

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/57/2

MSC 74G15, 74S05, 65B99

Р.В. Киричевский, А.В. Скринникова

ВЛИЯНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Целью работы является исследование влияния аппроксимирующих функций при построении матрицы жесткости конечного элемента на скорость сходимости метода конечных элементов (МКЭ). Для достижения этой цели получены коэффициенты тензора преобразования при различных аппроксимирующих функциях с использованием одномерных полиномов Лагранжа, которые используются для построения матрицы жесткости конечного элемента: линейной, квадратичной и кубической. Найденные коэффициенты тензора преобразования были использованы при расчете внутренних и внешних радиальных перемещений в полом толстостенном резиновом цилиндре, находящемся под внутренним давлением. Анализ сходимости МКЭ при выборе линейных, квадратичных и кубических аппроксимирующих функций перемещений для выполненных расчетов показал, что использование конечного элемента с аппроксимирующей кубической функцией позволяет ускорить сходимость МКЭ и получить более точные результаты. Этот факт доказывает перспективу использования аппроксимирующих функций высших порядков для различных классов задач механики, в данном случае для эластомерного элемента.

Ключевые слова: *метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, эластомеры, кубическая аппроксимация.*

Одним из наиболее эффективных численных методов, позволяющих выполнять анализ напряженно-деформированного состояния конструкций из эластомеров, является метод конечных элементов (МКЭ).

Применение МКЭ накладывает определенные требования на системы автоматизированного проектирования (САПР) конструкций из эластомеров. Для расчетов с использованием МКЭ проектируемый объект должен быть представлен с помощью конечного числа элементарных объемов, называемых конечными элементами (КЭ) [1–4]. Задача дискретизации объекта на КЭ является весьма сложной и трудоемкой, особенно в трехмерном случае, что приводит к необходимости введения в САПР модуля, позволяющего автоматизировать данный процесс.

МКЭ основан на физической идеализации: одно из двух условий статического или кинематического равновесия выполняется точно, а другое приближенно. Это привело к тому, что МКЭ применяется в двух видах: в виде метода сил и метода перемещений. На практике чаще применяется метод перемещений, так как при его использовании легко представляются кинематические связи для произвольных конструкций. Однако в некоторых случаях более предпочтительным является метод сил, что приводит к необходимости реализации в САПР некоторого механизма выбора требуемого метода расчета [1].

При применении МКЭ возникает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в общем случае может иметь весьма высокий порядок. Для ее решения приходится использовать специальные модификации методов решения СЛАУ, как прямые, так и итерационные. После решения СЛАУ необходимо вычислять дополнительные параметры напряженно-деформированного состояния, например по полученным перемещениям вычислять деформации и напряжения. Это приводит к появлению больших массивов численных данных, которые, в первую очередь, приходится исследовать на точность, достоверность и соответствие физическому смыслу задачи [2]. Данный процесс по времени и трудоемкости иногда превосходит все предыдущие этапы проектирования и расчетов.

Доказательства сходимости и скорости сходимости схем МКЭ рассмотрены в работах О.К. Зенкевича [3], М.В. Урева [5], А.С. Сахарова [6], А.А. Гусева [7], В. Nedjar [8] и др.

Таким образом, структуру САПР, базирующихся на применении МКЭ, условно делят на три взаимосвязанных блока:

- 1) подготовка начальных данных для расчетов, включая описание объекта конструирования, дискретизации его на КЭ, описание нагрузок, физических и геометрических параметров, уравнения состояния и краевых условий;
- 2) расчет с использованием МКЭ;
- 3) анализ полученных результатов, включая синтез дополнительных параметров напряженно-деформированного состояния на основе ранее вычисленных.

Покажем, как работает первый блок, ведь он является важным с точки зрения теоретического обоснования математического обеспечения САПР рассматриваемых объектов. Остановимся на вопросе дискретизации КЭ, а именно на вопросах выбора типа КЭ и функций формы, а также условий, которым они должны удовлетворять.

