

2. Когос К. Г., Фомичев В. М. Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4(18). С. 116–121.
3. Аvezова Я. Э., Фомичев В. М. Условия примитивности системы двух графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 113–114.

УДК 519.175.3

DOI 10.17223/2226308X/9/42

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ЦВЕТОЧНО-КОЛЁСНЫХ ГРАФОВ

В. А. Воблый, А. К. Мелешко

Получена точная формула для числа помеченных цветочно-колёсных графов с заданным количеством вершин и лепестков.

Ключевые слова: *корневой граф, граф колесо, цветочно-колёсный граф.*

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. Корневой граф имеет одну выделенную вершину, называемую корнем. Колесо W_n — граф с $n \geq 4$ вершинами, который образован соединением единственной вершины со всеми вершинами $(n - 1)$ -цикла [1, с. 63]. Граф W_4 изоморфен полному графу K_4 .

Цветочно-колёсный граф с m лепестками — это связный граф с одной точкой сочленения, у которого все m блоков (лепестков) — колёса, причём вершина, являющаяся осью колеса, не может быть точкой сочленения. Цветочно-колёсные графы представляют топологию коммуникационных, компьютерных и других сложных сетей [2]. Кроме того, перечисление графов тесно связано с теорией случайных графов; рандомизация колёсных подграфов сети может использоваться для защиты данных пользователей социальных сетей [3].

Теорема 1. Число $FW(n, m)$ помеченных цветочно-колесных графов с n вершинами и m лепестками при $n \geq 7$ и $m \geq 2$ равно

$$FW(n, m) = \frac{n!}{m!6^m} \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n-2m-i-2}{m-1} 2^i,$$

где $r = \min(m, n - 3m - 1)$.

Доказательство. Пусть $C_m(z) = \sum_{n=4}^{\infty} FW(n, m) \frac{z^n}{n!}$, NW_n — число помеченных колёс с n вершинами, RW_n — число помеченных корневых колёс с n вершинами, $R(z) = \sum_{n=4}^{\infty} RW_n \frac{z^n}{n!}$.

Так как метку для оси колеса W_n можно выбрать n способами и число циклов с $n - 1$ помеченными вершинами равно $(n - 2)!/2$, то $NW_n = n(n - 2)!/2$ при $n \geq 5$, $NW_4 = 1$.

Поскольку корень колеса W_n не должен быть вершиной-осью колеса, то метку для него можно выбрать $n - 1$ способами и при $n \geq 5$ имеем $RW_n = (n - 1)NW_n = n!/2$. Однако в случае W_4 (полный граф) осью может быть любая вершина и $RW_4 = nNW_4 = 4$. Поэтому имеем

$$R(z) = \frac{z^4}{6} + \frac{1}{2} \sum_{n=5}^{\infty} z^n = \frac{z^4}{6} + \frac{z^5}{2(1-z)}.$$

Граф с одной точкой сочленения может рассматриваться как корневой граф с корнем в точке сочленения. Такой граф можно получить склейкой в одну вершину непомеченных корней блоков. После склейки для непомеченной вершины вводится новая метка. Снятию метки с корня соответствует операция деления соответствующей производящей функции на z , а введению метки — операция умножения производящей функции на z [4, 5]. С учётом перестановок блоков вокруг точки сочленения получим

$$C_m(z) = \frac{z}{m!} \left(\frac{R(z)}{z} \right)^m = \frac{z}{m!} \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{2(1-z)} \right)^m = \frac{z^{3m+1}(1+2z)^m}{m!6^m(1-z)^m}.$$

С помощью бинома Ньютона и ряда $(1-z)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} z^k$ найдём

$$C_m(z) = \frac{z^{3m+1}}{m!6^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 2^i z^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} z^k.$$

Следовательно, имеем $FW(n, m) = n! [z^{-1}] C_m(z) z^{-n-1}$, где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета:

$$\begin{aligned} FW(n, m) &= \frac{n!}{m!6^m} [z^{-1}] \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{k+m-1}{m-1} 2^i z^{i+k+3m-n} = \\ &= \frac{n!}{m!6^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n-2m-i-2}{m-1} 2^i. \end{aligned}$$

Поскольку биномиальный коэффициент обращается в ноль при $m < i$ и $n-2m-i-2 < m-1$, верхний предел суммы равен $r = \min(m, n-3m-1)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
2. Bhatti A A., Nisar A., and Kanwal M. Radio number of wheel like graphs // Int. J. Graph Theory in Wireless ad hoc Networks and Sensor Networks. 2011. No. 4. P. 39–57.
3. Brankovic L., Lopez N., Miller M., and Sebe F. Triangle randomization for social network data anonymization // Ars Math. Contemporanea. 2014. V. 7. No. 2. P. 461–477.
4. Jin Y.-L. Enumeration of labelled connected graphs and Euler graphs with only one cut vertex // Yokohama Math. J. 1977. No. 45. P. 125–134.
5. Selkow S M. The enumeration of labeled graphs by number of cutpoints // Discr. Math. 1998. No. 185. P. 183–191.

УДК 519.1+519.173

DOI 10.17223/2226308X/9/43

О ГРАФАХ ПОЛНОГО РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ¹

А. А. Евдокимов, Е. П. Куценогая, Т. И. Федоряева

Изучается разнообразие шаров в конечных связных обыкновенных графах. Получен ряд свойств графов с полным разнообразием шаров. Как следствие, описаны кактусы с таким разнообразием шаров.

Ключевые слова: граф, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров.

¹Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00507.