t_5] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t)) & - T6, t \in [t_5, t_6] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t)) & - T7, t \in [t_6, t_7] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t)) & - T8, t \in [t_7, t_8] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T9, t \in [t_8, t_9] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T10, t \in [t_9, t_{10}] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T11, t \in [t_{10}, t_{11}] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T12, t \in [t_{11}, t_{12}] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T13, t \in [t_{12}, t_{13}] \\
 x &= f(t, \mathbf{u1}(t), \mathbf{u2}(t), \mathbf{u3}(t), \mathbf{u4}(t), \mathbf{u5}(t), \mathbf{u6}(t), \mathbf{u7}(t)) & - T14, t \in [t_{13}, t_{14}]
 \end{aligned} \tag{20}$$

Если сохранить математический «облик» интерпретации функции многих переменных как точку многомерного пространства, то при наличии «грубчатого» процесса мы приходим к пространству дробной размерности F^1 . Вычисление размерности F^1 можно осуществить, например, так:

$$\dim F^\lambda = (n+1) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,i+1}, \tag{21}$$

где n – размерность вектора u , а $\lambda_{i,i+1}$ означает «силу» стохастической связи между u_i и u_{i+1} .

В принципе, могут быть предложены и другие схемы вычисления размерности пространства. Например,

$$\dim F_1^\lambda = (n+1) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{1,i+1}, \tag{22}$$

где $\lambda_{1, i+1}$ – зависимость всех компонент вектора u от одной компоненты u_i .

При достаточно внимательном анализе разложения функций в ряды уместно вспомнить фразу В.И.Арнольда из замечательной книги «Теория катастроф» [5]: «Вычисления в этих прикладных¹ исследованиях обычно проводились без общей теории за счет правильного отбрасывания одних членов ряда Тейлора и оставления других, наиболее важных. Из физиков, особенно систематически применявших теорию катастроф до ее возникновения, стоит особо выделить Л.Д. Ландау. В его руках искусство отбрасывать «несущественные» члены ряда Тейлора, сохраняя меньшие по величине «физически важные» члены, дало много включаемых в теорию катастроф результатов».

Вычислительные эксперименты. Пусть процесс описывается функцией $x = f(u_1, u_2)$ и находится под воздействием помехи $\xi(t)$. Примем обучающую выборку равной 500, входные переменные – независимы, также покажем зависимость размерности пространства F^λ от s .

На рисунке 6 видно, что при независимых входных переменных, размерность процесса близка к 7.

Рисунок 7 иллюстрирует, что при небольшой выборке, размерность F^λ уменьшается, но при увеличении выборки размерность пространства F^λ близка к 7.

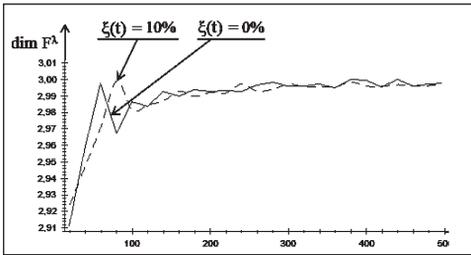


Рис. 6. Зависимость размерности пространства F^λ от уровня помех

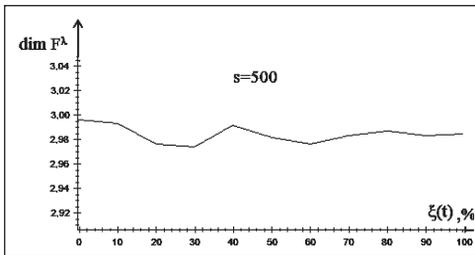


Рис. 7. Зависимость размерности пространства F^λ от объема выборки

¹ Здесь речь идет о теории упругости.

Рассмотрим процесс, имеющий «трубчатую» структуру, то есть Н-процесс.

Видно, что у Н-процесса, в этом случае, размерность пространства близка к двум (рис. 8). Объясним причину данного явления.

Пусть $x = f(u_1, u_2)$, но вследствие того, что данный процесс имеет «трубчатую» структуру, $u_2 = g(u_1)$, соответственно, $x = f(u_1, u_2) = f(u_1, g(u_1))$. В итоге имеем процесс, описываемый одной переменной. При увеличении помехи связь между u_1 и u_2 ослабевает, соответственно, и размерность процесса растет.

