МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.4 MSC 80M15, 65E05
DOI 10.17223/19988621/57/1

Д.Ю. Иванов

УТОЧНЕНИЕ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

Рассматривается решение двумерных начально-краевых задач для уравнения $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ с граничными условиями второго и третьего рода при нулевом начальном условии с помощью коллокационного метода граничных элементов. Для того чтобы приближенное решение сходилось к точному с кубической скоростью равномерно в пространственно-временной области $\Omega\times[0,T]$, при вычислении потенциала простого слоя в точке x интегралы на граничных элементах, отстоящих от точки x на расстоянии r, не превышающем, примерно, трети радиуса круга Ляпунова, аппроксимируются на основе аналитического интегрирования по некоторой компоненте расстояния r. Такая аппроксимация практически и теоретически осуществима для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$ класса C^5.

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность, граничные интегральные уравнения, тепловой потенциал простого слоя, сингулярный граничный элемент, коллокация, оператор, равномерная сходимость.*

В настоящей работе рассматриваются внутренние и внешние начально-краевые задачи (НКЗ) для уравнения $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в открытой двумерной пространственной области Ω с граничными условиями второго и третьего рода при нулевом начальном условии. Предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить равномерно сходящиеся в пространственно-временно́й области $\Omega\times[0,T]$ приближенные решения указанных НКЗ. Решения ищутся в виде потенциала простого слоя с неизвестной функцией плотности, определяемой из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода. Ранее обоснование КМГЭ для решения таких НКЗ типа Неймана на основе ГИУ второго рода было выполнено в работах [2–5]. В работах [2, 4, 5] доказательство сходимости метода было сделано на границах класса гладкости C^∞, а в работе [3] – на негладких поверхностях, удовлетворяющих условию типа Липшица. В работе [4] при решении ГИУ используется замена переменных, которая позволяет избавиться от сингулярности в правой части ГИУ.

В настоящей работе осуществляется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ) временнóй C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}(\tau)$, через которую выражаются ядра интегральных операторов, с равным шагом h_τ по параметру полугруппы τ. Кроме того, осуществляется ККИ функции плотности, при этом граница $\partial\Omega$ разбивается на равные по длине дуги s граничные элементы (ГЭ).

Дальнейшая аппроксимация ГИУ осуществляется в соответствии с работой [6], где для вычисления интегралов по s на сингулярном ГЭ, а также на околосингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, используется точное интегрирование по переменной $\tilde{r}$ – расстоянию от граничной точки, в которой вычисляется интеграл как функция от параметра, до текущей точки интегрирования $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$ (сингулярным называется ГЭ, в котором достигается значение $\tilde{r} = 0$). Такое интегрирование практически осуществимо для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$. Для дальнейшей аппроксимации потенциала в точках $\boldsymbol{x} \in \Omega$ здесь предлагается схожая методика. А именно, для вычисления интегралов по s на ГЭ, отстоящих от точки $\boldsymbol{x}$ на расстоянии, не превышающем, примерно, трети радиуса круга Ляпунова, используется точное интегрирование по некоторой компоненте ρ расстояния r от точки $\boldsymbol{x}$ до точки $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$: $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$ (d – расстояние от $\boldsymbol{x}$ до $\partial\Omega$), также практически осуществимое для любой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$. При таком интегрировании в качестве весовых функций берутся функции переменной ρ, порожденные фундаментальным решением уравнения теплопроводности, а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по ρ. Другие интегралы по s на ГЭ вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79]. Интегрирование по τ проводится аналогично: множитель $e^{-p\tau}$ аппроксимируется с помощью ККИ, и тогда интегралы вычисляются точно.

Матричные коэффициенты разрешающих НКЗ и ГИУ дискретных операторов экономно вычисляются в алгебре полиномов, образованных степенями оператора $\boldsymbol{U}(h_\tau)$. С помощью разрешающего НКЗ дискретного оператора и значений граничной функции в точках коллокации $t_n = n\,h_\tau$ вычисляются значения приближенного решения НКЗ в точках t_n, что позволяет осуществить ККИ приближенного решения НКЗ по времени t.

Доказано, что полученные таким образом приближенные решения НКЗ сходятся к точным с кубической относительно шагов по времени и длине дуги скоростью равномерно в области $\Omega \times [0, T]$. Доказана равномерная в $\Omega \times [0, T]$ устойчивость приближенных решений НКЗ к возмущениям граничных функций. Полученные результаты справедливы для границы $\partial\Omega$ с гладкостью C^5. В работе [5] также доказана равномерная сходимость приближенных решений, но в предположении, что интегралы на ГЭ вычислены точно. Вопрос аппроксимации интегралов на ГЭ в литературе считается чисто вычислительным и выносится за рамки доказательства сходимости. Обычно интегралы по s в потенциале рекомендуется вычислять с помощью ПКФГ, так как подынтегральная функция при $\boldsymbol{x} \in \Omega$, строго говоря, гладкая. Но при $r \to +0$ подынтегральная функция, полученная после предварительного интегрирования по τ, обладает логарифмической особенностью, поэтому применение ПКФГ при $r \approx 0$ нарушает равномерную сходимость, что проявляется в снижении точности вблизи границы $\partial\Omega$.

Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению НКЗ в круговой пространственной области, которые показывают, что применение точного интегрирования по ρ позволяет в значительной мере сократить уменьшение точности численных решений при приближении к границе $\partial\Omega$ по сравнению с применением исключительно ПКФГ для аппроксимации интегралов по длине дуги на ГЭ при вычислении потенциала.

Предварительные замечания

Пусть Ω^+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область, и $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$). Кроме того, пусть $\partial\Omega$, граница области Ω^+, является кривой класса гладкости C^2, если не оговорено особо. Рассмотрим внутренние и внешние краевые задачи:

$$a^2 \Delta_2 \boldsymbol{u}_2^\pm - p\boldsymbol{u}_2^\pm = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_2^\pm \ (\,\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm\,),\ \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{u}_2^\pm - \eta\,\boldsymbol{u}_2^\pm = \boldsymbol{w}_2^\pm \ (\,\boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{u}_2^\pm(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}_2^\pm(\boldsymbol{x})$ – векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$ ($I_T \equiv [0, T]$), заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно (все пространства функций здесь комплексные); $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку $\boldsymbol{x}$ и направленная внутрь области Ω^+; $\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2); $p > 0$, $a > 0$ (коэффициент температуропроводности), $\eta \ge 0$ (коэффициент теплообмена) – постоянные; $\boldsymbol{B}$ – замкнутый оператор в L_2: $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(\boldsymbol{B})$ классов функций $\boldsymbol{f} \in L_2$, эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке I_T функциям $f(t)$, таким, что $f(0) = 0$.

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в пространстве L_2. В работах [7, 8] доказана однозначная разрешимость задач (1) в классе $C(\overline{\Omega^\pm}) \cap C^2(\Omega^\pm)$ при любых $\boldsymbol{w}_2^\pm \in C(\partial\Omega)$. Решения имеют вид векторных потенциалов – криволинейных интегралов первого рода:

$$\boldsymbol{u}_2^\pm(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_2^\pm \ (\,x \in \Omega^\pm\,), \quad (2a)$$

где функции $\boldsymbol{v}_2^\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ:

$$\left(\boldsymbol{G}_2^\pm \boldsymbol{v}_2^\pm\right)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_2^\pm(\boldsymbol{x}) \ (\,\boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,),\ \boldsymbol{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \boldsymbol{G}_2 - \eta\,\boldsymbol{G}_0, \quad (2b)$$

$$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds' \ (\,\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega),\ i = 0, 2\,),$$

$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau \ \ (\boldsymbol{f} \in L_2,\ i = 0,2),$$

$$g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau) \equiv a_0(r,\tau),\ g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau) \equiv a_2(r,\tau)b_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),$$

$$a_0(r,\tau) \equiv a(r,\tau),\ a_2(r,\tau) \equiv -r\,\partial_r a(r,\tau),\ b_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} \ln r^{-1}.$$

Здесь $a(r,\tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1}\exp\left[-r^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]$, $r \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}$ осуществляется по точке $\boldsymbol{x}$. Операторы $\boldsymbol{U}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором $\boldsymbol{B}$: $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t) = f(t-\tau)$ при $\tau \le t$, $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t) = 0$ при $\tau > t$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{f} = \lim\limits_{\tau\to+0}\tau^{-1}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})$ ($\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B})$). Заметим, что $\|\boldsymbol{U}(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $\boldsymbol{U}(\tau) = \boldsymbol{O}$ при $\tau \ge T$ ($\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор). Имеют место равенства:

$$\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B}^n),\ n \in \mathbf{N} \equiv \{1,2,\ldots\}). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s),\tilde{x}_2(s))$, причем $s > 0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s < 0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно-однозначное отображение множества $I'_S \equiv [-S,S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $\tilde{x}_i(s)$ ($i = 1,2$) имеют непрерывные производные на замкнутом множестве $\overline{I'_S}$ до порядка k включительно, причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$ ($l = \overline{0,k}$).

