УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/47/2

С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА П.П. КУФАРЕВА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Известно, что верхнюю полуплоскость всегда можно отобразить на произвольные прямолинейные многоугольники с помощью интеграла Шварца – Кристоффеля. Однако вычисление констант, входящих в этот интеграл, представляло до сих пор слишком большие трудности. Применение метода П. П. Куфарева для этой цели сильно упрощает расчет, так как процесс определения этих констант сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье, в плане подтверждения возможностей метода П. П. Куфарева, рассматривается классическая задача о течении грунтовой воды под фундаментом плотины с примерами расчета.

Ключевые слова: *конформное отображение прямолинейных многоугольников, прообразы вершин, линии тока и линии постоянного давления.*

Метод П. П. Куфарева

Отображение верхней полуплоскости на односвязный прямолинейный N-угольник с заданным расположением вершин на границе области Z представляется формулой Щварца – Кристоффеля

$$Z(W) = \int_{-\infty}^{W} \prod_{k=1}^{N} (W - a_k)^{\alpha_k} \, dW \,. \tag{1}$$

В ней вещественные постоянные a_k – прообразы вершин многоугольника, а показатели степени α_k связаны с углами при вершинах φ_k зависимостью $\varphi_k = \pi(a_k+1)$. Трудность практического применения формулы (1) состоит в том, что прообразы a_k заранее неизвестны и их нужно находить по заданным вершинам Z_k многоугольника. Поэтому формула (1) обычно используется только в тех редких случаях, когда интеграл вида (1) получается в явном виде. Но и в этих случаях вычисление прообразов a_k, чаще всего, оказывается достаточно сложной задачей. В методе П. П. Куфарева проблема прообразов решается совершенно необычным способом, и при этом сводится к гораздо более легкой задаче – к численному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод впервые был предложен в статье П. П. Куфарева [1]. Он позволяет легко, быстро и с высокой точностью вычислять прообразы вершин по заданным вершинам отображаемого многоугольника.

Развитие метода [1] получило в работах [2, 3]. В то же время, уже более пятидесяти лет назад нашли применение численные методы конформных отображений [4, 5]. С развитием вычислительной техники эти методы получили новый импульс [6–10]. В предыдущей статье авторов [10] приводится теория метода П. П. Куфарева и вопросы его численной реализации с современных позиций. Можно сказать, что этот метод с успехом выдержал различные испытания и находится вне конкуренции по сравнению с другими возможными способами численных конформных отображений [11]. Метод П. П. Куфарева предназначен для вычисления прообразов вершин, и для этого в вычислительной программе достаточно задавать только последовательность отрезков сторон отображаемого многоугольника.

В настоящей статье, с целью еще одной проверки эффективности метода П.П. Куфарева, приводится пример численного решения задачи о течении грунтовых вод.

Математическая постановка задачи и метод ее решения

Опыт показывает, что движение грунтовой воды в однородном грунте достаточно точно следует законам движения идеальной жидкости. Поэтому для решения двумерных задач целесообразно применять метод конформных отображений. Математическая теория фильтрационных течений жидкости в пористой среде описана, например, в книге [11] и более подробно в книгах [12, 13]. В них считается, что выполняется условие несжимаемости жидкости и имеет место закон движения (Дарси) – скорость частиц жидкости пропорциональна градиенту давления P:

$$\boldsymbol{V} = -\chi \cdot \mathrm{grad} P, \quad \mathrm{div} \boldsymbol{V} = 0 . \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности χ зависит только от характера грунта и называется коэффициентом фильтрации. Из уравнений (2) следует, что давление в грунте удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 . \qquad (3)$$

Граничными условиями для определения давления P служат: 1) на участке, где грунт соприкасается с водой, давление должно быть равно гидростатическому давлению слоя воды над ним; 2) на участке контакта грунта водонепроницаемой границей нормальная производная давления равна нулю. Таким образом, должна решаться задача со смешанными граничными условиями для нахождения поля давления $P(x, y)$ в грунте.

