УДК 514.756:514.763.6
DOI 10.17223/19988621/42/2

**В.А. Кыров**

# СОБСТВЕННО ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ПЛОСКОСТЬ КАК ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Г.Г. Михайличенко была построена полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий. Она содержит как хорошо известные геометрии (евклидову, псевдоевклидову, симплектическую, сферическую и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцеву, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную). Простой анализ доказывает однородность метрической функции собственно гельмгольцевой геометрии, поэтому данная геометрия принадлежит классу финслеровых пространств. Применяются методы финслеровой геометрии для исследования собственно гельмгольцевой двумерной геометрии: проверяются аксиомы, находится финслеров метрический тензор, финслеров основной тензор, вычисляется специальный тензор кривизны.

**Ключевые слова:** *метрическая функция, собственно гельмгольцева геометрия, финслерова геометрия.*

Г.Г. Михайличенко в начале 80-х годов 20 века была построена полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий [1], то есть геометрий, для которых шесть взаимных расстояний между четырьмя произвольными точками функционально связаны. В таких геометриях расстояние понимается в обобщенном смысле как значение некоторой функции, называемой метрической. Выполнение метрических аксиом не предполагается. Все эти геометрии наделены максимальной подвижностью, то есть для них существуют группы движений максимальной размерности, равной трем [2, 3]. Классификация таких двумерных геометрий содержит как хорошо известные геометрии (евклидову, псевдоевклидову, симплектическую, сферическую и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцеву, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную). В данной работе применяются методы изучения финслеровых пространств для исследования собственно гельмгольцевой двумерной геометрии.

## 1. Собственно гельмгольцева плоскость

Рассмотрим арифметическую плоскость $R^2$ и метрическую функцию в ней [1]:

$$f(x,y) = [(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2]e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}},$$

где $\gamma = \text{const}, \gamma \neq 0$, функция $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^1}$ принадлежит классу $C^\infty$, причем при $x^1 > 0$, $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^1} \in (-\pi/2, \pi/2)$, а при $x^1 < 0$, $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^1} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Рассмотрим касательную плоскость $T_x(R^2)$ к $R^2$ в произвольной точке $x = (x^1, x^2)$. Обозначим через $T(R^2)$ касательное расслоение. Зададим в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ метрическую функцию

$$f(u) = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}, \tag{1}$$

где $u \in T_x(R^2)$. Касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (1). Множество неизотропных касательных векторов в точке $x$ обозначим через $D_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Пусть $D(R^2) \subset T(R^2)$ – расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (1) определена в прямом произведении $R^2 \times D(R^2)$.

**Определение 1.** Тройка ( $R^2, D(R^2), f$ ) задает собственно гельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость).

**Теорема 1.** Метрическая функция (1) положительно однородна.

***Доказательство.*** Действительно,

$$f(\lambda u) = \sqrt{(\lambda u^1)^2 + (\lambda u^2)^2} e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda f(u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Таким образом, собственно гельмгольцева двумерная геометрия принадлежит классу финслеровых пространств [4].

Очевидно, метрическая функция (1) положительна, то есть $f(u) > 0,$ где $(u^1)^2 + (u^2)^2 \neq 0, u \in D(R^2).$

**Теорема 2.** Собственно гельмгольцева плоскость является положительно определенным двумерным финслеровым пространством.

***Доказательство.*** Вычисляем производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - \gamma u^2) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}, \quad \frac{\partial f^2}{\partial u^2} = 2(u^2 + \gamma u^1) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^1 \partial u^1} = 2 \frac{(u^1)^2 + (1+2\gamma^2)(u^2)^2 - 2\gamma u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^1 \partial u^2} = 2 \frac{\gamma((u^1)^2 - (u^2)^2) - 2\gamma^2 u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^2 \partial u^2} = 2 \frac{(1+2\gamma^2)(u^1)^2 + (u^2)^2 + 2\gamma u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^1 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^2 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = (1+\gamma^2) e^{4\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, положителен:

$$\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1 - \gamma u^2)^2 + (1+\gamma^2)(u^2)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Из полученных результатов следует, что квадратичная форма

$$\frac{\partial f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j} \xi^i \xi^j = 2 g_{ij} \xi^i \xi^j \tag{2}$$