Обычно при построении матрицы жесткости трехмерных шестигранных криволинейных конечных элементов удобным является при произвольном порядке аппроксимации перемещений использование произведений одномерных интерполяционных полиномов Лагранжа [9]. Однако с целью упрощения вычислений интегралов, входящих в выражения для коэффициентов матрицы жесткости (МЖ), иногда целесообразным становится использование степенных координатных функций [7]. При этом построенная матрица коэффициентов для системы степенных функций (либо другой системы координатных функций) с помощью тензоров преобразования приводится к матрице жесткости КЭ. Это справедливо для любого принимаемого закона аппроксимации перемещений [7–9]. Рассмотрим следующие законы.

Вариацию энергии деформации конечного элемента представим в известной форме:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv.$$

Компоненты тензоров напряжений и деформаций примем согласно следующим зависимостям:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\xi_{kl} + \xi_{lk}), \quad (2)$$

где

$$\xi_{kl} = C_k^{n'} u_{,l}^{n'}; \quad (3)$$

$C_k^{n'}$ – компоненты тензора преобразования базисной $z^{k'}$ и местной x^k систем координат. Штрих в индексах указывает на принадлежность компоненты к базисной декартовой системе координат (рис. 1).

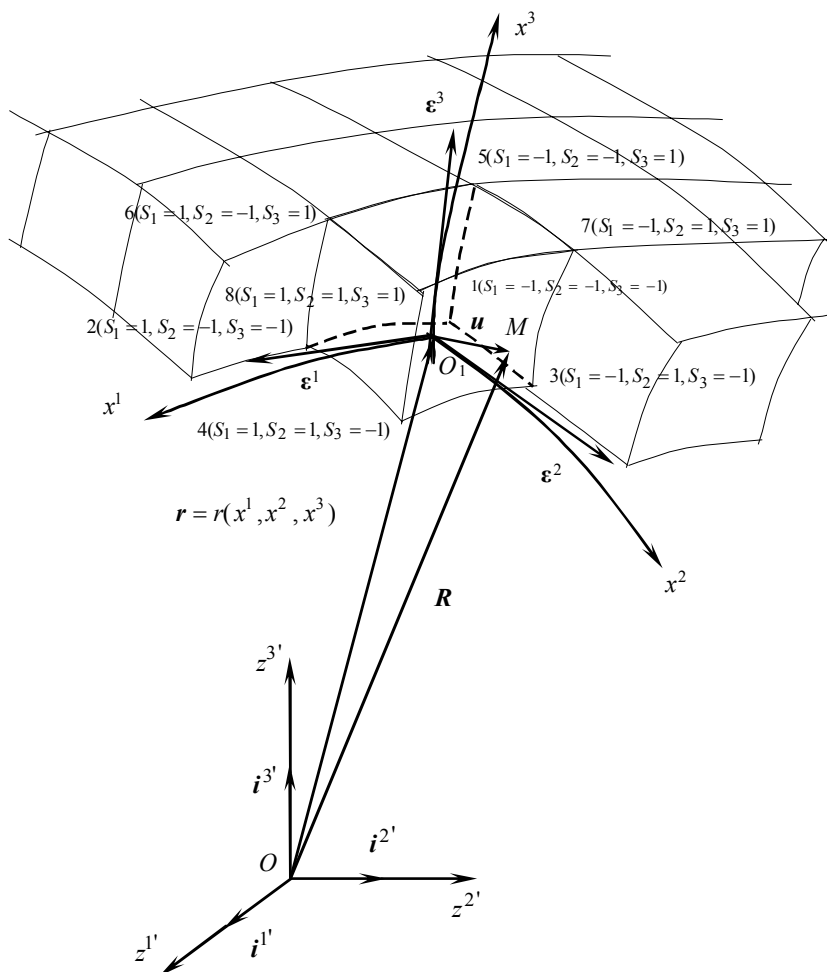


Рис. 1. Базисная и местная системы КЭ

Fig. 1. Basic and local FE systems

Учитывая выражения (1) – (3), уравнение для вариации энергии деформации перепишем в виде

$$\delta W = \iiint_v H^{m'in'l} u_{,i}^{n'} \delta(u_{,i}^{m'}) dv, \quad (4)$$

где

$$H^{m'in'l} = C^{jikl} C_j^{m'} C_k^{n'}. \quad (5)$$

Введение нового тензора $H^{m'in'l}$ как свертки тензора упругих постоянных с тензором преобразования координатных систем в несколько раз сокращает объем вычислений при построении МЖ КЭ [6].