В интересующей нас задаче можно найти простое решение для давления $P(u, v)$ внутри области t, которая представляет собой вертикальную полосу и показана на правой стороне рис. 1:

$$t = u + iv, \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < v < \infty . \qquad (4)$$

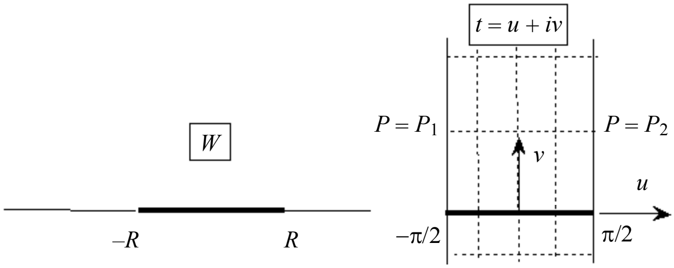

Рис. 1. Каноническая область t и верхняя полуплоскость W
Fig.1. Canonical domain t and upper half plane W

Искомое решение, очевидно, является линейной функцией переменной u:

$$P(u\ ,v)=\frac{P_1+P_2}{2}+\frac{P_2-P_1}{2}\cdot\frac{2u}{\pi}. \qquad (5)$$

Действительно, оно удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным u и v и принимает заданные значения P_1 и P_2 на вертикальных сторонах полосы t. В этом решении линиям движения частиц жидкости соответствуют горизонтальные линии $v = \text{const}$ в полосе t, а линиями постоянного давления являются вертикальные линии $u = \text{const}$.

Отображение вертикальной полосы (4) на плоскость с разрезом вдоль вещественной оси от точки R до точки $-R$, проходящим через ∞, осуществляется формулой

$$W=R\sin\left(u+iv\right)=R\ \sin u\ \operatorname{ch} v+i\ R\ \cos u\ \operatorname{sh} v\,. \qquad (6)$$

Из нее видно, что линиям тока и линиям постоянного давления соответствуют софокусные эллипсы и гиперболы в плоскости W с фокусами в точках $W = \pm R$.

Если отождествить область W с физической областью $Z = x+iy$, то формула (6) дает нам решение простейшей задачи о течении грунтовой воды под плотиной, у которой водоупорная граница состоит только из одного отрезка прямой линии: $y = 0,\ -R < x < R$. Этот результат можно обобщить на случай, когда границей подземного контура плотины является прямолинейный многоугольник произвольного вида.

Если на участке плотины $-R < \operatorname{Re}(W) < R$ расположены прообразы вершин a_k некоторого многоугольника, вычисленные предварительно методом П. П. Куфарева, то интеграл Шварца – Кристоффеля (1) запишется в переменных $t = u+iv$ в виде

$$Z(u,v)=R\int\limits_{-\pi/2}^{u}\prod_{k=1}^{N}(W-a_k)^{\alpha_k}\cos(u+iv)\ d(u+iv)\,. \qquad (7)$$

Далее при нахождении линий тока интегрирование в (7) проводится по контуру $v = \text{const}$. Следовательно, решение задачи о построении линий тока грунтовых вод и линий постоянного давления сводится к вычислению матрицы $\mathbf{Z}(u_m,\ v_s)$ на дискретном множестве ее аргументов и выводу на экран ее строк или столбцов. Из сказанного вытекает, что задача о течении грунтовых вод отличается от задач обтекания многоугольников, которые рассматривались в нашей статье [10], только тем, что применяется другая программа для рисования линий постоянного давления и линий тока. Текст этой программы, написанной в системе MatLab, имеет следующий вид:

```
function Risline2 (DD)
alf=DD(1, :); b=DD(2, :); R=(b(end)-b(1))/2; v=linspace(0.001, 1, 20);
u=linspace(-pi/2,pi/2,3200); [V,U]=ndgrid (v, u);  t=U+1i*V; W=b(1)+R+R*sin(t);
F=1;  for k=1: length(b)  F=F.*(W-b(k)).^alf (k); end; F=F.*W; F=R*F.*cos(t);          (8)
vv=-R*cosh(v)'; vv=repmat(vv, 1, length(u)); Z=vv+cumtrapz (u, F, 2); plot(Z',' k');
hold on; M=1: length(u); pp= M(rem(M,100)= =0); pp=[M(2), pp ,M(end)];
Q=Z(:,pp); plot (conj(Q),'k');  hold off ; axis([-42, 30, -15, 12]); end
```

Входным параметром программы (8) является матрица **DD**, вычисленная методом П.П. Куфарева [10].

Матрица **DD** состоит из двух строк, первая из которых содержит показатели α_k степеней интеграла (7), а во второй строке находятся прообразы a_k вершин многоугольника в физической плоскости. Примеры расчета течения грунтовых вод, при различном профиле водоупорных границ плотины, показаны на рис. 2 и рис. 3.