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0,1,\ldots\}$) функций $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $\boldsymbol{f}^{(l)}$: $\boldsymbol{f}^{(l)}(s) \equiv d^l \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))\big/ds^l$ ($s \in \overline{I'_S}$, $l = \overline{0,k}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)} = \max\limits_{l=\overline{0,k}}\sup\limits_{s\in\overline{I'_S}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\right\|$ ($C^0(\partial\Omega) \equiv C(\partial\Omega)$). Обозначим через H^n ($n \in \mathbf{N}$) гильбертовы пространства функций $\boldsymbol{f} \in L_2$: $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f} \in L_2$ ($m = \overline{1,n}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{H^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^{n}\left\|\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\right\|_{L_2}^2\right]^{1/2}$ ($H^0 \equiv L_2$). Определим банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$) функций $\boldsymbol{f} \in C^k(\partial\Omega)$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in H^n$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) и $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f} \in C^k(\partial\Omega)$ ($m = \overline{1,n}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max\limits_{l=\overline{0,k}}\sup\limits_{s\in\overline{I'_S}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\right\|_{H^n}$ ($C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$). Зададим банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ ($C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$) с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k,n,m \in \mathbf{Z}_+$).

Условимся оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как $\boldsymbol{A}$ [$B \to C$], а если $C = B$, то $\boldsymbol{A}$ [B]. В силу следствия 3 [9] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_2^{\pm}$ [$C_{n,m}^{k}(\partial\Omega)$] всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k,n,m \in \boldsymbol{Z}_+$).

Приближенное решение граничного интегрального уравнения

В настоящем параграфе кратко опишем результаты работы [6], касающиеся операторов, позволяющих получить приближенное решение ГИУ (2b) на сетке границы $\partial\Omega$.

Пусть s, s' – значения параметра, соответствующие точкам $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$. Введем обозначение: $\sigma \equiv s' - s$. На множестве $\Theta \equiv \{(s,s'):\ \sigma \in \overline{I'_S}\ \ s \in \overline{I'_S}\}$ зададим функцию $\rho(s,s')$: $\rho = \tilde{r}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho = -\tilde{r}$, если $\sigma < 0$ ($\tilde{r}(s,s') \equiv |\tilde{\boldsymbol{x}}(s) - \tilde{\boldsymbol{x}}(s')|$). Введем в рассмотрение функции $\psi_i(s,s')$ ($i = 0,2,3$), заданные на множестве Θ при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$ ($i = 0,2$) и $\psi_3 \equiv \varphi_3 / \sigma$, где

$$\varphi_0(s,s') \equiv \tilde{r}^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_2(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}\varphi_0 = -\tilde{x}'_2(s)[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}'_1(s)[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_3(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{s'}\varphi_0 = \tilde{x}'_1(s')[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}'_2(s')[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s,s) = \psi_3(s,s) \equiv 1,\ \ \psi_2(s,s) \equiv 2^{-1}[-\tilde{x}'_2(s)\tilde{x}''_1(s) + \tilde{x}'_1(s)\tilde{x}''_2(s)].$$

Кроме того, определим на множестве Θ функции

$$\delta(s,s') \equiv (\partial_{s'}\rho)^{-1} = \sqrt{\psi_0} / \psi_3,\ \ \delta_2(s,s') \equiv b_2(\tilde{\boldsymbol{x}}(s), \tilde{\boldsymbol{x}}(s')) = -\psi_2/\psi_0 .$$

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^{j}\delta_2$ ($j = \overline{0,n}$). Кроме того, для любого $M > 1$ существует число Σ: $0 < \Sigma \leq S$, такое, что при $(s,\sigma) \in \overline{I'_S} \times I'_\Sigma$ ($I'_\Sigma \equiv [-\Sigma, \Sigma]$) функция δ ограничена: $1 \leq \delta \leq M$, и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^{j}\delta$ ($j = \overline{0,n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_s(\sigma) \equiv \rho(s, s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in I'_S$ и $M > 1$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество I'_Σ на множество $\rho_s(I'_\Sigma) \equiv [\rho_s(-\Sigma), \rho_s(\Sigma)]$. Функции $\tilde{\delta}_0(s,\rho) \equiv \delta(s, s+\sigma_s(\rho))$, $\tilde{\delta}_2(s,\rho) \equiv \delta(s, s+\sigma_s(\rho))\delta_2(s, s+\sigma_s(\rho))$ ($\sigma_s(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_s(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\overline{I'_S} \times \rho_s(I'_\Sigma)$ производные $\partial_\rho^{j}\tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0,n}$, $i = 0,2$).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a,b]$, $m = \overline{0,2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j\neq m)}^{2} \frac{z-z_j}{z_m-z_j}, \; z_j \equiv \overline{z} + q_j h_z \;\; (j=\overline{0,2});$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j\neq m)}^{2} \frac{z-\tilde{z}_j}{\tilde{z}_m-\tilde{z}_j}, \; \tilde{z}_j \equiv \overline{z} + \tilde{q}_j h_z \;\; (j=\overline{0,2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\overline{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [10, с. 92]. Пусть $\boldsymbol{f}(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a,b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B. Тогда для функций $\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(z_m)\Lambda_m(z)$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(\tilde{z}_m)\tilde{\Lambda}_m(z)$ и первых и вторых производных функции $\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z)$ при $z \in [a,b]$ имеют место оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) - \boldsymbol{f}(z)\right\|_B \le c_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}(z)\right\|_B h_z^3, \;\; \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2 - \boldsymbol{f}\right\|_B \le \tilde{c}_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}(z)\right\|_B h_z^3,$$

$$c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \; \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}; \tag{4}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z)\right\|_B \le c_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} \left\|\boldsymbol{f}(z_m)\right\|_B, \;\; \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2(z)\right\|_B \le \tilde{c}_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} \left\|\boldsymbol{f}(\tilde{z}_m)\right\|_B,$$

$$c_\Lambda \equiv 3, \; \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}\left(7+2\sqrt{3}\right); \tag{5}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(1)}(z)\right\|_B \le c'_\Lambda \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(1)}(z)\right\|_B, \;\; \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(2)}(z)\right\|_B \le c''_\Lambda \sup_{z\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(2)}(z)\right\|_B,$$

$$c'_\Lambda \equiv 3, \; c''_\Lambda = 2^{-1}. \tag{6}$$

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$; $\tau_n \equiv n h_\tau$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$, $h_\tau \equiv T/N$; $\tilde{\tau}_n \equiv n\tilde{h}_\tau$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$, $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau/\tilde{N}$.

Пусть $L/2 \in \boldsymbol{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций $\boldsymbol{f}$ со значениями $\boldsymbol{f}_l \in L_2$, заданными в узлах $\boldsymbol{x}_l \equiv \tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv l h_s$, $l = \overline{-L-1, L}$, $h_s \equiv S/(L+1)$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{H_L} = \max_{-L-1\le l\le L} \|\boldsymbol{f}_l\|_{L_2}$. Условимся считать, когда это будет необходимо, что $\boldsymbol{x}_{l+2L+2} = \boldsymbol{x}_l$. Зададим проекционные операторы $\boldsymbol{P}_L$ $[\, C(\partial\Omega) \to H_L \,]$: $(\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f})_l = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$ $(\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1)$.

Зададим ограниченные операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_i \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{i,n} \boldsymbol{U}(\tau_n)$ $[\, H_L \to H_L \,]$ $(i = 0,2)$:

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{i,0} \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \hat{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau)\, d\tau, \;\; \hat{\boldsymbol{G}}_{i,2n+1} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau)\, d\tau \;\; (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{i,2n} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \hat{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau)\, d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau)\, d\tau \;\; (n = \overline{1, N/2-1});$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^{2} \exp\left[-p\left(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1} + \tilde{q}_m \tilde{h}_\tau\right)\right] \tilde{\Lambda}_m(\tau)$$

$$(\tau \in \left[\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}}, \tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}\right], \; \tilde{n} = \overline{0, \tilde{N}/2-1}, \; n = \overline{0, N-1}).$$

Операторы $\hat{A}_i(\tau)$ $[H_L \to H_L]$ ($\tau > 0$) подобно $\hat{\boldsymbol{G}}_{i,n}$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка $2L+2$:

$$\left(\hat{A}_i(\tau)\boldsymbol{f}\right)_k = \sum_{l=-L-1}^{L} \hat{g}_{i,k,l}(\tau)\boldsymbol{f}_l \;\; (k = \overline{-L-1,L},\; \boldsymbol{f} \in H_L),$$

$$\hat{g}_{i,k,2l}(\tau) \equiv \tilde{J}_{i,1,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{i,1,k,2l}(\tau),$$

$$\hat{g}_{i,k,2l-1}(\tau) \equiv \tilde{J}_{i,2,k,2l-3}(\tau) + \tilde{J}_{i,2,k,2l-2}(\tau) + \tilde{J}_{i,0,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{i,0,k,2l}(\tau) \;\; (l = \overline{-L/2, L/2}),$$

$$\tilde{J}_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) + \tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) \;\; (l = \overline{-L-1,L}).$$

