

МЕХАНИКА

УДК 629.76

DOI 10.17223/19988621/44/4

А.В. Азин, С.В. Пономарев, С.В. Рикконен, А.М. Храмцов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПЬЕЗОДВИГАТЕЛЯ¹

Разработана одномерная математическая модель пьезодвигателя с учетом механической и акустической передачи энергии. Модель позволяет рассчитывать частотные характеристики механоакустической колебательной системы, по которым выбираются материалы элементов и конструкция двигателя, позволяющие согласовать источник энергии с нагрузкой изделия.

Ключевые слова: *пьезодвигатель, космический аппарат, колебательная система, динамическая сила, вибросмещение.*

В настоящее время миниатюрные двигатели и приводы широко применяются в технике. Практически во всех отраслях промышленности миниатюрные приводы востребованы, а в космической и военно-промышленной отрасли они просто необходимы. Постоянное требование улучшения массогабаритных показателей вынуждает исследователей искать новые принципы преобразования энергии из электрической в механическую, совершенствовать технику и технологию.

При расчете и проектировании пьезодвигателей и пьезопроводов для высокого коэффициента передачи энергии необходимо учитывать условие согласования пьезоактюатора (ПА) (источника механической энергии) с нагрузкой. При неправильном выборе конструкции и ошибочном выборе материалов элементов конструкции возможен вариант полного демпфирования передачи энергии от ПА к нагрузке. В этом случае особо актуальным является математическое моделирование конструкции изделия с правильным учетом конкретной нагрузки для применения в соответствующей отрасли промышленности.

Целью работы является разработка математической модели для расчета режимов работы ПА (согласование излучателя с нагрузкой) с максимальным коэффициентом передачи энергии. Особенность конструирования пьезодвигателей заключается в том, что частотный диапазон возбуждения ПА лежит в области частот, при которых необходимо учитывать совместную передачу энергии механическим и акустическим способами. На рис. 1 представлено схематическое изображение пьезодвигателя, работающего в режиме «короткого замыкания» (КЗ), то есть без механической нагрузки.

ПА с синусоидальной силой $F = F_m \cos(\omega t)$ посредством излучающей плиты массой $M_{\text{пл}}$ через пружину предварительногожатия K воздействует на толкатель

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0060.

массой m_a . Подпружиненная масса толкателя расположена на излучателе, механическая система имеет коэффициент вязкого трения R . Излучатель является абсолютно жестким, синусоидальная сила равномерно распределена по площади излучения. Это линейная одномерная колебательная система с одной степенью свободы со следующими допущениями:

- колебательная система представлена чисто линейной одномерной системой – все параметры постоянны и независимы от амплитуды колебаний, а также от частоты возбуждения;

- сила возбуждения чисто синусоидальная, излучающая плита создает плоскопараллельные волны в толкателе;

- излучающая плита при любых режимах работы сохраняет контакт с толкателем;

- излучатель является абсолютно жестким, синусоидальная сила равномерно распределена по площади плиты излучения;

- длина толкателя значительно меньше длины волны излучения.

Движение такой чисто механической колебательной системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$M \frac{dX_1^2}{dt^2} + K \frac{dX_1}{dt} + RX_1 = F_m \cos(\omega t). \quad (1)$$

Амплитуда виброскорости (чисто механической системы) массы толкателя определяется по формуле

$$\dot{X}_1 = \frac{F_m}{\sqrt{R^2 + (\omega M - \frac{K}{\omega})^2}}, \quad (2)$$

где масса M включает в себя массу толкателя – m_a , массу излучающей плиты – M_{pl} и 30 % массы ПА – M_{act} , K – жесткость пружины предварительного поджатия.

В [1] приведены два случая, описывающие параметры и поведение системы, когда $(kr) \gg 1$ и $(kr) \ll 1$, где r – радиус излучателя, м; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\lambda = c/f$ – длина волны, м.