положительно определена. □

## 2. Собственно гельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие определено в работе автора [5], и локальное его изучение было темой кандидатской диссертации. В этом пункте все индексы принимают значения 1 и 2. Рассмотрим касательную плоскость $T_x(M)$ к двумерному многообразию $M$ в произвольной точке $x$ и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M \times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности $U \subset M$ имеет явный вид:

$$f(x,u) = \sqrt{(a_i u^i)^2 + (b_i u^i)^2}\, e^{\gamma \operatorname{arctg}\frac{b_i u^i}{a_i u^i}}, \tag{3}$$

где $u \in T_x(M)$, а $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ – функции класса $C^3$, $\gamma = \mathrm{const}, \gamma \neq 0$. В каждой точке $x$ векторы $a_i u^i$, $b_i u^i$ линейно независимы, то есть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (3). Множество неизотропных касательных векторов в точке $x$ обозначим через $D_x(M) \subset T_x(M)$. Пусть $D(M) \subset T(M)$ – расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (3) определена в прямом произведении $M \times D(M)$.

**Определение 2.** Тройка $(M, D(M), f)$ задает геометрию двумерного собственно гельмгольцева многообразия.

Заметим, что для собственно гельмгольцевой плоскости $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

**Теорема 3.** Метрическая функция (3) положительно однородна.

***Доказательство.*** Действительно,

$$f(x,\lambda u) = \sqrt{(a_i \lambda u^i)^2 + (b_i \lambda u^i)^2}\, e^{\gamma \operatorname{arctg}\frac{b_i \lambda u^i}{a_i \lambda u^i}} = \lambda f(x,u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Итак, геометрия двумерного собственно гельмгольцева многообразия принадлежит классу финслеровых пространств [4].

Метрическая функция положительна, то есть $f(x,u) > 0$, где

$$(a_i u^i)^2 + (b_i u^i)^2 \neq 0, u \in D_x(M).$$

**Терема 4.** Собственно гельмгольцево двумерное многообразие ( $M, D(M), f$ ) является положительно определенным двумерным финслеровым пространством.

***Доказательство.*** Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2(x,u)}{\partial u^i} = 2[(a_i + \gamma b_i)(1) + (b_i - \gamma a_i)(2)]e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}},$$

где для удобства введены обозначения

$$(1) = a_k u^k, (2) = b_k u^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора $g_{ij}(x,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j}$ собственно гельмгольцева двумерного многообразия:

$$g_{ij} = \frac{A_{ij}(1)^2 + B_{ij}(2)^2 + C_{ij}(1)(2)}{(1)^2 + (2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}},$$

где введены сокращающие обозначения:

$$A_{ij} = a_i a_j + \gamma a_i b_j + \gamma b_i a_j + (1 + 2\gamma^2) b_i b_j,$$

$$B_{ij} = (1 + 2\gamma^2) a_i a_j - \gamma a_i b_j - \gamma b_i a_j + b_i b_j,$$

$$C_{ij} = -2\gamma(a_i a_j + \gamma a_i b_j + \gamma b_i a_j - b_i b_j).$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = (1+\gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e^{4\gamma \operatorname{arctg}\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Нетрудно также доказать, что $g_{11} > 0$. Из полученных результатов следует, что квадратичная форма (2) положительно определена. □

Очевидно, метрический тензор положительно однороден степени 0 и симметричен по индексам.

**Предложение 1.** Контравариантный финслеров метрический тензор собственно гельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}(1)^2 + B^{ij}(2)^2 + C^{ij}(1)(2)}{(1+\gamma^2)(a_1 b^2 - a_2 b_1)^2((1)^2 + (2)^2)} e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}},$$

где $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$.

***Доказательство.*** Контравариантный финслеров метрический тензор $g^{ij}$ определяется из формулы $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, где $\delta^i_k$ – символ Кронекера. Тогда

$$g^{22} = \frac{A_{11}(1)^2 + B_{11}(2)^2 + C_{11}(1)(2)}{(1+\gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 + (2)^2)} e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{21} = -\frac{A_{21}(1)^2 + B_{21}(2)^2 + C_{21}(1)(2)}{(1+\gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 + (2)^2)} e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{11} = \frac{A_{22}(1)^2 + B_{22}(2)^2 + C_{22}(1)(2)}{(1+\gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 + (2)^2)} e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения:

$$A^{11} = A_{22},\ A^{21} = -A_{12},\ A^{22} = A_{11},$$
$$B^{11} = B_{22},\ B^{21} = -B_{12},\ B^{22} = B_{11},$$
$$C^{11} = C_{22},\ C^{21} = -C_{12},\ C^{22} = C_{11},$$