В свою очередь, функции $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$ и $\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau)$ ($\tau > 0$) определяются равенствами

$$\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{\rho_k(s'_l)}^{\rho_k(s'_{l+1})} a_i(\rho,\tau)\hat{\delta}_{i,m,k}(\rho)\,d\rho \quad (i = 0,2,\; m = \overline{0,2},\; k,l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\hat{\delta}_{i,m,k}(\rho) \equiv \sum_{m'=0}^{2} \breve{\delta}_{i,m,k}(\overline{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_{m'}h'_{k,l})\tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \;\; (\rho \in [\rho_k(s'_l), \rho_k(s'_{l+1})]),$$

$$h'_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_{l+1}) - \rho_k(s'_l)],\; \overline{\rho}_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s'_l) + \rho_k(s'_{l+1})],$$

$$\breve{\delta}_{i,m,k}(\rho) \equiv \tilde{\delta}_i(s_k,\rho)\breve{\Lambda}_m\left(s_k + \sigma_k(\rho)\right);$$

$$\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) \equiv h''_l \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j\, \breve{g}_{i,m,k}(\overline{s}_l + h''_l z_j, \tau),\; \overline{s}_l \equiv 2^{-1}\left(s''_l + s''_{l+1}\right),\; h''_l \equiv 2^{-1}\left(s''_{l+1} - s''_l\right)$$

$$(i = 0,2,\; m = \overline{0,2},\; k,l = \overline{-L-1,L}).$$

Здесь $\rho_k(\sigma) \equiv \rho(s_k, s_k + \sigma)$; $\sigma_k(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_k(\sigma)$; $\breve{\Lambda}_m(s)$ – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве $\overline{I'_S}$: $\breve{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s)$ ($s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$, $l = \overline{-L/2, L/2}$); z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!]\left(d^\gamma/dz^\gamma\right)\left(z^2-1\right)^\gamma$ на промежутке $[-1;1]$, $\hat{w}_j$ – весовые коэффициенты ПКФГ с γ узлами ($\sum_{j=1}^{\gamma}\hat{w}_j = 2$, $\hat{w}_j > 0$) [10, с. 255]; $\breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau) \equiv \tilde{g}_i(s_k, s_k+\sigma, \tau)\breve{\Lambda}_m\left(s_k + \sigma\right)$, $\tilde{g}_i(s,s',\tau) \equiv g_i(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s'), \tau)$. Кроме того, здесь $s'_l \equiv \min\{s_l, \Sigma\}$, $s''_l \equiv \max\{s_l, \Sigma\}$, если $s_l \ge 0$, и $s'_l \equiv \max\{s_l, -\Sigma\}$, $s''_l \equiv \min\{s_l, -\Sigma\}$, если $s_l < 0$, при этом число $\Sigma > 0$ выбрано в соответствии с теоремой 2.

Введем в рассмотрение операторы в пространстве H_L: $\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm} \equiv \mp 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}_2 - \eta\hat{\boldsymbol{G}}_0$, $\hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm} \equiv \mp 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}$, $\hat{\boldsymbol{G}}_{2,n} \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_{2,n} - \eta\hat{\boldsymbol{G}}_{0,n}$ ($n = \overline{0, N-1}$). Определено $N_{\min} \in \mathbf{N}$ [6], такое, что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min}+1, \ldots\}$ операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm}$ ограниченно обратимы. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}$ также ограниченно обратимы и имеют место формулы

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{2,n}^{\pm(-1)} \boldsymbol{U}(\tau_n)\,;\ \hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm(-1)} \equiv \left(\hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm}\right)^{-1},$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{2,n}^{\pm(-1)} \equiv -\left(\sum_{m=1}^{n} \hat{\boldsymbol{G}}_{2,m-1}^{\pm(-1)} \widehat{\boldsymbol{G}}_{2,n+1-m}\right) \hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm(-1)} \ \ (n = \overline{1, N-1}). \qquad (7)$$

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $\boldsymbol{A}_n$ $[C \to D]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся при $n \to \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $\boldsymbol{B}_n$ $[C \to D]$, если $\|\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{f}\|_D \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно в шаре $\|\boldsymbol{f}\|_C \le 1$.

Доказаны следующие утверждения (см. теорему 6 и следствие 3 [6]):

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}\right)^{-1}$ $[H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) совокупно ограничены.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}\right)^{-1} \boldsymbol{P}_L$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L \left(\boldsymbol{G}_2^{\pm}\right)^{-1}$ $[C_{0,3}^3(\partial\Omega) \to H_L]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Сеточные аппроксимации решений краевых задач

Контур $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, поэтому существует постоянная $c_r \equiv \inf_{(s,s')\in\Theta} \psi_0 > 0$. Справедлива оценка: $\vartheta \le c_K |\sigma| \le c_K' c_r^{-1/2} r$, где ϑ – острый угол между нормалями, проходящими через точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ ($s, s' \in I_S'$); $c_K' \equiv \sup_{(s,s')\in\Theta} K(s,s')$, $K(s,s') \equiv \left|\partial_{s'}^2 \varphi_2\right|$; $c_K \equiv \sup_{s\in\overline{I_S'}} K(s,s)$, $K(s,s)$ – кривизна кривой в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$. Отложим на нормали к кривой $\partial\Omega$ в каждой точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ ($s \in I_S'$) отрезок одной и той же длины $d \in I_D \equiv [0, D]$ ($D \equiv c_r^{1/2}/(3c_K')$), направив этот отрезок внутрь области $\Omega^{\pm}$. Величина $3D$ может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (круг с таким радиусом с центром в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ обозначим через $\mathrm{O}(s)$), поэтому согласно [11, с. 313] концы таких отрезков $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega^{\pm}$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d^{\pm} \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т.е. каждая точка $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ может быть получена указанным образом из единственной точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$.

Введем в рассмотрение местную систему декартовых координат (ξ_s, η_s) с началом в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и осью ординат, направленной по нормали внутрь области Ω^-. Координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ равны соответственно $(0, \mp d)$ и $\left(-2^{-1}\partial_s\varphi_0, 2^{-1}\partial_{\boldsymbol{n}(\tilde{x}(s))}\varphi_0\right)$, поэтому $r^2 = \left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s') - \tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\right|^2 = \varphi_0 \pm 2d\,\varphi_2 + d^2$. Зададим на множестве Θ функцию $\varphi_4(s,s')$, а на множестве $\Upsilon \equiv I_D \times \Theta$ – функции $\varphi_0^{\pm}(d,s,s')$ и $\varphi_3^{\pm}(d,s,s')$:

$$\varphi_4 \equiv \partial_{s'}\varphi_2 = -\tilde{x}_2'(s)\,\tilde{x}_1'(s') + \tilde{x}_1'(s)\,\tilde{x}_2'(s'),$$

$$\varphi_0^{\pm} \equiv \varphi_0 \pm 2d\,\varphi_2,\ \varphi_3^{\pm} \equiv 2^{-1}\partial_{s'}\varphi_0^{\pm} = \varphi_3 \pm d\,\varphi_4.$$

Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и $\varphi_0^{\pm} = \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}d\cos\alpha^{\pm}$, где $\alpha^{\pm}$ – угол между лучами $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$, то $\varphi_0^{\pm} > 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon$, $s \neq s'$. Следовательно, на множестве Υ можно задать функцию $\rho^{\pm}(d,s,s')$: $\rho^{\pm} = \sqrt{\varphi_0^{\pm}}$, если $\sigma \geq 0$, и $\rho^{\pm} = -\sqrt{\varphi_0^{\pm}}$, если $\sigma < 0$. Введем также в рассмотрение функцию $\psi_4(s,s')$, заданную на множестве Θ при $s' \neq s$ равенством $\psi_4 \equiv \varphi_4/\sigma$, а при $s' = s$ равенством $\psi_4(s,s) \equiv -\tilde{x}_2'(s)\,\tilde{x}_1''(s) + \tilde{x}_1'(s)\,\tilde{x}_2''(s)$, а также функции $\psi_0^{\pm}(d,s,s')$, $\psi_3^{\pm}(d,s,s')$, $\delta^{\pm}(d,s,s')$: $\psi_0^{\pm} \equiv \psi_0 \pm 2d\,\psi_2$, $\psi_3^{\pm} \equiv \psi_3 \pm d\,\psi_4$, $\delta^{\pm} \equiv \left(\partial_{s'}\rho^{\pm}\right)^{-1} = \sqrt{\psi_0^{\pm}}\big/\psi_3^{\pm}$. Так как $\psi_0(s,s) = 1$, $|\psi_2(s,s)| \equiv 2^{-1}K(s,s)$ и $D \leq 1/(3c_K)$, то при $(d,s) \in I_D \times \overline{I_S'}$ имеем оценку: $\psi_0^{\pm}(d,s,s) \geq 2/3$. Поэтому $\psi_0^{\pm} > 0$ на множестве Υ.

При фиксированном $s \in I_S'$ обозначим через E_s связный участок кривой $\partial\Omega$ между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$, причем $\tilde{\boldsymbol{x}}(s) \in \mathrm{E}_s$. Соответствующие значения σ обозначим через Ξ_s. Левую и правую границу отрезка Ξ_s обозначим через Σ_s' и Σ_s'' соответственно.