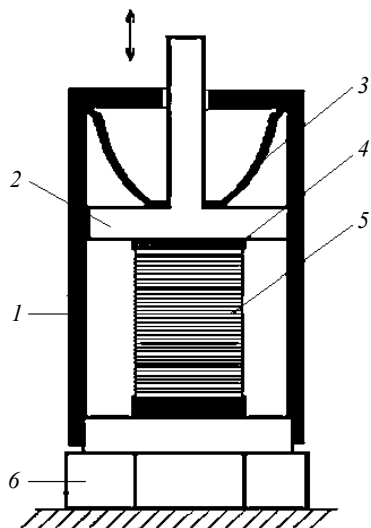


Рис. 1. Схематическое изображение пьезодвигателя: 1 – корпус пьезодвигателя; 2 – толкатель; 3 – пружина предварительного поджатия; 4 – излучающая плита; 5 – пьезоактуатор; 6 – винт поджатия

Fig. 1. Schematic representation of a piezo motor: 1, case of the piezo motor; 2, pusher; 3, spring of initial load; 4, emissive plate; 5, PZT stack actuator; 6, preload screw

При низких частотах воздействия длина вибрационной волны много больше размеров излучателя и произведение $(kr) \ll 1$. Если диаметр излучателя меньше одной трети длины волны (или $(kr) \ll 1$), то дальнейшее поле излучения можно не учитывать [1]. Частотный диапазон и размеры излучателя в системах пьезоприводов имеют произведение близкое к $(kr) < 1.5$, которое предопределяет учет упругой (акустической) передачи энергии вдоль толкателя. Для этого случая можно применить методику определения параметров колебательной системы, предложенную И.С. Чичининым [2]. Акустическое сопротивление (сопротивление излучения) наиболее просто трактуется, когда все точки излучающей поверхности источника колеблются синхронно, с одинаковой амплитудой (рис. 2). Сопротивление излучения абсолютно жесткой плиты в этом случае определяется отношением вибрационной силы на виброскорость $Z_n = F_n / \dot{X}$. Достаточно найти комплексную амплитуду $\dot{X}$ скорости перемещения поверхности S . На рис. 2 представлена акустическая подсистема механоакустической колебательной системы, ее механическая и электрическая схемы замещения. На рис. 2 приняты следующие обозначения: 1 – излучающая плита; 2 – присоединенная масса колебательной акустической подсистемы; 3 – масса излучающей платформы в механической схеме замещения – M_{pl} ; 4 – присоединенная масса колебательной акустической подсистемы в механической схеме замещения – m_n ; 5 – жесткость колебательной акустической подсистемы – K_n ; 6 – неупругое сопротивление колебательной акустической подсистемы – R_n ; 7 – инерционное сопротивление штампа в электрической схеме замещения – $(j\omega M_{pl})$; 8 – неупругое сопротивление акустической подсистемы в электрической схеме замещения – R_n ; 9 – упругое сопротивление акустической подсистемы в электрической схеме замещения – $(K_n/(j\omega))$; 10 – инерционное сопротивление присоединенной массы в электрической схеме замещения – $(j\omega m_n)$.

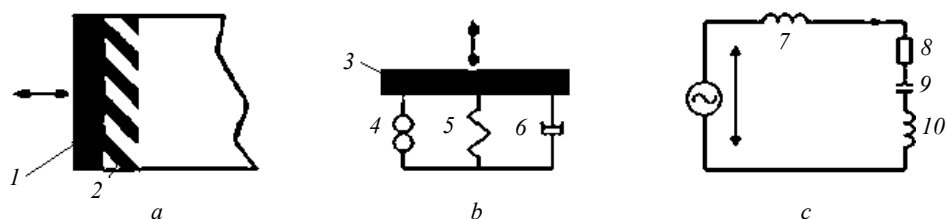


Рис. 2. Схема излучения жесткой плиты, расположенной на упругом полупространстве при $(kr) < 1.5$. Представлена акустическая подсистема механоакустической колебательной системы: *a* – абсолютно жесткая плита на упругом полупространстве; *b* – механическая схема замещения колебательной системы; *c* – электрическая схема замещения излучения волн

Fig. 2. Scheme of a rigid emissive plate located on an elastic half-space at $(kr) < 1.5$. Acoustic subsystem of a mechanical acoustic oscillating system: (*a*) completely rigid plate on an elastic half-space; (*b*) mechanical equivalent scheme of the oscillating system; (*c*) electrical equivalent circuit of the emission of waves

Движение такой акустической колебательной системы описывается следующим дифференциальным уравнением (3):

$$(M_{pl} + m_n) \frac{d^2 X_2}{dt^2} + K_n \frac{dX_2}{dt} + R_n X_2 = F_m \cos(\omega t). \quad (3)$$

Излучение происходит за счет деформации упругого полупространства под излучателем, процесс излучения зависит от присоединенной массы вещества объ-

екта m_n , которая колеблется в фазе с излучателем, акустическая жесткость материала K_n и коэффициент диссипации R_n [3–5]. В процессе излучения участвует масса излучающей плиты – M_{pl} .

