УДК 517.977.56
DOI 10.17223/19988621/41/3

Р.К. Тагиев, С.А. Гашимов, В.М. Габибов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ И С УПРАВЛЕНИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и с управлениями в коэффициентах. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, найдено выражение для его градиента и установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: *оптимальное управление, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, условие оптимальности.*

Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа [1–3]. Нелокальные краевые задачи для уравнений параболического типа активно изучаются в настоящее время. Среди них особое место занимают задачи с интегральными граничными условиями [4–7].

Задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа с управлениями в коэффициентах и с классическими краевыми условиями, изучены в работах [8–14] и др. Однако задачи управления, в которых процессы описываются уравнениями параболического типа с нелокальными краевыми условиями и с управлениями в коэффициентах исследованы существенно слабее.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения параболического типа с интегральным граничным условием и с управлениями в коэффициентах. Исследованы вопросы корректности задачи в слабой топологии пространства управлений. Найдено выражения для градиента функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности управления.

1. Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon)=\int_0^{\ell}\left|u(x,T;\upsilon)-y(x)\right|^2dx \qquad (1)$$

на решениях $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ краевой задачи

$$u_t-(k(x,t)u_x)_x+q(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T=\{(x,t):0<x<\ell,\ \ 0<t\le T\}\,; \qquad (2)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le \ell\,; \qquad (3)$$

$$u_x(0,t)=0,\quad k(l,t)u_x(\ell,t)=\int_0^{\ell}H(x)u_x(x,t)dx+g(t),\quad 0<t\le T, \qquad (4)$$

соответствующих всем допустимых управлениям $\upsilon=\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))$ из множества

$$V=\{\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))\in H=W_2^1(Q_T)\times L_2(Q_T):0<\nu\le k(x,t)\le\mu,$$
$$|k_x(x,t)|\le\mu_1,|k_t(x,t)|\le\mu_2\quad|q(x,t)|\le\mu_3\quad \text{п.в.на } Q_T\}. \tag{5}$$

Здесь l, T, ν, μ, μ_1, μ_2, $\mu_3>0$ – заданные числа; $y(x)$, $\varphi(x)\in W_2^1(0,\ell)$, $H(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, $g(t)\in W_2^1(0,T)$ – известные функции, $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ – решение краевой задачи (1) – (3), соответствующее управлению $\upsilon=\upsilon(x,t)$.

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [15, с. 23–26]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через M_i $(i=1,2,...)$.

Под решением краевой задачи (2) – (4), для каждого фиксированного допустимого управления $\upsilon(x,t)\in V$, понимается обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функция $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, которая для любой функции $\eta(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,T)=0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_T}(-u\eta_t+k(x,t)u_x\eta_x+q(x,t)u\eta)\,dxdt=\iint\limits_{Q_T}f(x,t)\eta dxdt+$$
$$+\int_0^\ell\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int_0^T[\int_0^\ell H(x)u_x(x,t)dx+g(t)]\eta(\ell,t)dt. \tag{6}$$

Используя результаты работ [15, с.165–171], [7], можно показать, что при сделанных предположениях, каждое допустимое управления $\upsilon(x,t)\in V$ определяет единственное обобщенное решение $u(x,t;\upsilon)\in V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (2) – (4) и для нее справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}\equiv\max_{0\le t\le T}\|u(x,t;\upsilon)\|_{L_2(0,\ell)}+\|u_x\|_{L_2(Q_T)}\le$$
$$\le M_1(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|\varphi\|_{L_2(0,\ell)}+\|g\|_{L_2(0,T)}). \tag{7}$$

Более того, обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (2) – (4) принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}\le M_2(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)}+\|g\|_{W_2^1(0,T)})\,. \tag{8}$$

Оценка (7) показывает, что функционал (1) определен на V и принимает конечные значения.

2. Корректность постановки задачи

Следующая теорема показывает, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H.