то для компонент контравариантного метрического тензора получим исходную формулу. □

Основной финслеров тензор [4] определяется формулой

$$C_{ijk}(x,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}(x,u)}{\partial u^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k},$$

а дополнительный тензор – формулой

$$A_{ijk}(x,u) = f(x,u)C_{ijk}(x,u).$$

Очевидна полная симметрия по индексам:

$$C_{ijk} = C_{ikj} = C_{kji} = C_{jik} \text{ и } A_{ijk} = A_{ijk} = A_{kji} = A_{jik}.$$

**Предложение 2.** Основной и дополнительный финслеровы тензоры собственно гельмгольцева двумерного многообразия задаются формулами

$$C_{ijk} = \frac{2\gamma(1+\gamma^2)p_{ijk}}{((1)^2+(2)^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}, \quad A_{ijk} = \frac{2\gamma(1+\gamma^2)p_{ijk}}{((1)^2+(2)^2)^{3/2}} e^{3\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{4}$$

где введено обозначение $p_{ijk} = (b_k(1) - a_k(2))(b_j(1) - a_j(2))(b_i(1) - a_i(2))$.

***Доказательство.*** Для доказательства необходимо вычислить производные от компонент метрического тензора и привести подобные. □

Определим единичный вектор, а также ковариантный нормальный к нему вектор:

$$l^i = \frac{u^i}{f(x,u)},\quad m_i = -\varepsilon_{ik} l^k, \text{ где } \varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\Delta} \\ -\sqrt{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Точные вычисления приводят к выражениям для собственно гельмгольцева двумерного многообразия:

$$l^i = \frac{u^i e^{-\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}},\quad m_i = \frac{\sqrt{(1+\gamma^2)}(b_i(1) - a_i(2)) e^{\gamma \operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}.$$

В финслеровой геометрии доказано соотношение

$$A_{ijk} = J m_i m_j m_k, \tag{5}$$

где $J$ – скаляр [4].

**Предложение 3.** Финслеров скаляр $J$ собственно гельмгольцева двумерного многообразия вычисляется по формуле

$$J = \frac{2\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} = \text{const}.$$

***Доказательство.*** Найдем сначала тройное произведение:

$$m_i m_j m_k = \frac{(1+\gamma^2)^{3/2}(b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))e^{3\gamma\operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2+(2)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(1+\gamma^2)^{3/2} p_{ijk} e^{3\gamma\operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2+(2)^2)^{3/2}}.$$

Подставляя найденное произведение и выражение для тензора $A_{ijk}$, вычисленное в предложении 2, в формулу (5), получаем выражение для скаляра $J$. □

Следует отметить, что в теории двумерных финслеровых пространств этот скаляр является важной характеристикой, который для двумерного собственно гельмгольцева многообразия принимает постоянное значение. Заметим, что для римановых двумерных многообразий этот скаляр равен нулю.

По вышенайденным тензорам (4) строим новые тензоры

$$C^i_{jk} = g^{il} C_{jlk}, \quad A^i_{jk}(x,u) = f(x,u) C^i_{jk}(x,u).$$

В явном виде для двумерного собственно гельмгольцева многообразия они имеют вид

$$C^i_{jk} = \frac{-2\gamma(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\gamma b^i)(1)+(b^i-\gamma a^i)(2))}{(a_1b_2-a_2b_1)((1)^2+(2)^2)^2},$$

$$A^i_{jk} = \frac{-2\gamma(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\gamma b^i)(1)+(b^i-\gamma a^i)(2))}{(a_1b_2-a_2b_1)((1)^2+(2)^2)^{3/2}} e^{\gamma\operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}}, \quad (6)$$

где $a^i = a_i, b^i = b_i$.