Амплитуда виброскорости жесткой излучающей плиты определяется по формуле

$$\dot{X}_2 = \frac{F_m}{\sqrt{R_n^2 + \left(\omega(M_{pl} + m_n) - \frac{K_n}{\omega} \right)^2}}. \quad (4)$$

Параметры упругого излучения вычисляются следующим образом [2].

Коэффициент демпфирования (диссипация)

$$R_n = 7(1 - \gamma^2) \rho V_s R_i^2 \alpha_r, \quad (5)$$

Акустическая жесткость материала определяется по формуле

$$K_n = 8(1 - \gamma^2) \rho V_s^2 R_i, \quad (6)$$

Присоединенная масса вычисляется следующим образом:

$$m_n = (1 - \gamma^2) \rho R_i^3 \alpha_m, \quad (7)$$

где S – площадь излучателя, R_i – радиус излучателя, $\gamma = V_s / V_p$, V_s – скорость поперечных звуковых волн, V_p – скорость продольных звуковых волн, ρ – плотность материала толкателя с массой m_a , α – поправочные коэффициенты, близкие к единице, но зависящие от частоты возмущения и параметра γ .

Колебательную систему пьезодвигателя или пьезопривода можно представить в виде механоакустической системы. Механоакустическая система имеет две колебательные подсистемы, которые имеют свои параметры, частотные характеристики и резонансные частоты. Виброскорости $\dot{X}_1$ и $\dot{X}_2$ как бы «нельзя» складывать, потому что эти колебания имеют разную «природу» и описываются разными математическими моделями. Виброскорость $\dot{X}_2$ – это колебание упругого излучения, результатом колебательного процесса является деформация торца массы толкателя m_a . Виброскорость $\dot{X}_1$ – это движение всей массы подвижных частей конструкции как единого целого объекта. Однако обе подсистемы переносят энергию и участвуют в создании суммарном смещении торца толкателя $X_\Sigma = X_1 + X_2$.

Аналогии между механическими колебательными системами и электрическими колебательными контурами позволили развить систему электрических аналогий механических систем. Механические аналогии электрических величин приведены в таблице.

Электрическая система	Первая система механическая	Вторая система механическая	Первая система акустическая
Напряжение U	Сила F	Скорость V	Звуковое давление P
Сила тока I	Скорость V	Сила F	Объемная скорость (SV)
Индуктивность L	Масса m	Гибкость c	Акустическая масса $m_a = (\rho l / S)$
Активное сопротивление R	Сопротивление r	Величина, обратная коэффициенту сопротивления	Сопротивление акустических потерь r_a
Емкость C	Гибкость c	Масса m	Акустическая податливость $C_c = V / (\rho C^2)$

Используя правила преобразования электрических цепей, можно относительно быстро произвести расчеты режимов работы колебательных систем [3–6].

Для расчета механоакустической колебательной системы пьезодвигателя, представленной на рис. 1, должны совместно использоваться дифференциальные уравнения (1) и (3), а совместному решению этих уравнений может соответствовать электрическая схема замещения на рис. 3 [7, 8].

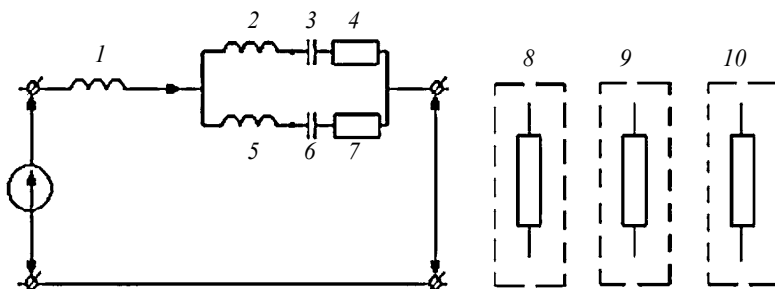


Рис. 3. Электрическая схема замещения колебательной системы пьезодвигателя, представленной на рис. 1