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1) – (5) $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_* \equiv \inf\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\}\}$ непусто, V_* слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n = (k_n(x,t), q_n(x,t))\} \subset V$ функционала $J(\upsilon)$ слабо в H сходится к множеству V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал $J(\upsilon)$ слабо непрерывен на V. Пусть $\upsilon = (k(x,t),\ q(x,t)) \subset V$ – произвольный фиксированный элемент и $\{\upsilon_n = (k_n(x,t), q_n(x,t))\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что $\upsilon_n \to \upsilon$ слабо в H, т.е.

$$k_n(x,t) \to k(x,t) \text{ слабо в } W_2^1(Q_T); \tag{9}$$

$$q_n(x,t) \to q(x,t) \text{ слабо в } L_2(Q_T). \tag{10}$$

Из компактности вложения $W_2^1(Q_T) \to L_{r_1}(Q_T)$ при любом конечном $r_1 \ge 2$ [16, с.78] и соотношения (9) следует, что

$$k_n(x,t) \to k(x,t) \text{ сильно в } L_{r_1}(Q_T). \tag{11}$$

Кроме того, в силу однозначной разрешимости задачи (2) – (4) и оценки (8), каждому $\upsilon_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n(x,t) = u(x,t;\upsilon_n) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи (1) – (3) и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_3, \quad (n = 1,2,...), \tag{12}$$

т.е . последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена в $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Известно, что вложение $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_{r_2}(Q_T)$ компактно при любом конечном $r_2 \ge 2$ [17, с. 33, 39]. Кроме того, следы элементов $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ определены при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ как элементы $W_2^1(0,\ell)$ и справедлива оценка [15, с. 98]

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u(x,t)\|_{W_2^1(0,\ell)} \le M_4 \|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}. \tag{13}$$

Отсюда и из компактности вложения $W_2^1(0,\ell) \to C[0,\ell]$ [15, с. 84] следует, что отображение $u(x,t) \to u(x,T)$ пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$ в $C[0,\ell]$ компактно. Тогда в силу перечисленных фактов, из (12) следует, что из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, такую, что

$$u_{n_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_2}(Q_T); \tag{14}$$

$$u_{n_k}(x,T) \to u(x,T) \text{ сильно в } C[0,\ell], \tag{15}$$

где $u = u(x,t)$ – некоторый элемент из $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Покажем, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$, т.е. $u(x,t)$ является решением задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\iint\limits_{Q_T}\left(-u_{n_k}\eta_t + k_{n_k}(x,t)u_{n_k x}\eta_x + q_{n_k}(x,t)u_{n_k}\eta\right)dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_T} f(x,t)\eta\,dxdt + \int\limits_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_0^T [\int\limits_0^\ell H(x)u_{n_k x}(x,t)dx + g(t)]\eta(\ell,t)dt,$$

$$\forall\eta = \eta(x,t)\in W_2^1(Q_T),\quad \eta(x,T)=0\quad (k=1,2,...). \qquad (16)$$

Используя соотношения (11), (14), оценки (12) и неравенство (1.8) из [16, с. 75], имеем

$$\left|\iint\limits_{Q_T} k_{n_k}(x,t)u_{n_k x}\eta_x\,dxdt - \iint\limits_{Q_T} k(x,t)u_x\eta_x\,dxdt\right| \le$$

$$\le \left|\iint\limits_{Q_T} k(x,t)[u_{n_k x}-u_x]\eta_x dxdt\right| + \left|\iint\limits_{Q_T}[k_{n_k}(x,t)-k(x,t)]u_{n_k x}\eta_x dxdt\right| \le$$

$$\le \left|\iint\limits_{Q_T} k(x,t)[u_{n_k x}-u_x]\eta_x dxdt\right| + \left\|k_{n_k}-k\right\|_{L_3(Q_T)}\left\|u_{n_k x}\right\|_{L_6(Q_T)}\left\|\eta_x\right\|_{L_2(Q_T)} \to 0\,. \qquad (17)$$

Кроме того, используя соотношения (10), (14) и оценки (12), получаем

$$\left|\iint\limits_{Q_T} q_{n_k}(x,t)u_{n_k}\eta\,dxdt - \iint\limits_{Q_T} q(x,t)u\eta\,dxdt\right| \le$$

$$\le \left|\iint\limits_{Q_T} q_{n_k}(x,t)[u_{n_k}-u]\eta dxdt\right| + \left|\iint\limits_{Q_T}[q_{n_k}(x,t)-q(x,t)]u\eta dxdt\right| \le$$

$$\le q_1\left\|u_{n_k}-u\right\|_{L_2(Q_T)}\left\|\eta\right\|_{L_2(Q_T)} + \left|\iint\limits_{Q_T}[q_{n_k}(x,t)-q(x,t)]u\eta dxdt\right| \to 0\,. \qquad (18)$$