В проведенных экспериментах (рис. 9) $\dim F^\lambda$ отличаются друг от друга, что является следствием того, что u_2 во втором эксперименте стохастически зависит от u_1 . Далее проведем эксперимент, когда на входе про-

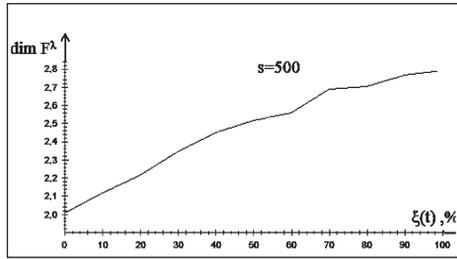


Рис. 8. Зависимость размерности пространства F^λ от уровня помех

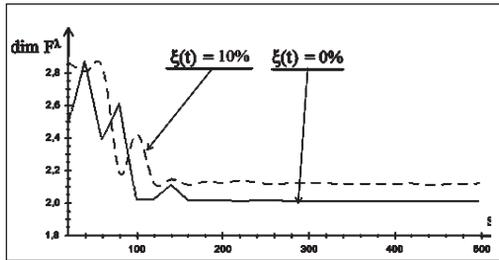


Рис. 9. Зависимость размерности пространства F^λ без помех и с помехой 10%

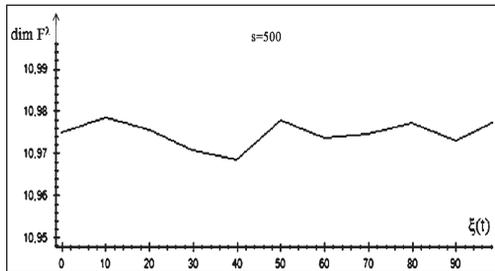


Рис. 10. Зависимость размерности пространства F^λ от уровня помех

цесса действуют 10 независимых переменных, а выход, без нарушения общности, скалярный.

На рисунке 10 видно, что размерность близка к 11. Рассмотрим случай, когда в первом эксперименте на процесс действует 10% помеха, а во втором – отсутствует.

На рисунке 11 размерность пространства F^λ , как и следовало ожидать, приближается к 11.

Вычислим размерность пространства F^λ в зависимости от уровня помех, если все входные воздействия стохастически зависимы (рис. 12).

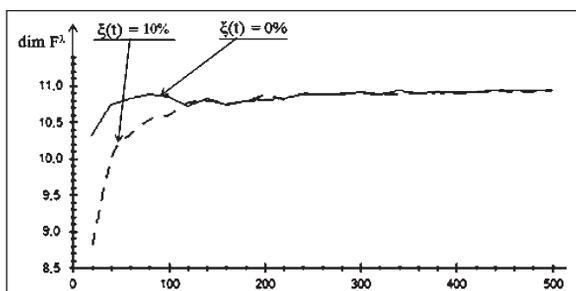


Рис. 11. Зависимость размерности пространства F^λ от объема выборки

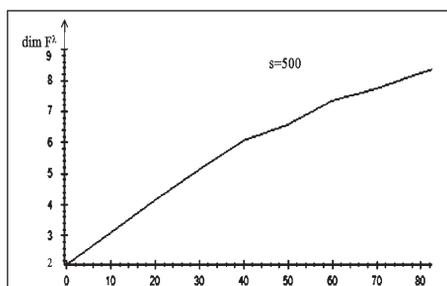


Рис. 12. Зависимость размерности пространства F^λ от уровня помех

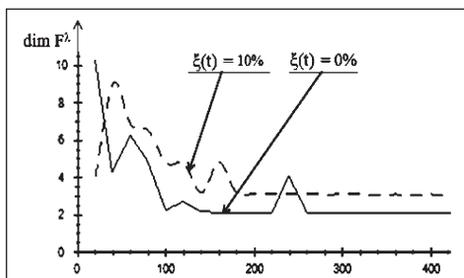


Рис. 13. Зависимость размерности пространства F^λ от объема выборки

Как и предполагалось, размерность пространства F^z при функциональной зависимости компонент вектора входа стала равна двум. При уменьшении степени этой зависимости $\dim F^z$ возрастает.