Fig. 3. Electrical equivalent circuit of the piezo drive oscillating system presented in Fig. 1

На схеме замещения показана масса излучающей плиты M_{pl} (1 – инерционное сопротивление излучающей плиты в электрической схеме замещения – $j\omega M_{pl}$), последовательно к ней присоединена механоакустическая колебательная система, с параллельным соединением элементов механической подсистемы $2 - 3 - 4$ (2 – инерционное сопротивление толкателя ($j\omega m_a$); 3 – упругое сопротивление пружины предварительного поджатия толкателя ($K/(j\omega)$); 4 – неупругое сопротивление механической подсистемы (R)) и акустической подсистемы $5 - 6 - 7$ (5 – инерционное сопротивление присоединенной массы акустической подсистемы ($j\omega m_n$); 6 – упругое сопротивление акустической подсистемы ($K_n/(j\omega)$); 7 – неупругое сопротивление акустической подсистемы (R_n)). Показаны варианты нагрузки колебательной системы – режим холостого хода 8 ($Z_n = \infty$), режим короткого замыкания 9 ($Z_n = 0$), инерционная нагрузка без активных потерь 10 ($Z_n = j\omega M_{nagr}$).

Преобразуем электрическую схему замещения колебательной системы пьезодвигателя, работающей на инерционную нагрузку.

В механоакустической системе чисто механическое сопротивление в символической форме будет выглядеть как

$$\dot{Z}_1 = R + j(\omega m_a - \frac{K}{\omega}). \quad (8)$$

Чисто акустическое сопротивление в символической форме

$$\dot{Z}_2 = R_n + j(\omega m_n - \frac{K_n}{\omega}). \quad (9)$$

Суммарное сопротивление системы будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{Z}_\Sigma = j\omega M_{pl} + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} + j\omega M_{nagr}. \quad (10)$$

Суммарное вибросмещение подвижной части конструкции определяется по формуле

$$X_{\Sigma} = \frac{F}{\dot{z}_{\Sigma}} \cdot \frac{1}{\omega}. \quad (11)$$

Сила на нагрузке равна

$$F_n = F - X_{\Sigma} \omega \left(j\omega M_{pl} + \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \right). \quad (12)$$

Пример расчета

Материал толкателя – оргстекло. Эквивалентный радиус излучающей плиты $R_i = 0.4$ мм. Жесткость пружины $K = 8.57 \cdot 10^9$ Н/м. Масса излучающей плиты $M_{pl} = 0.101 \cdot 10^{-3}$ кг. Масса толкателя $m_a = 1 \cdot 10^{-3}$ кг. Коэффициент потерь на трение $R = 525$ кг/с. Присоединенная масса толкателя $m_n = 1.3 \cdot 10^{-7}$ кг. Жесткость толкателя $K_n = 3.63 \cdot 10^8$ Н/м. Неупругое сопротивление толкателя $R_n = 146$ кг/с. Масса пригруза $M_{nagr} = 0.18$ кг. Сила пьезоактюатора $F = 1082$ Н.

При данной конструкции пьезопривода и материале толкателя (оргстекло) система имеет один явный резонанс на частоте 7000 Гц, длина волны равна 0.35 метра (значительно больше длины толкателя), основная часть энергии передается в нагрузку посредством акустической подсистемы – 95 %, 5 % – механической подсистемой (рис. 4).

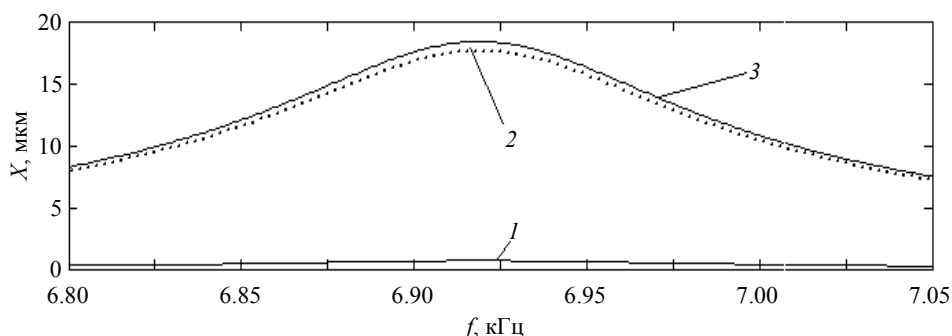


Рис. 4. Частотные характеристики вибросмещений механоакустической колебательной системы, рассчитанные по формуле (11): кр. 1 – вибросмещение механической подсистемы; кр. 2 – вибросмещение акустической подсистемы; кр. 3 – суммарное вибросмещение толкателя