Лемма [9]. Пусть I – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z,\zeta)$ имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$ ($i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,m'}$), причем $m < m'$ и $\partial_\zeta^j f\,|_{\zeta=z} = 0$ при $z \in I$, $j = \overline{0,q-1}$, где $q = m' - m$. Тогда функция $h(z,\zeta)$, заданная при $\zeta \neq z$ равенством $h(z,\zeta) \equiv f\big/(\zeta - z)^q$, а при $\zeta = z$ – равенством $h(z,z) \equiv \partial_\zeta^q f\,|_{\zeta=z}\big/q!$, имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ при $i = \overline{0,m-j}$, $j = \overline{0,m}$.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда на множестве $\Upsilon' \equiv \{(d,s,s')$: $\sigma \in \Xi_s$ $s \in \overline{I_S'}$, $d \in I_D\}$ функция $\delta^{\pm}$ положительна, ограничена сверху и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta^{\pm}$ ($j = \overline{0,n}$).

Доказательство. Условия леммы выполняются, если $f = \varphi_4$, $m = n$, $q = 1$, $z = s'$, $\zeta = s$, $I = \overline{I_{2S}'}$. Тогда, согласно лемме, существуют непрерывные на множестве $\overline{I_{2S}'} \times \overline{I_{2S}'}$ производные $\partial_{s'}^j \psi_4$ ($j = \overline{0,n}$). Аналогично (ср. с теоремами 1 [9] и 2 [6]) доказывается существование непрерывных на множестве $\overline{I_{2S}'} \times \overline{I_{2S}'}$ производных $\partial^j_{s'}\psi_i$ ($j=\overline{0,n}$, $i=0,2,3$). Следовательно, существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial^j_{s'}\psi^\pm_0$ и $\partial^j_{s'}\psi^\pm_3$ ($j=\overline{0,n}$). Так как $\psi^\pm_0>0$ на множестве Υ, то существует положительная постоянная $c^\pm_r \equiv \inf\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon} \psi^\pm_0$.

Пусть $\sigma\in\Xi_s$, $s\in I'_S$. Справедлива оценка: $\partial_{s'}\rho\ge 2^{-1}$. Действительно, допустим обратное: $\partial_{s'}\rho<2^{-1}$. Имеем равенство: $\rho(s,s'+\Delta s')-\rho(s,s')=$ $=\rho(s',s'+\Delta s')\sin\alpha+o(\Delta s)$, где α – угол $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}(s')\boldsymbol{x}_0$; $\boldsymbol{x}_0$ – точка пересечения нормалей к $\partial\Omega$, проведенных через точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$. Так как $\psi_0(s',s')=1$, то $\lim\limits_{\Delta s'\to 0}\rho(s',s'+\Delta s')/\Delta s'=1$, и поэтому $\sin\alpha=\partial_{s'}\rho<2^{-1}$, т.е. $\alpha=\pi/6-\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1>0$). Так как $\mathrm{E}_s\subset \mathrm{O}(s)$ [11, с. 285], то угол $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\boldsymbol{x}_0\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ – угол между нормалями $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))$ и $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))$ – равен $\pi/3-\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2\ge 0$ (см. оценку (7) [11, с. 283]). Следовательно, угол $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\boldsymbol{x}_0$ равен $\pi/2+\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Тогда существует точка $\tilde{\boldsymbol{x}}(s'')$ пересечения отрезка $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ с дугой E_s (иначе существует прямая, параллельная $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))$, пересекающая E_s более чем в одной точке), такая, что угол между нормалями $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))$ и $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s''))$ не меньше $\pi/3+\varepsilon_1$. Это невозможно, так как $|\tilde{\boldsymbol{x}}(s')\tilde{\boldsymbol{x}}(s'')|\le|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}(s')|\le 3D$, следовательно, точка $\tilde{\boldsymbol{x}}(s')$ находится внутри круга $\mathrm{O}(s'')$. Получили противоречие, вследствие которого справедлива оценка $\partial_{s'}\rho\ge 2^{-1}$ при любых $\sigma\in\Xi_s$, $s\in I'_S$.

В силу равенства $\varphi_3=\rho\partial_{s'}\rho$ и неравенства $\rho/\sigma\ge c_r^{1/2}$ получаем на основании доказанного оценку: $\psi_3\ge 2^{-1}c_r^{1/2}$ ($\sigma\in\Xi_s$, $s\in I'_S$). Кроме того, $|\psi_4|\le c'_K$ при $(s,s')\in\Theta$, и $d\le c_r^{1/2}/(3c'_K)$, поэтому на множестве Υ' выполняется неравенство $\psi^\pm_3\ge 6^{-1}c_r^{1/2}$. Следовательно, функция $\delta^\pm$ положительна и $\delta^\pm\le 6c_r^{-1/2}\sup\limits_{(s,s')\in\Theta}\sqrt{\psi^\pm_0}$ на множестве Υ'. Учитывая также, что $\psi^\pm_0\ge c^\pm_r>0$, получаем остальные утверждения теоремы на основе представлений: $\partial^j_{s'}\delta^\pm=F_j\big/\left[(\psi^\pm_3)^{j+1}(\psi^\pm_0)^{j-1/2}\right]$, где функции F_j суть многочлены, образованные степенями производных $\partial^k_{s'}\psi^\pm_0$, и $\partial^l_{s'}\psi^\pm_3$ ($k,l=\overline{0,j}$). Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho^\pm_{d,s}(\sigma)\equiv\rho^\pm(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s\in I'_S$, $d\in I_D$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество Ξ_s на множество $\rho^\pm_{d,s}(\Xi_s)$. Функция $\tilde{\delta}^\pm(d,s,\rho)\equiv\delta^\pm\left(d,s,s+\sigma^\pm_{d,s}(\rho)\right)$ ($\sigma^\pm_{d,s}(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho^\pm_{d,s}(\sigma)$) имеет непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}'\equiv\{(d,s,\rho):\ \rho\in\rho^\pm_{d,s}(\Xi_s),\ s\in\overline{I'_S},\ d\in I_D\}$ производные $\partial^j_\rho\tilde{\delta}^\pm$ ($j=\overline{0,n}$).

Операторы $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}$) представим в следующем виде: $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}=\int_{I_T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)$). Здесь $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\tau>0$) – ограниченные операторы: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int_{\partial\Omega}a(r,\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'$.

Замкнутую область, образованную всеми кривыми $\partial\Omega_d^{\pm}$ ($d\in I_D$), обозначим через $\Omega_D^{\pm}$. Пусть $s\in I_S'$, $d\in I_D$ и $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$. Используя местные координаты (ξ_s,η_s), равенство $d\xi_s=\cos\vartheta\,ds'$ (ϑ – угол между векторами $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$), оценку (7) [11, с. 283]: $\cos\vartheta\ge 2^{-1}$ ($\boldsymbol{x}'\in \mathrm{E}_s$), и оценку $r\ge|\xi_s|$, получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{\mathrm{E}_s}\exp\left[-r^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]ds'\le 2\int\limits_{-D}^{D}\exp\left[-\xi_s{}^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]d\xi_s\le 4a\sqrt{\pi}\,\tau^{1/2}$$

$$(\boldsymbol{x}\in\Omega_D^{\pm},\ \tau>0). \tag{8}$$

Представим операторы $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}$, $\tau>0$) в виде суммы:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)=\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\tau)+\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\tau),$$

где

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\mathrm{E}_s}a(r,\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\in\Omega_D^{\pm}),$$

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv 0\ \ (\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_D^{\pm}),$$

$$\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\partial\Omega\setminus\mathrm{E}_s}a(r,\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\in\Omega_D^{\pm}),$$

$$\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_{\partial\Omega}a(r,\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'\ \ (\boldsymbol{x}\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_D^{\pm}).$$

Так как нормаль $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ к кривой $\partial\Omega$ при любом $s\in I_S'$ является и нормалью к кривой $\partial\Omega_d^{\pm}$ ($d\in I_D$) [11, с. 312], то $r\ge D$, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_D^{\pm}\times\partial\Omega$. Действительно, допустим, что при некоторых $s_1,s_2\in I_S'$ существуют точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_2)$, такие, что $\left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_2)\right|<D$. Тогда существует $s_3\in I_S'$, такое, что либо $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\ne\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_3)$, прямая $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_3)$ является нормалью к кривой $\partial\Omega_D^{\pm}$ и $\left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_3)\right|<D$, либо $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)=\tilde{\boldsymbol{x}}_D^{\pm}(s_3)$. В обоих случаях прямая $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}(s_3)$ является нормалью к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_3)$, причем длина отрезка $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}(s_3)$ меньше $2D$, т.е. точка $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)$ лежит внутри круга $\mathrm{O}(s_3)$. Следовательно, существует прямая, параллельная нормали $\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s_3))$ и пересекающая дугу $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_1)\tilde{\boldsymbol{x}}(s_3)$ кривой $\partial\Omega$ внутри круга $\mathrm{O}(s_3)$ более чем в одной точке. Это невозможно, поэтому $r\ge D$, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in\Omega^{\pm}\setminus\Omega_D^{\pm}\times\partial\Omega$.