Наконец, используя соотношение (14), имеем

$$\iint\limits_{Q_T} H(x)u_{n_k x}(x,t)\eta(l,t)\,dxdt \to \iint\limits_{Q_T} H(x)u_x(x,t)\eta(l,t)\,dxdt\,; \qquad (19)$$

$$\iint\limits_{Q_T} u_{n_k}(x,t)\eta_t\,dxdt \to \iint\limits_{Q_T} u\eta_t\,dxdt\,. \qquad (20)$$

Тогда переходя к пределу при $n_k \to \infty$ в тождестве (16) и учитывая соотношения (17) – (20), получаем, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (6), т.е. является решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon\in V$. Отсюда и из включения $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q_T)$ следует, что $u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$.

Используя единственность решения краевой задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon\in V$, нетрудно показать, что соотношения (14), (15) справедливы с функцией $u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ не только для подпоследовательности $\left\{u_{n_k}\right\}$, но и для всей последовательности $\{u_n\}$, т.е.

$$u_n(x,t)=u(x,t;\upsilon_n)\to u(x,t)=u(x,t;\upsilon) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_2}(Q_T)\,; \qquad (21)$$

$$u_n(x,T)=u(x,T;\upsilon_n)\to u(x,T)=u(x,T;\upsilon) \text{ сильно в } C[0,\ell]. \qquad (22)$$

Тогда, используя соотношение (22) и равенство (1), получаем, что $J(\upsilon^{(n)})\to J(\upsilon)$ при $n\to\infty$.

Таким образом, установлено, что функционал $J(\upsilon)$ слабо непрерывен на V. Кроме того, множество V, определяемое равенством (5), выпукло, замкнуто и ограничено в гильбертовом пространстве H и поэтому слабо компактно в H [18, с. 51]. Тогда применяя результат из [18, с. 49], устанавливаем, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что задача (1) – (5) имеет хотя бы одно решение. Следующий пример показывает, что решение задачи (1) – (5) может быть не единственным.

Пример 1. Пусть в задаче (1) – (5) $l = T = 1$, $\nu = 1/2\pi$, $\mu = 2/\pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \pi$, $f(x,t) = 3\pi\cos\pi x\sin\pi t$, $H(x) \equiv 1$, $g(t) = 2\sin\pi t$, $\varphi(x) \equiv 0$, $y(x) \equiv 0$.

Тогда нетрудно проверит, что минимальное значение функционала достигается на управлениях

$$\upsilon_*^{(1)}(x,t) = (k_*^{(1)}(x,t) \equiv 4\pi,\ \ q_*^{(1)}(x,t) \equiv \pi), \text{ и } \upsilon_*^{(2)}(x,t) = (k_*^{(2)}(x,t) \equiv 2/\pi,\ \ q_*^{(2)}(x,t) \equiv 0)$$

$$\text{и } J(\upsilon_*^{(1)}) = J(\upsilon_*^{(2)}) \equiv J_* = 0,\ \ u(x,t;\upsilon_*^{(1)}) = u(x,t;\upsilon_*^{(2)}) = \cos\pi x\sin\pi t,\ \ (x,t) \in Q_T,$$

т.е. решение (1) – (5) не единственно.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H. Однако, вообще говоря, это задача некорректна в метрике пространства H, т.е. могут существовать минимизирующие последовательности функционала $J(\upsilon)$, не сходящиеся к множеству V_* по норме пространства H. Следующий пример показывает, что минимизирующая последовательность функционала $J(\upsilon)$ может не иметь предела в пространстве H.

Пример 2. Пусть в задаче (1) – (5) $l = T = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \pi^2 + 1$, $f(x,t) = -\exp(t)\sin\pi t$, $H(x) \equiv 1$, $g(t) = \pi\exp(t)$, $\varphi(x) = -\sin\pi x$, $y(x) = -\exp\sin\pi x$.

Тогда $\upsilon_* = (k_*(x,t) \equiv 1,\ q_*(x,t) \equiv -\pi^2)$ – оптимальное управление и $u(x,t;\upsilon_*) = -\exp(t)\sin\pi x$, $(x,t) \in Q_T$, $J_* = J(\upsilon_*) = 0$. Рассмотрим последовательность управлений $\upsilon^{(m)}(x,t) = (k^{(m)}(x,t) \equiv 1,\ \ q^{(m)}(x,t) = -\pi^2 + \sin\pi mx) \in V$ $(m = 1, 2, ...)$. Тогда $\upsilon^{(m)} \to \upsilon$ слабо в H, и поэтому из теоремы 1 следует, что $J(\upsilon^{(m)}) \to J(\upsilon) = J_* = 0$, т.е. последовательность $\{\upsilon^{(m)}\}$ является минимизирующей для функционала $J(\upsilon)$. Однако эта последовательность не имеет предела в H, так как $\{\sin\pi mx\}$ сильно не сходится в $L_2(Q_T)$.

3. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности

Для задачи (1) – (5) введем сопряженную краевую задачу [18, с.128]

$$\psi_t + (k(x,t)\psi_x)_x - q(x,t)\psi - H'(x)\psi(\ell,t) = 0,\ \ (x,t) \in Q_T\ ; \tag{23}$$

$$\psi(x,T) = -2[u(x,T;\upsilon) - y(x)],\ \ 0 \le x \le \ell\ ; \tag{24}$$

$$\psi_x(0.t) = 0\ ,\ \psi_x(\ell,t) = 0\ ,\ 0 \le t < T\ . \tag{25}$$

Под решением краевой задачи (23) – (25), соответствующим управлению $\upsilon \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} (\psi\eta_t + k(x,t)\psi_x\eta_x + q(x.t)\psi\eta)dxdt - \int_0^T [\int_0^l H(x)\eta_x(x,t)dx]\psi(\ell,t)dt =$$
$$= -2\int_0^l [u(x,T;\upsilon) - y(x)]\eta(x,T)dx \qquad (26)$$

при любой функции $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ равной нулю при $t = 0$.

Используя методики работ [15, с. 165–171], [7], можно показать, что для каждого заданного $\upsilon \in V$ краевая задача (23) – (25) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Более того, это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_5 \|u(x,T;\upsilon) - y(x)\|_{W_2^1(0,\ell)}. \qquad (27)$$

Учитывая здесь неравенство (13) и оценки (8), имеем

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_6[\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|g\|_{W_2^1(0,T)} + \|y\|_{W_2^1(0,l)}]. \qquad (28)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда функционал (5) дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $\upsilon \in V$ при приращении $\Delta\upsilon = (\Delta k, \Delta q) \in H$ определяется равенством

$$dJ(\upsilon, \Delta\upsilon) = \iint_{Q_T} (u_x\psi_x\Delta k + u\psi\Delta q)dxdt. \qquad (29)$$

Доказательство. Пусть $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon \in V$ – произвольные управления и $\Delta u = \Delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon + \Delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$, $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$. Из условий (1) – (3) следует, что Δu является решением из $W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи

$$\Delta u_t - ((k + \Delta k)\Delta u_x)_x + (q + \Delta q)\Delta u = (\Delta k u_x)_x - \Delta q u, \ (x,t) \in Q_T; \qquad (30)$$

$$\Delta u(x,0) = 0, \ 0 \le x \le \ell; \qquad (31)$$

$$\Delta u_x(0,t) = 0, \ \Delta k(\ell,t)u_x(\ell,t) = \int_0^\ell H(x)\Delta u_x(x,t)dx - (k(\ell,t) + \Delta k(\ell,t))\Delta u_x(\ell,t),$$
$$0 < t \le T. \qquad (32)$$

Можно показать, что для решения задачи (30) – (32) верна оценка [16, с. 164–169], [7]

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_7[\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)}]. \qquad (33)$$

Используя ограниченность вложений $W_2^1(Q_T) \to L_3(Q_T)$ [16, с.78], $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_\infty(Q_T)$ [17, с.33], неравенство (1.8) из [16, с.75] и оценки (9), имеем

$$\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} \le \|\Delta k\|_{L_3(Q_T)} \|u_x\|_{L_6(Q_T)} \le M_8 \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)},$$

$$\|\Delta qu\|_{L_2(Q_T)} \le \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \le M_9 \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)}.$$

Учитывая эти неравенства в (33), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_{10} \|\Delta \upsilon\|_H. \tag{34}$$

Приращение функционала (5) имеет вид

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \Delta\upsilon) - J(\upsilon) = 2\int_0^\ell [u(x,T;\upsilon) - y(x)]\Delta u(x,T)dx + \int_0^\ell |\Delta u(x,T)|^2 dx. \tag{35}$$