Fig. 4. Frequency–response characteristics of vibration displacements of a mechanical acoustic oscillating system according to formula (11): 1, vibration displacement of the mechanical subsystem; 2, vibration displacement of the acoustic subsystem; 3, total vibration displacement of the pusher

Колебательная система имеет незначительные активные сопротивления, на которых рассеивается энергия и поэтому система может на резонансе существенно раскачаться. Это подтверждается высокими значениями силы на нагрузке (рис. 5).

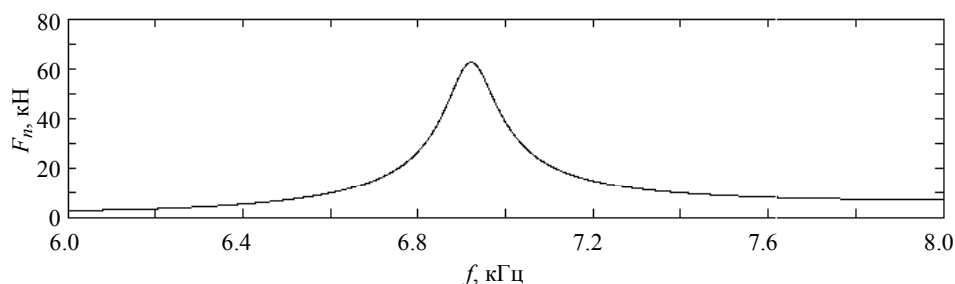


Рис. 5. Частотная характеристика силы на нагрузке механоакустической системы

Fig. 5. Frequency–response characteristic of the force on the load of mechanical acoustic oscillating system

Мгновенная мощность на инерционной нагрузке без потерь изменяется во времени с двойной частотой возбуждения, амплитуда данной мощности равна

$$P_{mgn} = F_{nm} \frac{\dot{X}_m}{2} \sin(2\omega t), \quad (13)$$

где F_{nm} – амплитудное значение силы на инерционной нагрузке, $\dot{X}_m$ – амплитудное значение виброскорости в нагрузке.

В режиме работы на инерционную нагрузку мгновенная мощность за период колебания дважды меняет знак, временные кривые мощности симметричны относительно оси абсцисс, следовательно, полезной работы система не производит.

Заключение

По результатам проведенного исследования предложен подход к моделированию пьезодвигателя, позволяющий рассчитать по отдельности передачу механической энергии через механическую и акустическую подсистемы с дальнейшим суммированием потоков энергии на нагрузке.

Для решения линейных одномерных задач согласования источника энергии с нагрузкой целесообразно применять математическое моделирование, основанное на аналоговых электрических схемах замещения первого рода.

Механическая система согласования источника энергии с нагрузкой для частот работы пьезодвигателей представляется механоакустической колебательной системой, в которой передача энергии осуществляется через два канала: механической и акустической подсистемами.

В аналоговой электрической схеме замещения колебательной системы механоакустическая система представляет собой параллельный электрический контур, сопротивление которого зависит от частоты колебаний и может иметь величину от 0 до бесконечности (энергетическая пробка).

Конструкция элементов и материалы, из которых сделаны элементы двигателей, существенно влияют на механическое сопротивление механоакустической системы и, следовательно, на коэффициент преобразования энергии.