Так как любая прямая, параллельная прямой $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ ($s\in I_S'$, $d\in I_D$), пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга $\mathrm{O}(s)$ не более чем в одной точке, то $r\ge D$, если

$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s) \in \Omega_D^{\pm}$, $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega \setminus \mathrm{E}_s$. С учетом оценки (8) получаем следующие оценки норм операторов $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\tau)$, $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\tau)$ $[\,C(\partial\Omega) \to L_2\,]$ при $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$, $\tau > 0$:

$$\|\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\tau)\| \le c_A' \tau^{-1/2}, \; c_A' \equiv \pi^{-1/2} a\,;$$
$$\|\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\tau)\| \le c_A'' \equiv (2\pi)^{-1} S \sup_{\tau\in(0,\infty)} \tau^{-1} \exp\left[-D^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]. \tag{9}$$

В силу оценок (9) имеем равномерную на множестве $\Omega^{\pm}$ ограниченность операторов $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C(\partial\Omega) \to L_2\,]$:

$$\|\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\| \le 2\sqrt{T}\, c_A' + T\, c_A'' \quad (\,\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}\,). \tag{10}$$

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$. Зададим ограниченные операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$):

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau \;\; (\,\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)\,), \;\; \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\tau)\,e(\tau),$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{U}\left(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau\right)\Lambda_m(\tau) \;\; (\,\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}]\,,\; n = \overline{0, N/2-1}\,).$$

Так как $\|\boldsymbol{U}(\tau)\| \le 1$, $\left|e^{-p\tau}\right| \le 1$ ($\tau \ge 0$), то $\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\| \le c_\Lambda$, $|e(\tau)| \le \tilde{c}_\Lambda$ (см. оценки (5)). В силу оценок (4) имеем оценки

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\|\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^3 \quad (\,\boldsymbol{f} \in C_3(\partial\Omega)\,),$$
$$\left|e(\tau) - e^{-p\tau}\right| \le \left(p^3\big/\tilde{N}^3\right)\tilde{c}_\omega h_\tau^3 \;\; (\,t \in I_T\,). \tag{11}$$

На основании оценок (9) и (11) при любых $\boldsymbol{f} \in C_3(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ получаем оценки

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} - \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le \left(2c_A'\sqrt{T} + c_A''T\right)\left[c_\omega\left\|\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda\tilde{c}_\omega\left(p^3\big/\tilde{N}^3\right)\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega)}\right]h_\tau^3,$$

из которых вытекает следующее утверждение:

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C_3(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C_3(\partial\Omega) \to L_2\,]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3\right)$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[\,H_L \to C(\partial\Omega)\,]$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}_{2l-1+m}\,\Lambda_m(s) \;\; (\,\boldsymbol{f} \in H_L\,,\; s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]\,,\; l = \overline{-L/2, L/2}\,).$$

На основании оценки (5) имеем оценку $\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\right\| \le c_\Lambda$. В силу оценки (4) справедливы оценки

$$\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \;\; (\,\boldsymbol{f} \in C^3(\partial\Omega)\,). \tag{12}$$

С помощью равенств $\breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\breve{\boldsymbol{P}}_L\,\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in H_L$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$) зададим ограниченные операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,H_L \to L_2\,]$. В силу оценок (9), (12), $\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\| \le c_\Lambda$ и

$|e(\tau)| \le \tilde c_\Lambda$ имеем оценки

$$\left\|\breve{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x)\boldsymbol P_L \boldsymbol f - \tilde{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x)\boldsymbol f\right\|_{L_2} \le \left(2\,c'_A\sqrt{T} + c''_A\,T\right)c_\Lambda\,\tilde c_\Lambda\,c_\omega \left\|\boldsymbol f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3$$
$$(\,\boldsymbol f \in C^3(\partial\Omega)\,,\ \boldsymbol x \in \Omega^\pm\,),$$

позволяющие сделать следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x)\boldsymbol P_L$ $[\,C^3(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($L/2 \in \mathbf N$, $N/2 \in \mathbf N$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x)$ $[\,C^3(\partial\Omega) \to L_2\,]$ равномерно по N и $\boldsymbol x \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Операторы $\breve{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x)$ могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\breve{\boldsymbol G}_0(\boldsymbol x) = \sum_{n=0}^{N-1} \breve{\boldsymbol G}_{0,n}(\boldsymbol x)\boldsymbol U(\tau_n)\ , \tag{13}$$

$$\breve{\boldsymbol G}_{0,0}(\boldsymbol x) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau)\,e(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau\ ,$$

$$\breve{\boldsymbol G}_{0,2n+1}(\boldsymbol x) \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau)\,e(\tau)\Lambda_1(\tau)\,d\tau\ \ (\,n = \overline{0, N/2-1}\,),$$

$$\breve{\boldsymbol G}_{0,2n}(\boldsymbol x) \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau)\,e(\tau)\Lambda_2(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau)\,e(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau\ \ (\,n = \overline{1, N/2-1}\,).$$

Операторы $\breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau) \equiv \boldsymbol A(\boldsymbol x,\tau)\breve{\boldsymbol P}_L$ $[\,H_L \to L_2\,]$ подобно $\breve{\boldsymbol G}_{0,n}(\boldsymbol x)$ имеют вид скалярных матриц-строк длиной $2L+2$:

$$\breve{\boldsymbol A}(\boldsymbol x,\tau)\boldsymbol f = \sum_{l=-L-1}^{L} \hat g_l(\boldsymbol x,\tau)\boldsymbol f_l\ \ (\,\boldsymbol f \in H_L\,);\ \ \hat g_{2l}(\boldsymbol x,\tau) \equiv \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \breve g_1(\boldsymbol x,s',\tau)\,ds'\ ,$$

$$\hat g_{2l-1}(\boldsymbol x,\tau) \equiv \int_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} \breve g_2(\boldsymbol x,s',\tau)\,ds' + \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \breve g_0(\boldsymbol x,s',\tau)\,ds'\ \ (\,l = \overline{-L/2, L/2}\,),$$

$$\breve g_m(\boldsymbol x,s',\tau) \equiv g_0(\boldsymbol x,\tilde{\boldsymbol x}(s'),\tau)\breve\Lambda_m(s')\ \ (\,m = \overline{0,2}\,).$$

Все интегралы $J_{m,l}(\boldsymbol x,\tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \breve g_m(\boldsymbol x,s',\tau)\,ds'$ ($l = \overline{-L-1, L}$, $m = \overline{0,2}$) представим в виде суммы $J_{m,l} = J'_{m,l} + J''_{m,l}$. Здесь в случае $\boldsymbol x = \tilde{\boldsymbol x}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm$ ($s \in \overline{I'_S}$) $J'_{m,l}(d,s,\tau) \equiv \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} \breve g_m(\tilde{\boldsymbol x}_d^\pm(s), s+\sigma,\tau)\,d\sigma$, $J''_{m,l}(\boldsymbol x,\tau) \equiv \int_{\beta_{s,l}}^{\beta_{s,l+1}} \breve g_m(\boldsymbol x,s',\tau)\,ds'$. При этом $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_l - s, \Sigma''_s\}$, $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s+\Sigma''_s\}$, если $s_l \ge s$; $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_l - s, \Sigma'_s\}$, $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s+\Sigma'_s\}$, если $s_l < s$. В случае $\boldsymbol x \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm$ $J'_{m,l} \equiv 0$, $J''_{m,l} \equiv J_{m,l}$ ($\beta_{s,l} = s_l$).

В интегралах $J'_{m,l}$ ($d \in I_D$, $s \in \overline{I'_S}$, $\tau > 0$) на основании следствия 2 сделаем замену переменной $\sigma = \sigma^{\pm}_{d,s}(\rho)$:

$$J'_{m,l}(d,s,\tau) = \int\limits_{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a(\sqrt{\rho^2+d^2},\tau)\breve{\delta}^{\pm}_m(d,s,\rho)\,d\rho \ \ (m = \overline{0,2},\ l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\breve{\delta}^{\pm}_m \equiv \tilde{\delta}^{\pm}(d,s,\rho)\,\breve{\Lambda}_m\left(s+\sigma^{\pm}_{d,s}(\rho)\right).$$

Введем в рассмотрение интегралы $\tilde{J}'_{m,l}$, аппроксимирующие $J'_{m,l}$:

$$\tilde{J}'_{m,l}(d,s,\tau) \equiv \int\limits_{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a(\sqrt{\rho^2+d^2},\tau)\hat{\delta}^{\pm}_m(d,s,\rho)\,d\rho \ \ (m = \overline{0,2},\ l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\hat{\delta}^{\pm}_m \equiv \sum_{m'=0}^{2} \breve{\delta}^{\pm}_m(d,s,\overline{\rho}^{\pm}_{d,s,l} + \tilde{q}_{m'}h^{\pm}_{d,s,l})\tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \ \ (\rho \in \left[\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l}), \rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l+1})\right]),$$

$$h^{\pm}_{d,s,l} \equiv 2^{-1}\left[\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l+1}) - \rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l})\right],\ \overline{\rho}^{\pm}_{d,s,l} \equiv 2^{-1}\left[\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l}) + \rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,l+1})\right].$$