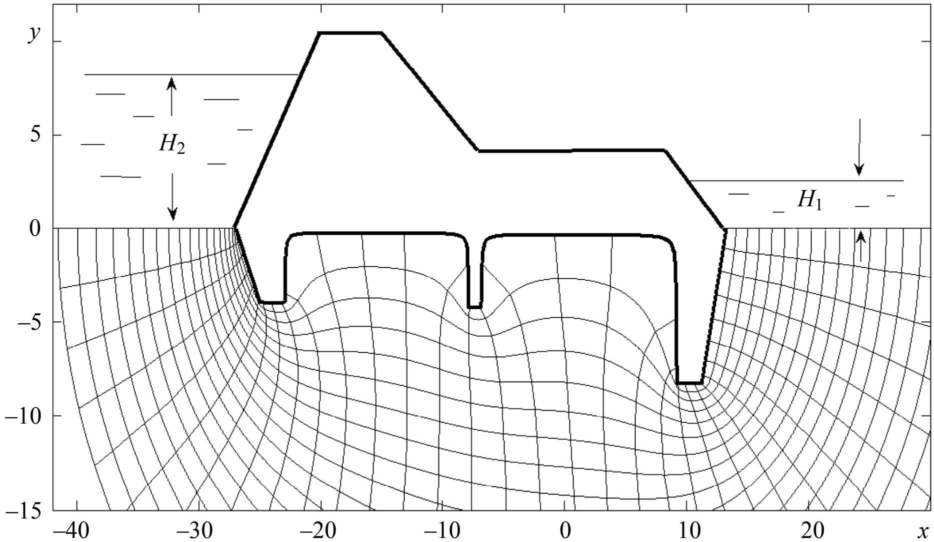

Рис. 2. Линии движения грунтовых вод и линии постоянного давления под плотиной
Fig. 2. Lines of subsoil water movement and constant pressure lines under the dam

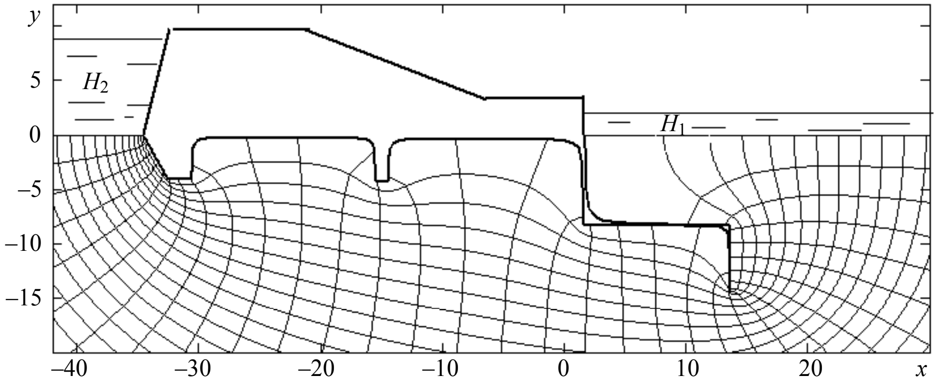

Рис. 3. Линии движения грунтовых вод и линии постоянного давления при другом расположении водоупорных границ
Fig. 3. Lines of subsoil water movement and constant pressure lines at another location of waterproof bounds

Заключение

Определение постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца по методу П.П. Куфарева имеет надежную теоретическую основу, и свойства этого метода подтверждаются вычислениями. Примеры расчетов показывают очень высокую эффективность и точность метода П.П. Куфарева. Число задач, для решения которых можно успешно применять данный метод, очень велико из разных областей гидродинамики и электродинамики. Рассмотренные примеры можно считать модельными и достаточно простыми, но их нельзя решить столь же эффективно никакими другими известными в настоящее время способами. Поэтому метод П.П. Куфарева имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куфарев П.П.* Об одном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // ДАН СССР. 1947. Т. 57. № 6. С. 535–537.
2. *Колесников И.А.* Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 18–28.
3. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник Томского ун-та. 2003. № 280. С. 52–54.
4. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск: Томский гос. ун-т им. В.В. Куйбышева, 1953. 82 с.
5. *Байбарин Б.Г.* Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области: дис… канд. физ.-мат. наук. Томск: Томский гос. ун-т им. В.В. Куйбышева, 1966. 97 с.
6. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля – Шварца // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.
7. *Насыров С.Р. Низамиева Л.Ю.* Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40.
8. *Gutlyanskii V.Y., Zaidan A.O.* On conformal mapping of polygonal regions // Ukrainian Mathematical Journal. 1993. V. 45. No. 11. P. 1669–1680.
9. *Соболев В.В.* Численный метод конформного отображения полуплоскости в себя с гидродинамической нормировкой // Вестник Томского ун-та. 2003. № 280. С. 81–85.
10. *Жамбаа С., Касаткина Т.В., Бубенчиков А.М.* Об определении констант в интеграле Шварца – Кристоффеля по методу П.П. Куфарева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5 (43). С. 21–27.
11. *Фильчаков П.Ф.* Приближенные методы конформных отображений. Киев: Наукова думка, 1964. 530 с.
12. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 663 с.
13. *Павловский Н.Н.* Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Собр. соч. т. II. М.-Л.: Изд-во АНСССР, 1956. 352 с.