С помощью последнего тензора можно определить финслеров специальный тензор кривизны [4]:

$$S^i_{jkh} = A^i_{kr} A^r_{jh} - A^i_{rh} A^r_{jk}. \quad (7)$$

**Теорема 5.** Финслеров специальный тензор кривизны для собственно гельмгольцева двумерного многообразия равен нулю.

***Доказательство.*** Действительно, воспользуемся выражением (6) для тензора $A^i_{jk}$ при вычислении финслерова специального тензора кривизны (7):

$$S^i_{jkh} = \frac{4\gamma^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2((1)^2+(2)^2)^3} e^{2\gamma\operatorname{arctg}\frac{(2)}{(1)}} \times$$

$$\times[((a^i+\gamma b^i)(1)+(b^i-\gamma a^i)(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-$$

$$-a_r(2))\times((a^r+\gamma b^r)(1)+(b^r-\gamma a^r)(2))-((a^i+\gamma b^i)(1)+(b^i-\gamma a^i)(2))(b_j(1)-$$

$$-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))\times(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))((a^r+\gamma b^r)(1)+(b^r-\gamma a^r)(2))]=0.$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S^i_{jkl} = 0$. □

Автором [5] проводилось исследование кривизны двумерного собственно гельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk},$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} h^{lk}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) - \gamma h^{lk}\left(\lambda_{jkl} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}\right),$$

причем $h_{ij} = a_i a_j + b_i b_j + \gamma(a_i b_j - a_j b_i)$, $\lambda_{ijk} = b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что $R^i_{jkl} \neq 0$.

## Заключение

В классификации Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1] кроме собственно гельмгольцевой геометрии получены еще две на тот момент неизученные геометрии с однородными метрическими функциями:

$$f(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2]e^{2\beta Ar(c)th\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}}, \quad f(x,y) = (x^1 - y^1)e^{\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\beta = \text{const}$, $\beta \neq 1, 0$. Эти геометрии называются соответственно псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой. Они также принадлежат классу финслеровых пространств.

В работе В.Х. Льва [6] приводится классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий, среди которых есть собственно гельмгольцева геометрия с метрической функцией:

$$f(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2]e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} + 2z^1 + 2z^2}.$$

Для этой метрической функции не выполняется основное свойство финслеровой геометрии – свойство однородности, то есть данная геометрия не принадлежит классу финслеровых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
2. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
3. *Богданова Р.А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
4. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
5. *Кыров В.А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1343–1361.
6. *Лев В.Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С. 90–103.

Статья поступила 16.05.2016 г.

Kyrov V.F. (2016) THE PROPERLY HELMHOLTZ PLANE AS FINSLER GEOMETRY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 15–22

DOI 10.17223/19988621/42/2

G.G. Mikhailichenko has built the complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries, i.e. geometries for which the six mutual distances between the four arbitrary points are functionally connected. In these geometries, the distance is understood in the generalized sense as the value of a function called a metric. The validity of metric axioms is not supposed. All these geometries are endowed with the maximum mobility, that is, there are groups of motions of maximum dimensionality equal to 3. Classification of such two-dimensional geometries includes both well-known geometries (Euclidean, the pseudo-Euclidean, symplectic, spherical, etc.), and unknown ones (the Helmholtz, pseudo-Helmholtz, dual Helmholtz, and simplicial geometries).

In this paper, we use methods of Finsler geometry to study the properly Helmholtz two-dimensional geometry. In the first section, we introduce the definition of the properly Helmholtz plane, and then we prove that it is a positive definite Finsler space (we check homogeneity and positivity of the metric function, as well as the positive definiteness of the Finsler metric tensor). The second section defines the properly Helmholtz two-dimensional manifold and proves that it is also a positive definite Finsler space. Then we calculate the basic Finsler tensor $C_{ijk}$ and additional $A_{ijk}$ tensor. With the help of these tensors, we find the Finsler scalar $J$ and prove that the special Finsler curvature tensor $S^{i}_{jkl}$ for the properly Helmholtz two-dimensional manifold is zero.

Keywords: metric function, the properly Helmholtz geometry, Finsler geometry.

*KYROV Vladimir Alexandrovich* ((Candidate of Physics and Mathematics,
Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Mikhaylitchenko G.G. (1981) Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometries]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 260(4). pp. 803–805.
2. Michailichenko G.G. (1983) On group and phenomenological symmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl*. 27(2). pp. 325–326.
3. Bogdanova R.A. (2009) Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya [Groups of motions of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution of a functional equation]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki – Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 12(4). pp. 12–22.
4. Rund H. (1959) *The differential geometry of Finsler spaces*. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verl.
5. Kyrov V.A. (2005) Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 46(6). pp. 1082-1096. DOI 10.1007/s11202-005-0103-1.
6. Lev V.H. (1988) Trekhmernye geometrii v teorii fizicheskikh struktur [Three-dimensional geometries in the theory of physical structures]. *Vychislitel'nye sistemy – Computation Systems*. 125. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 90–103.