Интегралы $J''_{m,l}$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$, $\tau > 0$) аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{J}''_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv h''_{s,l}\sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j\,\breve{g}_m(\boldsymbol{x},\overline{\beta}_{s,l} + h''_{s,l}z_j,\tau) \ \ (m = \overline{0,2},\ l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\overline{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}\right),\ h''_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}\right).$$

В силу следствия 2 и неравенства $r \ge D$, имеющего место, если $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \in \Omega^{\pm} \setminus \Omega^{\pm}_D \times \partial\Omega$ или $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{\pm}_d(s) \in \Omega^{\pm}_D$, $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega \setminus \mathrm{E}(s)$, при указанной гладкости кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы:

$$\breve{c}'_j \equiv \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left|\partial^j_\rho \tilde{\delta}^{\pm}\right| \ (\partial\Omega \in C^{n+2}),\ \breve{c}''_j \equiv \sup_{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}(s')|\ge D,\tau>0} \left|\partial^j_{s'} g_0(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}(s'),\tau)\right| \ (\partial\Omega \in C^n \cap C^2)$$

$$(j = \overline{0,n},\ n \in \mathbf{Z}_+).$$

Учитывая неравенства (4), (6) и $h^{\pm}_{d,s,l} \le 2^{-1}c_h h_s$ ($c_h \equiv \sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon'} \left|\partial_{s'}\rho^{\pm}\right|$), при условиях $\partial\Omega \in C^5$, $\boldsymbol{f} \in C^2(\partial\Omega)$ при любых $d \in I_D$, $s \in \overline{I'_S}$, $\tau > 0$ имеем оценку:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=-1}^{0} \left(\tilde{J}'_{m,2l+l'} - J'_{m,2l+l'}\right)\boldsymbol{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \le$$

$$\le 8^{-1}h^3_s c^3_h \tilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left\|\partial^3_\rho\left[\tilde{\delta}^{\pm}\tilde{\boldsymbol{f}}\left(s+\sigma^{\pm}_{d,s}(\rho)\right)\right]\right\|_{L_2} \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \int\limits_{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,2l-1})}^{\rho^{\pm}_{d,s}(\alpha_{s,2l+1})} a(\sqrt{\rho^2+d^2},\tau)\,d\rho \le$$

$$\le \hat{c}'\tau^{-1/2}h^3_s\|\boldsymbol{f}\|_{C^2(\partial\Omega)},\quad \hat{c}' \equiv 16^{-1}a\pi^{-1/2}c^3_h\tilde{c}_\omega\left[\breve{c}'_3 c_\Lambda + \left(4\breve{c}'_2\breve{c}'_0 + 3\breve{c}'^2_1\right)c'_\Lambda + 6\breve{c}'_1\breve{c}'^2_0 c''_\Lambda\right], \quad (14a)$$

где $\boldsymbol{f}_l = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$, $\tilde{\boldsymbol{f}} \equiv \breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f}$. Если $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$, то при любых $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$, $\tau > 0$ имеем оценку:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=-1}^{0} \left(\tilde{J}''_{m,2l+l'} - J''_{m,2l+l'} \right) \boldsymbol{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \le \hat{c}'' h_s^{2\gamma} \| \boldsymbol{f} \|_{C^2(\partial\Omega)},$$

$$\hat{c}'' \equiv \frac{2S(\gamma!)^4 \left[\breve{c}''_{2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \breve{c}''_{2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1) \breve{c}''_{2\gamma-2} c''_\Lambda \right]}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)} \tag{14b}$$

[10, с. 259]. Операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})$, $\breve{\boldsymbol{G}}_{0,n}(\boldsymbol{x})$ ($n = \overline{0, N-1}$), в которых интегралы $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ заменены выражениями $\tilde{J}'_{m,l}(d,s,\tau)$ и $\tilde{J}''_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$, обозначим через $\hat{\boldsymbol{G}}'_0(\boldsymbol{x})$, $\hat{\boldsymbol{G}}'_{0,n}(\boldsymbol{x})$ и $\hat{\boldsymbol{G}}''_0(\boldsymbol{x})$, $\hat{\boldsymbol{G}}''_{0,n}(\boldsymbol{x})$ соответственно. В силу оценок (5), (14), $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$ имеем при условии $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ оценки:

$$\left\| \hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} \right\|_{L_2} \le c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left(2 \hat{c}'_i \sqrt{T} h_s^3 + \hat{c}''_i T h_s^{2\gamma} \right) \| \boldsymbol{f} \|_{C^2(\partial\Omega)} \quad (\boldsymbol{f} \in C^2(\partial\Omega))$$

$$(\hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{G}}'_0(\boldsymbol{x}) + \hat{\boldsymbol{G}}''_0(\boldsymbol{x})),$$

из которых вытекает следующее утверждение:

Теорема 8. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L$ [$C^2(\partial\Omega) \to L_2$] ($L/2 \in \boldsymbol{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\breve{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L$ [$C^2(\partial\Omega) \to L_2$] равномерно по N и $\boldsymbol{x} \in \Omega^\pm$ с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

С учетом оценок (5) получаем следующие неравенства:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=-1}^{0} \tilde{J}'_{m,2l+l'}(d,s,\tau) \boldsymbol{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \tilde{c}_\Lambda \breve{c}'_0 \| \boldsymbol{f} \|_{H_L} \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \int\limits_{\rho^\pm_{d,s}(\alpha_{s,2l-1})}^{\rho^\pm_{d,s}(\alpha_{s,2l+1})} a(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau) \, d\rho \le 2^{-1} a \pi^{-1/2} \tilde{c}_\Lambda \breve{c}'_0 \tau^{-1/2} \| \boldsymbol{f} \|_{H_L},$$

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=-1}^{0} \tilde{J}''_{m,2l+l'}(\boldsymbol{x},\tau) \boldsymbol{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \le 2S \breve{c}''_0 \| \boldsymbol{f} \|_{H_L}$$

$$(d \in I_D, s \in \overline{I'_S}, \boldsymbol{x} \in \Omega^\pm, \ \boldsymbol{f} \in H_L, \ \tau > 0),$$

следствием которых являются неравенства

$$\left\| \hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f} \right\|_{L_2} \le c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left(\sqrt{T} a \pi^{-1/2} \tilde{c}_\Lambda \breve{c}'_0 + 2TS \breve{c}''_0 \right) \| \boldsymbol{f} \|_{H_L} \quad (\boldsymbol{f} \in H_L).$$

Последние неравенства позволяют сделать утверждение:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})$ [$H_L \to L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) ограничены в совокупности на множестве $\Omega^\pm$.

При вычислении операторов $\hat{\boldsymbol{G}}'_0(\boldsymbol{x})$ интегрирование по τ осуществляется точно, и интегралы выражаются через интегральные показательные функции

$\mathrm{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv \left(\rho^2 + d^2\right) \Big/ \left(4a^2\tilde{\tau}_n\right)$, $n = \overline{1, N\tilde{N}}$). Затем вычисляются интегралы по ρ, но не все они вычисляются точно. В таких случаях для аналитического интегрирования функции $\mathrm{Ei}(-z_n)$ заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в знакопеременные и быстро сходящиеся ряды Тейлора, а именно: K членами со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{1, K}$) и, кроме того, логарифмическим и постоянным членами. Значения $\sigma^{\pm}_{d,s}\left(\overline{\rho}^{\pm}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h^{\pm}_{d,s,l}\right)$ ($l = \overline{-L-1, L}$, $m = \overline{0,2}$) могут быть получены как численные решения уравнений $\rho^{\pm}_{d,s}(\sigma) = \overline{\rho}^{\pm}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h^{\pm}_{d,s,l}$. Производные $x_i'(s)$ ($i = 1,2$) вычисляются аналитически, так как аналитические выражения функций $x_i(s)$ считаются известными.

На основании теорем 6–8 делаем следующий вывод:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ [$C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ [$C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to L_2$] равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Введем в рассмотрение операторы $\boldsymbol{R}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{G}_2^{\pm}\right)^{-1}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_0(\boldsymbol{x})\left(\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm}\right)^{-1}$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$). С учетом оценок (10), теорем 1, 4 и следствий 3, 4 получаем следующее утверждение:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ [$C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{R}_2^{\pm}(\boldsymbol{x})$ [$C^3_{0,3}(\partial\Omega) \to L_2$] равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(I_T)$ классов функций $\boldsymbol{f} \in L_2$, эквивалентных непрерывным на отрезке I_T функциям $f(t)$, с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_T} \equiv \sup\limits_{t \in I_T} |f(t)|$. Имеют место вложение $H^1 \subset C(I_T)$ и оценки:

$$|f(t)| = \left|\int_0^t (\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(t')dt'\right| \leq \left[t\int_0^t |(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(t')|^2\, dt'\right]^{1/2} \leq \sqrt{T}\,\|\boldsymbol{f}\|_{H^1} \ (t \in I_T,\ \boldsymbol{f} \in H^1). \quad (15)$$