С помощью решений краевых задачи (23) – (25) и (30) – (32) преобразуем приращение (35). Для решения краевой задачи (30) – (32) справедливо равенство

$$\iint_{Q_T} (\Delta u_t \psi + k\Delta u_x \psi_x + q\Delta u\psi)dxdt - \int_0^T (\int_0^\ell H(x)\Delta u_x(x,t)dx)\psi(\ell,t)dt =$$
$$= \iint_{Q_T} \Delta k \Delta u_x \psi_x dxdt - \iint_{Q_T} \Delta u \Delta q \psi dxdt - \iint_{Q_T} \Delta k u_x \psi_x dxdt - \iint_{Q_T} u\psi\Delta q dxdt. \tag{36}$$

Если в тождестве (26) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (36), то придем к равенству

$$2\int_0^l [u(x,T;\upsilon) - y(x)]\Delta u(x,T)dx =$$
$$= \iint_{Q_T} (u_x\psi_x\Delta k + u\psi\Delta q)dxdt + \iint_{Q_T} \Delta u\psi\Delta q dxdt - \iint_{Q_T} \Delta k\Delta u_x\psi_x dxdt.$$

Учитывая это равенство, (35) запишем в виде

$$\Delta J(\upsilon) = \iint_{Q_T} (u_x\psi_x\Delta k + u\psi\Delta q)dxdt + R, \tag{37}$$

где

$$R = \int_0^\ell |\Delta u(x,T)|^2 dx + \iint_{Q_T} \Delta u\psi\Delta q dxdt - \iint_{Q_T} \Delta k\Delta u_x\psi_x dxdt. \tag{38}$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части равенства (37), т.е. выражение (29), при заданном $\upsilon \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от $\Delta\upsilon$ в H. Линейность функционала (29) по $\Delta\upsilon$ очевидна. Используя ограниченность вложений $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_\infty(Q_T)$ [17, с. 33, 39], $W_2^1(Q_T) \to L_4(Q_T)$ [16, с. 78], оценку (13) для функции ψ, неравенство Коши – Буняковского и оценки (8), (29), получаем неравенство

$$|dJ(\upsilon,\Delta\upsilon)| = \left|\iint_{Q_T} (u_x\psi_x\Delta k + u\psi\Delta q)dxdt\right| \le$$
$$\le \|u_x\|_{L_4(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} + \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \|\psi\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \le M \|\Delta\upsilon\|_H.$$

Отсюда следует ограниченность функционала (29).

Кроме того, используя ограниченность вложения $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_\infty(Q_T)$, неравенство (13) для функции Δu и оценки (28), (34), для остаточного члена R, определяемого равенством (38), получаем оценку

$$|R| = \left| \|\Delta u(x,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \iint\limits_{Q_T} \Delta u \psi \Delta q dxdt - \iint\limits_{Q_T} \Delta u_x \psi_x \Delta k dxdt \right| \le$$
$$\le M \|\Delta u\|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} +$$
$$+ \|\Delta u_x\|_{L_4(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \le M \|\Delta \upsilon\|^2_H . \quad (39)$$

Учитывая в (37) эту оценку, заключаем, что функционал (5) дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал определяется выражением (29). Теорема 2 доказана.

Теперь получим явную формулу для градиента функционала (5). Поставим следующую вспомогательную краевую задачу для определения функции $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ из условий

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x \psi_x , \ (x,t) \in Q_T ; \quad (40)$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=l} = 0, \ \ 0 < x < l ; \quad (41)$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0, \ \ 0 < x < T. \quad (42)$$

Под решением задачи (40) – (42) при заданном $\upsilon \in V$ будем понимать функцию $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ из $W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_T} [\omega_x \eta_x + \omega_t \eta_t + \omega\eta] dxdt = \iint\limits_{Q_T} u_x \psi_x \eta dxdt \quad (43)$$

при любой функции $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$.

Из результатов работы [16, с. 197–202] следует, что краевая задача (40) – (42) при заданном $\upsilon \in V$ однозначно разрешима в $W_2^1(Q_T)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда градиент функционала (5) в произвольной точке $\upsilon \in V$ определяется равенством

$$J'(\upsilon) = (\omega(x,t;\upsilon), u(x,t;\upsilon)\psi(x,t;\upsilon)) \quad (44)$$

и отображение $\upsilon \to J'(\upsilon)$ непрерывно действует из V в H.