Данный математический подход позволяет конструктору в приближенной форме выбрать материал элементов, конструкцию пьезодвигателя в зависимости от того, по какой механоакустической подсистеме намерены передавать энергию (по акустической или механической), с какими виброперемещениями и силами на нагрузке, и окончательно определить частоту работы пьезодвигателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976. 542 с.
2. Чичинин И.С. Вибрационное излучение сейсмических волн. М.: Недра, 1984. 221 с.
3. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
4. Афонин С.М. Многомерная структурно-параметрическая модель составного пьезодвигателя наноперемещений // Вестник машиностроения. 2007. № 1. С. 3–13.
5. Богданов Е.П., Рикконен С.В. Экспресс-метод определения параметров нагрузок вибрационных систем // Интернет-журнал «Науковедение». 2013. № 5.
6. Амеличев В.В., Вернер В.Д., Ильков А.В. МЭМС-микрофон. Выбор материалов, конструкции и технологии. Часть I. Электромеханический элемент // Нано-микросистемная техника. 2007. № 2. С. 53–62.
7. Пономарев С.В., Рикконен С.В., Азин А.В. Анализ работы пьезопривода по частотным характеристикам механоакустической колебательной системы // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 196–202.
8. Пономарев С.В., Рикконен С.В., Азин А.В. Моделирование колебательных процессов пьезоэлектрического преобразователя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 86–95.

Статья поступила 07.11.2016

Azin A.V., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Khramtsov A.M. MATHEMATICAL MODELING OF PIEZO MOTOR OPERATION MODES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 45–53

DOI 10.17223/19988621/44/4

At present, micro electromechanical systems appear to be progressively applicable in engineering. The problem of reducing weight-and-dimensional characteristics of the spacecraft (SC) system is of great importance in the space field. One of the solutions is replacement of electromechanical motors in different SC units by piezo motors. It is necessary to take into account the condition of consistency of PZT stack actuators (the sources of mechanical energy) with the load when calculating and designing the piezo motors of high energy transfer coefficient. In this case, the most relevant is mathematical modeling of a product design with correct consideration of the specific drive load in an actual industrial field.

Mathematical modeling by the finite element method in combination with 3D numerical simulation is most accurate and appropriate. However, this method is laborious and time-consuming. In practice, designers and constructors prefer to use simple linear one-dimensional mathematical models, which provide an accurate information about materials and product design. In linear one-dimensional models of oscillatory systems for the range of frequencies applied in piezo motors, it is necessary to consider the acoustic and mechanical principles of energy conversion and transfer from the source to the load. In this paper, a one-dimensional mathematical model of the piezo motor with consideration of mechanical and acoustic energy transfer is developed. This model allows calculating the frequency–response characteristics of mechanical acoustic oscillating system according to which the materials of elements and design of the drive are chosen.

Keywords: piezo motor, spacecraft, oscillating system, dynamic force, vibration displacement.

AZIN Anton Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

PONOMAREV Sergey Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

RIKKONEN Sergey Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: rikk2@yandex.ru

KHRAMTSOV Alexey Mikhaylovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: khramtsov.home@gmail.com

REFERENCES

1. Skuchik E. (1976) *Osnovy akustiki* [Foundations of Acoustics]. Moscow: Mir.
2. Chichinin I.S. (1984) *Vibratsionnoe izluchenie seysmicheskikh voln* [Vibrational Emission of Seismic Waves]. Moscow: Nedra.
3. Dieulesaint E., Royer D. (2000) *Elastic Waves in Solids*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag.
4. Afonin S.M. (2007) Mnogomernaya strukturno-parametricheskaya model' sostavnogo p'ezodvigatelya nanoperemeshcheniy [Multidimensional structural parametric model of a complex piezo motor of nanodisplacements]. *Russian Engineering Research*. 1. pp. 3–13.
5. Bogdanov E.P., Rikkonen S.V. (2013) Ekspress-metod opredelenie parametrov nagruzok vibratsionnykh sistem [A rapid metod of determining the parameters of loads of vibration systems]. *Journal Naukovedenie*. 5(18).
6. Amelichev V.V., Verner V.D., Il'kov A.V. (2007) MEMS-mikrofon. Vybora materialov, konstruktssii i tekhnologii. Chast' I. Elektromekhanicheskiy element [MEMS-microphone. Choice of materials, designs, and technologies. Part I. Electromechanical sensitive element]. *Journal of Nano and Microsystem Technique*. 2. pp. 53–62.
7. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Azin A.V. (2014) Analiz raboty p'ezoprivoda po chastotnym kharakteristikam mekhanoakusticheskoy kolebatel'noy sistemy [Analysis of a piezodrive operation in accordance to the frequency-response characteristics of mechanical acoustic oscillating system]. *Russian Physics Journal*. 57 (8/2). pp. 196–202.
8. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Azin A.V. (2015) Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov p'ezoelektricheskogo preobrazovatelya [Simulation of oscillatory processes in a piezoelectric transducer]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 86–95.