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение банаховы пространства C_N сеточных функций $\boldsymbol{f}$ со скалярными комплексными значениями f_n, заданными в узлах τ_n ($n = \overline{0, N}$), с нормой: $\|\boldsymbol{f}\|_{C_N} = \max\limits_{0 \leq n \leq N} |f_n|$. Зададим операторы $\boldsymbol{P}_N$ [$H^1 \to C_N$]: $(\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{f})_n = f(\tau_n)$ ($\|\boldsymbol{P}_N\| \leq \sqrt{T}$ в силу оценок (15)), и $\hat{\boldsymbol{P}}_N$ [$C_N \to C(I_T)$]:

$$\left(\hat{\boldsymbol{P}}_N\boldsymbol{f}\right)(t) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{2n+m}\,\Lambda_m(t) \ (\boldsymbol{f} \in C_N,\ t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}],\ n = \overline{0, N/2-1}).$$

В силу неравенств (4), (5) и (15) справедливы оценки:

$$\left\|\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N\right\| \le c_\Lambda \sqrt{T}\ ,\ \left\|\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C(I_T)} \le c_\omega \sqrt{T}\, \|\boldsymbol{f}\|_{H^4}\, h_\tau^3\ \ (\boldsymbol{f} \in H^4). \qquad (16)$$

Учитывая оценки (10) и (16), теорему 1, следствие 5, равенства (3) и замкнутость оператора $\boldsymbol{B}$, приходим к окончательному выводу:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N \hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L$ $[\, C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to C(I_T)\,]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{R}_2^{\pm}(\boldsymbol{x})$ $[\, C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to C(I_T)\,]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Следствие 6 позволяет получить приближенные решения задач (1). На основании теоремы 3, следствия 3, равенств (3), первой оценки (16) и оценки $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$ можно также сделать вывод об ограниченности операторов $\hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N \hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L$ $[\, C_1(\partial\Omega) \to C(I_T)\,]$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}$) в совокупности. Сформулируем заключительное утверждение:

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда, если $\boldsymbol{w}_2^{\pm} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$: $\tilde{\boldsymbol{u}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N \hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_2^{\pm}$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$), сходятся при $L, N \to \infty$ к соответствующим решениям краевых задач (1) $u_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ (при почти всех t) с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$. Кроме того, $\left|\tilde{u}_2^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x},t) - u_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)\right| \to 0$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ (при почти всех t) при $L, N \to \infty$, $\delta \to 0$ ($\tilde{\boldsymbol{u}}_2^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{w}_2^{\pm[\delta]}$, $\boldsymbol{w}_2^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\left\|\boldsymbol{w}_2^{\pm[\delta]} - \boldsymbol{w}_2^{\pm}\right\|_{C_1(\partial\Omega)} \le \delta$).

Для вычисления решения $\tilde{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ в произвольной точке $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega^{\pm} \times I_T$ используем равенства:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\boldsymbol{R}}_{2,n}^{\pm}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{U}(\tau_n)\ ,\ \hat{\boldsymbol{R}}_{2,n}^{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{m=0}^{n} \hat{\boldsymbol{G}}_{0,m}(\boldsymbol{x}) \hat{\boldsymbol{G}}_{2,n-m}^{\pm(-1)}\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{0,n}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{G}}'_{0,n}(\boldsymbol{x}) + \hat{\boldsymbol{G}}''_{0,n}(\boldsymbol{x}) \quad (n = \overline{0, N-1})$$

(см. формулы (7) и (13)), при этом операторы $\hat{\boldsymbol{R}}_{2,n}^{\pm}(\boldsymbol{x})$, как и $\hat{\boldsymbol{G}}_{0,n}(\boldsymbol{x})$, имеют вид скалярных матриц-строк длиной $2L+2$. Операторы $\boldsymbol{P}_N$ и $\boldsymbol{U}(\tau_n)$ коммутируют на множестве $C(I_T)$, поэтому функции $\tilde{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ сначала могут быть вычислены в трех узлах τ_{2n+j} ($j = 0,1,2$): $\tilde{u}_2^{\pm}(\boldsymbol{x}, \tau_{2n+j}) = \sum_{m=0}^{2n+j} \hat{\boldsymbol{R}}_{2,m}^{\pm}(\boldsymbol{x})\, \breve{\boldsymbol{w}}_2^{\pm}(\cdot, \tau_{2n+j-m})$ ($\breve{\boldsymbol{w}}_2^{\pm} \equiv \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_2^{\pm}$), а затем в любой точке $t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}]$ ($0 \le n \le N/2 - 1$) с помощью квадратичной интерполяции.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних задач (1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R=1$. В выбранной таким образом геометрии имеем следующие значения: $D=2/(3\pi)$, $\Sigma''_s=-\Sigma'_s=\arcsin(2/(3\pi))$ ($s\in I'_S$). Решения $\tilde{\boldsymbol{u}}_2^+$ получаем согласно следствию 7. Кроме того, находим решения $\breve{\boldsymbol{u}}_2^+$, отличающиеся от решений $\tilde{\boldsymbol{u}}_2^+$ только тем, что все интегралы $J_{i,m,k,l}(\tau)\equiv\int_{s_l}^{s_{l+1}}\breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau)\,d\sigma$ и $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ ($i=0,2$, $m=\overline{0,2}$, $k,l=\overline{-L-1,L}$, $\tau>0$, $\boldsymbol{x}\in\Omega^+$) вычисляются с помощью ПКФГ с γ узлами. Вычисления проводим при $T=1$, $a=1$, $\tilde{N}=2$, $M=2$ ($\Sigma=2\pi/3$), $K=10$, $\eta=0$, $p=0$, $w_2^+(\varphi,t)=16t^2(1-t)^2\sin\varphi$ (φ — полярный угол). «Точные» решения $\overline{\boldsymbol{u}}_i^+$ находим с помощью функций Грина, при этом интегрирование по временно́й переменной на промежутке $[0;9\cdot10^{-7}]$ осуществляем численно с помощью ПКФГ с 12 узлами, а все остальные интегралы вычисляем аналитически. Все решения получаем на окружностях $\partial\Omega'$ с радиусами $R'<1$, концентрических с окружностью $\partial\Omega$, в узлах $(\boldsymbol{x}'_l,t_j)$ и $(\boldsymbol{x}''_l,t_j)$ ($l=\overline{-L-1,L}$, $t_j\equiv jh_\tau$, $j=\overline{0,N}$), где $\boldsymbol{x}'_l$ и $\boldsymbol{x}''_l$ – точки, получающиеся из граничных точек $\boldsymbol{x}_l\equiv\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ и $\boldsymbol{x}_{l+1/2}\equiv\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l+h_s/2)$ соответственно, в результате сжимающего отображения окружности $\partial\Omega$ на окружность $\partial\Omega'$. Вычисления проводим с обычной точностью.

Пусть $\delta\tilde{u}\equiv\left\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2^+-\overline{\boldsymbol{u}}_2^+\right\|/\left\|\overline{\boldsymbol{u}}_2^+\right\|$, $\delta\breve{u}\equiv\left\|\breve{\boldsymbol{u}}_2^+-\overline{\boldsymbol{u}}_2^+\right\|/\left\|\overline{\boldsymbol{u}}_2^+\right\|$ ($\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма). Через $\delta u'$ и $\delta u''$ обозначим значения $\delta\tilde{u}$ или $\delta\breve{u}$, вычисленные в узлах $(\boldsymbol{x}'_l,t_j)$ и $(\boldsymbol{x}''_l,t_j)$ соответственно. В таблице в каждой основной ячейке представлены три значения $\delta u'$ или $\delta u''$: значение $\delta\tilde{u}$, значение $\delta\breve{u}$ при $\gamma=4$ и значение $\delta\breve{u}$ при $\gamma=12$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Практически той же точностью, что и решения $\breve{\boldsymbol{u}}_2^+$, обладают решения $\hat{\boldsymbol{u}}_2^+$, отличающиеся от решений $\tilde{\boldsymbol{u}}_2^+$ только тем, что все интегралы $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ вычисляются с помощью ПКФГ с γ узлами. Проведенные эксперименты позволяют утверждать, что применение исключительно ПКФГ для вычисления интегралов $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ влечет нарушение равномерной сходимости численных решений в области Ω^+: при приближении к границе $\partial\Omega$ точность решений $\breve{\boldsymbol{u}}_2^+$ и $\hat{\boldsymbol{u}}_2^+$ существенно уменьшается (в меньшей степени – при приближении к точкам, лежащим на границе между двумя граничными элементами). В то же время применение точного интегрирования по компоненте ρ^+ межточечного расстояния r для вычисления интегралов $J'_{m,l}(d,s,\tau)$ обеспечивает почти равномерную сходимость в области Ω^+: при приближении к любой точке границы $\partial\Omega$ точность решений $\tilde{\boldsymbol{u}}_2^+$ уменьшается менее чем в 10 раз. Близкие результаты были получены при значениях $\eta=1$ и $p=\pi^2$.