Доказательство. Пусть $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon \in V$ – произвольные управления, где $\Delta\upsilon = (\Delta k, \Delta q) \in H$ – приращение управления на элементе $\upsilon = (k,q) \in V$. Полагая в тожестве (43) $\eta = \Delta k$, получаем равенство

$$\iint\limits_{Q_T} [\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k] dxdt = \iint\limits_{Q_T} u_x \psi_x \Delta k dxdt,$$

учитывая которое в (29), имеем

$$dJ(\upsilon, \Delta\upsilon) = \langle J'(\upsilon), \Delta\upsilon \rangle_H = \iint\limits_{Q_T} (\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k + u\psi\Delta q) dxdt,$$

где $\langle J'(\upsilon), \Delta\upsilon \rangle_H$ – скалярное произведение элементов $J'(\upsilon), \Delta\upsilon \in H$ на H . Отсюда следует, что градиент функционала (5) определяется равенством (29).

Используя априорные оценки для краевых задач (1) – (3), (23) – (25), (40) – (42) и рассуждая аналогично выводу оценки (39), можно показать, что справедливо неравенство $\|J'(\upsilon+\Delta\upsilon)-J'(\upsilon)\|_H \le M\|\Delta\upsilon\|_H$. Отсюда следует непрерывность отображения $\upsilon \to J'(\upsilon)$ из V в H . Теорема 3 доказана .

Необходимое условие оптимальности в задаче (1) – (5) устанавливает

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления $\upsilon_* = (k_*, q_*) \in V$ в задаче (1) – (5) необходимо, чтобы неравенство

$$\iint_{Q_T} [\omega_{*x}(k_x - k_{*x}) + \omega_{*t}(k_t - k_{*t}) + \omega_*(k - k_*) + u_*\psi_*(q - q_*)]dxdt \ge 0 \tag{45}$$

выполняюсь для любого $\upsilon = (k, q) \in V$, где $u_* = u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_* = \psi(x,t;\upsilon_*)$, $\omega_* = \omega(x,t;\upsilon_*)$ – решения задач (1) – (3); (23) – (25); (40) – (42) соответственно, при $\upsilon = \upsilon_*$.

Доказательство. Множество *V*, определяемое равенством (4), выпукло в *H*. Кроме того, согласно теоремам 2 и 3, функционал (5) непрерывно дифференцируем по Фреше на *V*. Тогда в силу теоремы 5 из [18, с. 28] на элементе $\upsilon_* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(\upsilon), \upsilon - \upsilon_* \rangle_H \ge 0$ при всех $\upsilon \in V$. Отсюда и из (44) следует справедливость неравенства (45). Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионкин Н.И.* Решение краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
2. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
3. *Нахушев А.З.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
4. *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547–564.
5. *Кожанов А.Н.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 30. С. 63–69. DOI 10.14498/vsgtu308.
6. *Пулкина Л.С.* Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. СО РАН, 2005. С. 231–239.
7. *Данилкина О.Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 1(14). С. 5–9.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
9. *Серовайский С.Я.* Задачи оптимального управления в коэффициентах для уравнения параболического типа // Изв. вузов. Сер. матем. 1982. № 12. С. 44–50.
10. *Искендеров А.Д.*,*Тагиев Р.К.* Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1324–1334.
11. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1492–1501.
12. *Тагиев Р.К.* Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 380–392. DOI 10.1134/S0374064113030138.
13. *Hem R.J.* Optimal control of the convective velocity coefficient in a parabolic problem // Nonlinear Anal. 2005. V. 63. P. 1383–1390.
14. *Тагиев Р.К.*, *Гашимов С.А.* Задача оптимального управления в коэффициентах параболического уравнения при наличии фазовых ограничений // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 27–45.

15. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
16. *Ладыженская О.А.*,*Солонников В.А.*,*Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
17. *Лионс Ж.Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Мир, 1987. 368 с.
18. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

Статья поступила 15.02.2016 г.