Статья поступила 01.12.2016 г.

Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. APPLICATION OF KUFAREV METHOD TO PROBLEM OF SUBSOIL WATERS MOVEMENT UNDER HYDRAULIC ENGINEERING CONSTRUCTIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 15–21

DOI 10.17223/19988621/47/2

To solve plane filtration problems that are described by the classical Darcy motion law, it is proposed to apply the method of conformal mappings implemented in the form of Kufarev's approach. This approach makes it convenient to find the constants entering into the Schwarz–Christoffel integral as the result of solving a system of ordinary differential equations. The system of differential equations for $b_k = a_k - \lambda$ (here a_k are the prototypes of the polygon vertices, λ is the prototype of the cut vertex) is solved with the use of matrix technologies in the MatLab system. In this case, the solution of the problem of constructing groundwater streamlines and lines of constant pressure is reduced to computing the matrix on a discrete set of its arguments and displaying the rows or columns of this matrix. Using the described solution construction technique, the motion of groundwater under a dam with a specific geometrical shape and depth in the ground at the existing difference between flood levels before and after the dam is considered.

Keywords: conformal mapping of rectilinear polygons, prototypes of polygon vertices, streamlines and lines of constant pressure.

JAMBAA Soninbayar (School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: jsoninbayar@yahoo.com.

KASATKINA Tat'yana Vasilyevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: alexy121@mail.ru

REFERENCES

1. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode opredeleniya parametrov v integrale Kristoffelya – Shwarza [A method for determining the parameters of the Schwarz – Christoffel integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 57. pp. 535–537.
2. Kolesnikov I.A. (2014) Opredeleniye aktsessornyh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol'nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogouniversiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 18–28.
3. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shwarza dlya schetnougol'nika [The Formula type formula Christoffel – Schwarz for numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 52–54.
4. Chistyakov Yu.V. (1953) *Chislennyy metod opredeleniya funktsii konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki* [A numerical method for determining the function that conformally mapping a circle onto polygons]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
5. Baybarin B.G. (1966) *Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya parametrov proizvodnoy Shwarza dlya funktsii, konformno otobrazhayushchey poluploskost' na krugovye oblasti* [On One Numerical method of determining the parameters of the Schwarz derivative for a function that conformally mapping the half-plane onto a circular area]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
6. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. (2016) Parametricheskii metod nakhozhdeniya aktsessornyh parametrov v obobshchennykh integralakh Kristoffelya – Shwarza [A parametric method of

finding accessory parameters for the generalized Schwarz – Christoffel integrals]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 158(2). pp. 202–220.
7. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. (2011) Opredelenie aktsessornykh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy [Finding of Accessory Parameters for Mixed Inverse Boundary Value Problem with Polygonal Known Part of Boundary]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya – Izvestiya of Saratov University. New Series*. 11(4). pp. 34–40.
8. Gutlyanskii V.Y., Zaidan A.O. (1993) On conformal mapping of polygonal regions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 45(11). pp. 1669–1680.
9. Sobolev V.V. (2003) Chislennyy metod konformnogo otobrazheniya poluploskosti v sebya s gidrodinamicheskoy normirovkoy [The numeric method of the conformal mapping of the half-plane into self with the hydrodynamics normalization]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogouniversiteta – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 81–85.
10. Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. (2016) Ob opredelenii constant v integrale Kristoffelya –Shwarza po metodu P. P. Kufareva [On the determination of constants in the Schwarz-Christoffel integral by P.P. Kufarev's method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 21–27. DOI 10.17223/19988621/433/2
11. Fil'chakov P.F. (1964) *Priblizhennye metody konformnyikh otobrazheniy* [Approximate methods of conformal mappings]. Kiev: Naukova Dumka.
12. Polubarinova-Kochina P.Ya. (1977) *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [Theory of ground water movement]. Moscow: Nauka.
13. Pavlovsky N.N. (1956) *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod pod gidrotechnicheskimi sooruzheniyami i yeye osnovnyie prilozheniya* [Theory of ground water movement under hydraulic structures and its main applications]. Coll. w. Vol. II. Moscow; Leningrad: Izd-vo Akad. Nauk SSSR.