Относительные среднеквадратичные отклонения δu

R'		$1-2/(3\pi)$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$h_\tau = 1/16,\ h_s = \pi/7$	$\delta u'$	$9.19\cdot10^{-4}$	$9.68\cdot10^{-4}$	$9.77\cdot10^{-4}$	$9.72\cdot10^{-4}$	$9.79\cdot10^{-4}$	$9.39\cdot10^{-4}$	$9.31\cdot10^{-4}$
		$9.26\cdot10^{-4}$	$1.05\cdot10^{-3}$	$3.67\cdot10^{-3}$	$1.36\cdot10^{-2}$	$1.50\cdot10^{-2}$	$1.51\cdot10^{-2}$	$1.51\cdot10^{-2}$
		$9.26\cdot10^{-4}$	$9.69\cdot10^{-4}$	$9.65\cdot10^{-4}$	$1.50\cdot10^{-3}$	$2.56\cdot10^{-3}$	$2.65\cdot10^{-3}$	$2.65\cdot10^{-3}$
	$\delta u''$	$9.74\cdot10^{-4}$	$1.20\cdot10^{-3}$	$1.60\cdot10^{-3}$	$1.65\cdot10^{-3}$	$1.66\cdot10^{-3}$	$1.63\cdot10^{-3}$	$1.63\cdot10^{-3}$
		$1.01\cdot10^{-3}$	$2.69\cdot10^{-3}$	$4.27\cdot10^{-2}$	$5.51\cdot10^{-2}$	$5.65\cdot10^{-2}$	$5.66\cdot10^{-2}$	$5.66\cdot10^{-2}$
		$1.01\cdot10^{-3}$	$1.21\cdot10^{-3}$	$9.17\cdot10^{-3}$	$1.93\cdot10^{-2}$	$2.06\cdot10^{-2}$	$2.07\cdot10^{-2}$	$2.07\cdot10^{-2}$
$h_\tau = 1/32,\ h_s = \pi/15$	$\delta u'$	$5.76\cdot10^{-5}$	$6.72\cdot10^{-5}$	$7.64\cdot10^{-5}$	$7.70\cdot10^{-5}$	$8.33\cdot10^{-5}$	$6.54\cdot10^{-5}$	$6.60\cdot10^{-5}$
		$5.73\cdot10^{-5}$	$7.07\cdot10^{-5}$	$8.97\cdot10^{-4}$	$5.25\cdot10^{-3}$	$6.59\cdot10^{-3}$	$6.68\cdot10^{-3}$	$6.69\cdot10^{-3}$
		$6.10\cdot10^{-5}$	$6.98\cdot10^{-5}$	$8.06\cdot10^{-5}$	$6.55\cdot10^{-5}$	$7.68\cdot10^{-4}$	$8.54\cdot10^{-4}$	$8.58\cdot10^{-4}$
	$\delta u''$	$5.76\cdot10^{-5}$	$6.88\cdot10^{-5}$	$9.42\cdot10^{-5}$	$9.91\cdot10^{-5}$	$1.05\cdot10^{-4}$	$9.02\cdot10^{-5}$	$9.04\cdot10^{-5}$
		$5.75\cdot10^{-5}$	$8.27\cdot10^{-5}$	$1.35\cdot10^{-2}$	$2.45\cdot10^{-2}$	$2.59\cdot10^{-2}$	$2.60\cdot10^{-2}$	$2.60\cdot10^{-2}$
		$6.10\cdot10^{-5}$	$7.13\cdot10^{-5}$	$1.24\cdot10^{-3}$	$7.84\cdot10^{-3}$	$9.18\cdot10^{-3}$	$9.28\cdot10^{-3}$	$9.28\cdot10^{-3}$
$h_\tau = 1/64,\ h_s = \pi/31$	$\delta u'$	$6.76\cdot10^{-6}$	$8.36\cdot10^{-6}$	$1.02\cdot10^{-5}$	$1.08\cdot10^{-5}$	$1.79\cdot10^{-5}$	$3.62\cdot10^{-5}$	$4.66\cdot10^{-5}$
		$5.87\cdot10^{-6}$	$7.02\cdot10^{-6}$	$4.28\cdot10^{-4}$	$1.85\cdot10^{-3}$	$3.10\cdot10^{-3}$	$3.19\cdot10^{-3}$	$3.19\cdot10^{-3}$
		$7.26\cdot10^{-6}$	$7.02\cdot10^{-6}$	$1.10\cdot10^{-5}$	$7.98\cdot10^{-5}$	$2.82\cdot10^{-4}$	$3.60\cdot10^{-4}$	$3.64\cdot10^{-4}$
	$\delta u''$	$6.75\cdot10^{-6}$	$8.37\cdot10^{-6}$	$1.05\cdot10^{-5}$	$1.13\cdot10^{-5}$	$1.82\cdot10^{-5}$	$3.63\cdot10^{-5}$	$4.66\cdot10^{-5}$
		$5.87\cdot10^{-6}$	$7.02\cdot10^{-6}$	$2.97\cdot10^{-3}$	$1.11\cdot10^{-2}$	$1.24\cdot10^{-2}$	$1.25\cdot10^{-2}$	$1.25\cdot10^{-2}$
		$7.27\cdot10^{-6}$	$7.02\cdot10^{-6}$	$4.63\cdot10^{-5}$	$3.09\cdot10^{-3}$	$4.34\cdot10^{-3}$	$4.44\cdot10^{-3}$	$4.44\cdot10^{-3}$

Также были проведены вычислительные эксперименты по решению аналогичных задач Дирихле с помощью потенциала простого слоя [12]. При этом в случае использования аппроксимации $\tilde{J}'_{m,l}(d,s,\tau)$ тоже наблюдалась более высокая точность полученных вблизи границы $\partial\Omega$ численных решений, чем в случае аппроксимации интегралов $J_{m,l}(\boldsymbol{x},\tau)$ только с помощью ПКФГ (для того, чтобы сравнение было корректным, в обоих случаях для решения соответствующих ГИУ первого рода использовалась аппроксимация $\tilde{J}'_{0,m,k,l}(\tau)$). В заключение отметим, что точное интегрирование по $\rho^{\pm}$ может быть аналогичным образом использовано для аппроксимации потенциалов простого слоя стационарных уравнений $\Delta_2 u - p u = 0$ ($p \ge 0$) в двумерной области $\Omega^{\pm}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Onishi K.* Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. *Costabel M., Onishi K., Wendland W.L.* A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W.Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. *Hongtao Y.* On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.

5. *Iso Y., Takahashi S., Onishi K.* Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.). V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. l–24.
6. *Иванов Д.Ю.* О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
7. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
8. *Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
9. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4
10. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.
12. *Hamina M., Saranen J.* On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 205. P. 41–64. DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2

Статья поступила 31.08.2018 г.

Ivanov D.Y. (2019) A REFINEMENT OF THE BOUNDARY ELEMENT COLLOCATION METHOD NEAR THE BOUNDARY OF DOMAIN IN THE CASE OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND THIRD KIND. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 5–25

DOI 10.17223/19988621/57/1

Keywords: non-stationary heat conduction, boundary integral equation, single-layer heat potential, singular boundary element, collocation, operator, uniform convergence.

In this paper, we consider initial-boundary value problems (IBVPs) for the equation $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - p\,u$ with constants $a, p > 0$ in an open two-dimensional spatial domain Ω with boundary conditions of the second and third kind at a zero initial condition. A fully justified collocation boundary element method is proposed, which makes it possible to obtain uniformly convergent in the space-time domain $\Omega \times [0, T]$ approximate solutions of the abovementioned IBVPs. The solutions are found in the form of the single-layer potential with unknown density functions determined from boundary integral equations of the second kind.

To ensure the uniform convergence, integration on arc-length s when calculating the potential operator is carried out in two ways. If the distance r from the point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ at which the potential is calculated to the integration point $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$ does not exceed approximately one-third of the radius of the Lyapunov circle $R_Л$, then we use exact integration with respect to a certain component ρ of the distance r: $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$ (d is the distance from the point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ to the boundary $\partial\Omega$). This exact integration is practically feasible for any analytically defined curve $\partial\Omega$. In this integration, functions of the variable ρ are taken as the weighting functions and the rest of the integrand is approximated by quadratic interpolation on ρ. The functions of ρ are generated by the fundamental solution of the heat equation. The integrals with respect to s for $r > R_Л/3$ are calculated using Gaussian quadrature with γ points.

Under the condition $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ $(\gamma \geq 2)$, it is proved that the approximate solutions converge to an exact one with a cubic velocity uniformly in the domain $\Omega \times [0, T]$. It is also proved that the approximate solutions are stable to perturbations of the boundary function uniformly in the domain $\Omega \times [0, T]$. The results of computational experiments on the solution of the IBVPs in a circular spatial domain are presented. These results show that the use of the exact integration with respect to ρ can substantially reduce the decrease in the accuracy of numerical solutions near the boundary $\partial\Omega$, in comparison with the use of exclusively Gauss quadratures in calculating the potential.

AMS Mathematical Subject Classification: 80M15, 65E05

IVANOV Dmitry Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engeneering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag. 464 p.
2. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W.Groetsch, eds.)*. Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
5. *Iso Y., Takahashi S., Onishi K.* (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.), Vol. 3*. Berlin: Springer. pp. l–24.
6. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
7. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266110080045.
8. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* 1. pp. 15–17.
9. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost’ v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
10. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 1. Moskow: GIFML.
11. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moskow: Nauka. 551 p.
12. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62(205). pp. 41–64. DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2

Received: August 31, 2018