Tagiyev R.K., Gashimov S.A., Gabibov V.M. (2016) ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION AND CONTROLS IN COEFFICIENTS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 31–41

DOI 10.17223/19988621/41/3

In this paper, an optimal control problem for a parabolic equation with an integral boundary condition and controls in coefficients is considered. Let it be required to minimize the functional

$$J(\upsilon)=\int_0^{\ell}|u(x,T;\upsilon)-y(x)|^2\,dx$$

on the solutions $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ of the boundary value problem

$$u_t-(k(x,t)u_x)_x+q(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T=\{(x,t):0<x<\ell,\ \ 0<t\le T\}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le \ell,$$

$$u_x(0,t)=0,\ \ k(l,t)u_x(\ell,t)=\int_0^{\ell}H(x)u_x(x,t)dx+g(t),\ \ 0<t\le T,$$

corresponding to all allowable controls $\upsilon=\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))$ from the set

$$V=\{\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))\in H=W_2^1(Q_T)\times L_2(Q_T):0<\nu\le k(x,t)\le\mu,$$
$$|k_x(x,t)|\le\mu_1,\ |k_t(x,t)|\le\mu_2\ \ |q(x,t)|\le\mu_3\ \text{ a.e. on } Q_T\}.$$

Here, $l,T,\nu,\mu,\mu_1,\mu_2,\mu_3>0$ are given numbers and $y(x),\varphi(x)\in W_2^1(0,\ell)$, $H(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, and $g(t)\in W_2^1(0,T)$ are known functions.

The work deals with problems of correctness in formulating the considered optimal control problem in the weak topology of the space $H=W_2^1(Q_T)\times L_2(Q_T)$. Examples showing that this problem is incorrect in the general case in the strong topology of the space H are presented. The objective functional is proved to be continuously Frechet differentiable and a formula for its gradient is found. A necessary condition of optimality is established in the form of a variational inequality.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, optimality condition.

TAGIYEV Rafiq Kalandar (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Azerbaijan)
E-mail: r.tagiyev@list.ru

HASHIMOV Sadiq Akif (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Azerbaijan)
E-mail: s.hashimov@list.ru

GABIBOV Vaxab Mexti (Senior Lecturer, Lenkaran State University, Azerbaijan)
E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

REFERENCES

1. Ionkin N.I. (1977) Reshenie kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem [The solution of the boundary problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 13(2). pp. 294–304.
2. Samarskii A.A. (1980) O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy [On some problems of the theory of differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 16(11). pp. 1925–1935.
3. Nakhushev A.Z. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow: Vysshaya Shkola.
4. Ivanchov N.I. (2004) Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differential Equations*. 40, no. 4. pp. 591–609.
5. Kozhanov A.N. (2004) O razreshimosti kraevoy zadachi s nelokal'nym granichnym usloviem dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy [On solvability of the boundary value problem with a nonlocal boundary condition for linear parabolic equations]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 30. pp. 63–69. DOI 10.14498/vsgtu308.
6. Pulkkinen L.S. (2005) *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* [Non-classical equations of mathematical physics]. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 231–239. (in Russian)
7. Danilkina O.Yu. (2007) Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym usloviem [A nonlocal problem for the heat conduction equation with an integral condition] *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki –* J. *Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci*. 1(14). pp. 5–9.
8. Lions J.L. (1968) *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles* [Optimal control of systems governed by partial differential equations]. Paris, Dunod, Gauthier-Villars. (In French).
9. Serovayskiy S.Ya. (1982) Zadachi optimal'nogo upravleniya v koeffitsientakh dlya uravneniya parabolicheskogo tipa [Optimal control problems in coefficients for a parabolic type equation]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*. 12. pp. 44–50.
10. Iskenderov A.D., Tagiev R.K. (1983) Zadachi optimizatsii s upravleniyami v koeffitsientakh parabolicheskogo uravneniya [Optimization problems with controls in coefficients of a parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 19(8). pp. 1324–1334.
11. Tagiev R.K. (2009) Optimal coefficient control in parabolic systems. *Differential Equations.* 45(10). pp. 1526–1535. DOI 10.1134/S0012266109100164.
12. Tagiev R.K. (2013) Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints. *Differential Equations.* 49(3). pp. 369–381. DOI 10.1134/S0012266113030129.
13. Hem R.J. (2005) Optimal control of the convective velocity coefficient in a parabolic problem. *Nonlinear Anal.* 63. pp. 1383–1390.
14. Tagiev R.K., Gashimov S.A. (2015) The optimal control problem for the coefficients of a parabolic equation under phase constraints. *Automation and Remote Control.* 7(8). pp. 1347–1360. DOI 10.1134/S0005117915080020.
15. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
16. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. (1967) *Lineinye I kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the parabolic type]. Moscow: Nauka.
17. Lions J.L. (1983) *Contrôle des systèmes distribués singuliers*. Paris: Gauthier-Villars. (In French).
18. Vasil'ev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremalnykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.