При увеличении объема выборки (рис. 13) размерность пространства F^z возрастает, в связи с более точным оцениванием параметров δ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итог статьи состоит в анализе особенностей, возникающих при моделировании процессов «трубчатой» структуры, которая имеет место всегда, если компоненты вектора входных переменных процесса стохастически зависимы. В этом случае традиционно используемые модели статических систем с запаздыванием неприменимы или могут приводить к значительным ошибкам. Наиболее интересным является тот факт, что мы приходим к необходимости введения пространства дробной размерности. Безусловно, важным является факт исчезновения и появления влияния некоторых входных переменных в различные периоды времени на значения выходных переменных процесса, что тесно связано не столько с пространством дробной размерности, сколько с пространством изменяющейся размерности.

Н-процессы не следует путать с аттракторами, которые являются подмножеством фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Подмножество Н-процесса $\Omega^H(x)$ отражает свойства исследуемого реального процесса и может существенно отличаться от регулярных, странных и других аттракторов. Обратим еще раз внимание, что подобласть $\Omega^H(x)$ исследователю никогда не известна, иными словами, Н-процесс характеризуется (определяется) реально протекающим процессом, а не какими-либо теоретическими, математическими конструкциями.

Основной итог статьи состоит в моделировании процессов «трубчатой» структуры, которая имеет место всегда, если компоненты вектора входных переменных исследуемого процесса стохастически зависимы. В этом случае традиционно используемые модели статических систем с запаздыванием неприменимы или, в лучшем случае, могут приводить к значительным ошибкам. Наиболее интересным является тот факт, что мы приходим к необходимости введения пространства дробной размерности. Интересен вопрос: будет ли это пространство Хаусдорфа – Безиковича? Проведенные численные исследования подтверждают эффективность использования Н-моделей вместо общепринятых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев А. В.* Некоторые замечания к H-моделям безынерционных процессов с запаздыванием // Вестник СибГАУ. – 2014. – № 2(54). – С. 24–34.
2. *Медведев А. В.* Анализ данных в задаче идентификации // Компьютерный анализ данных моделирования. – Минск: БГУ, 1995. – Т. 2. – С. 201–206.
3. *Медведев А. В.* H-модели для безынерционных систем с запаздыванием // Вестник СибГАУ. – 2012. – № 5(45). – С. 84–89.
4. *Мондельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 656 с.
5. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. 128 с.
6. *Тарасенко Ф. П.* Моделирование и феномен человека. Ч.1; Моделирование – инфраструктура взаимодействия человека с реальностью. – М.: Научные технологии, 2012. – 137 с.
7. *Медведев А. В.* Основы теории адаптивных систем. – Красноярск: Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф.Решетнева, 2015. – 526 с.

REFERENCES

1. *Medvedev A. V.* *Nekotorye zamechaniya k H-modelyam bezynertsionnyh protsessov s zapazdyvaniem* [Some notes on H – models for non-inert systems with a delay]. Vestnik SibGAU. 2014. vol. 54, no. 5, p.24-34. (In Russ.)
2. *Medvedev A. V.* *Analizq dannyhq Bq zadacheq identifikatsiiq* [Analysis of the data in the problem identification] Computer analysis of simulation data. V.2. - Minsk: BSU, 1995. p. 201-206.
3. *Medvedev A. V.* *H-modeli dlya bezynertsionnyh sistem s zapazdyvaniem* [H-model for non-inertia systems with delay]. Vestnik SibGAU. 2012, vol. 45, no. 5, p.84-89.(In Russ.)
4. *Mandelbrot B.* *Fraktalnaya geometriya prirody* [Fractal Geometry of Nature]. Moscow – Izhevsk, Institute of Computer Science, NITS “Regular and Chaotic Dynamics”Publ., 2010. 656 p.
5. *Arnold V. I.* *Teoriya katastrof* [Catastrophe Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1990. 128 p.
6. *Tarasenko F. P.* *Modelirovanie i fenomen cheloveka . Ch.1 . Modelirovanie – infrastruktura vzaimodeystviya cheloveka s realnosty* [Modeling and the phenomenon of man. Part 1 . Simulation - the infrastructure of human interaction with reality]. Moscow: Nauchnye tehnologii. 2012. 137 p.
7. *Medvedev A. V.* *Osnovy teorii adaptivnyh sistem* [Fundamentals of the theory of adaptive systems]. – Krasnoyarsk: SibGAY. 2015. 526 p.