Примем произвольный закон аппроксимации перемещений внутри КЭ:

$$u^{n'} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \Psi_{(1)}^{(\mu)} \Psi_{(2)}^{(\nu)} \Psi_{(3)}^{(\eta)} \quad (6)$$

с использованием системы координатных функций вида

$$\Psi_{(1)}^{(\mu)} = \frac{(x^1)^\mu}{\mu!}; \quad \Psi_{(2)}^{(\nu)} = \frac{(x^2)^\nu}{\nu!}; \quad \Psi_{(3)}^{(\eta)} = \frac{(x^3)^\eta}{\eta!}, \quad (7)$$

где

$$\sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M = \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^M \sum_{\eta=0}^M, \quad (8)$$

$M = 1$ – для линейной аппроксимации;

$M = 2$ – для квадратичной аппроксимации;

$M = 3$ – для кубической аппроксимации и так далее.

На основании выражения (6) получим следующее выражение для распределения производной функции перемещений внутри КЭ:

$$u_{,l}^{n'} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \Psi_{(1)}^{(\mu-\delta_l^1)} \Psi_{(2)}^{(\nu-\delta_l^2)} \Psi_{(3)}^{(\eta-\delta_l^3)} \cdot \rho, \quad (9)$$

$$\text{где } \rho = [\delta_l^1 (\mu-1)+1] [\delta_l^2 (\nu-1)+1] [\delta_l^3 (\eta-1)+1].$$

Подставляя (9) в (4), получаем следующее выражение вариации энергии деформации:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H^{m' in' l} \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^M \delta(b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) \Psi_{(1)}^{(\mu+\alpha-\delta_l^1-\delta_l^i)} \Psi_{(2)}^{(\nu+\beta-\delta_l^2-\delta_l^i)} \Psi_{(3)}^{(\eta+\gamma-\delta_l^3-\delta_l^i)} \times \\ & \times \frac{(\mu+\alpha-\delta_l^1-\delta_l^i)! (\nu+\beta-\delta_l^2-\delta_l^i)! (\eta+\gamma-\delta_l^3-\delta_l^i)!}{(\mu-\delta_l^1)! (\alpha-\delta_l^i)! (\nu-\delta_l^2)! (\beta-\delta_l^i)! (\eta-\delta_l^3)! (\gamma-\delta_l^i)!} dv = \\ & = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\eta} b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \delta(b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) F_{m'n'}^{(\mu\nu\eta\alpha\beta\gamma)} = \sum_f \sum_{\phi} F_{(f\phi)} \delta u^{(f)} u^{(\phi)}, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f &= \mu + (M+1)\nu + (M+1)^2\eta + 1, \\ \phi &= \alpha + (M+1)\beta + (M+1)^2\gamma + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет строить МЖ относительно коэффициентов $b_{(\mu\nu\eta)}^{n'}$ и $\delta b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}$ при произвольном законе аппроксимации с использованием численного интегрирования.

В случае принятия допущения о постоянстве тензора упругих постоянных и компонент метрического тензора внутри КЭ становится возможным точное интегрирование в выражении (10). В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} I_{li(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)} &= I_{li(\alpha)}^{(\mu)} I_{li(\beta)}^{(\nu)} I_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_{,l}^{n'} u_{,i}^{m'} dv = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } s \vee t \vee g - \text{четные,} \\ 2^3 \omega, & \text{при } s \wedge t \wedge g - \text{нечетные.} \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{Здесь} \quad \omega = \frac{1}{stg(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)!}, \quad (13)$$

$$s = \alpha + \mu - \delta_1^l - \delta_1^i + 1, \quad (14)$$

$$t = \beta + \nu - \delta_2^l - \delta_2^i + 1, \quad (15)$$

$$g = \gamma + \eta - \delta_3^l - \delta_3^i + 1, \quad (16)$$

$$I_{li(\alpha)}^{(\mu)} = \begin{cases} 0, \\ 2/s(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!; \end{cases} \quad (17)$$

$$I_{li(\beta)}^{(\nu)} = \begin{cases} 0, \\ 2/t(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!; \end{cases} \quad (18)$$

$$I_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \begin{cases} 0, \\ 2/g(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)!. \end{cases} \quad (19)$$

Переходя к пределам интегрирования $-\frac{1}{2} \leq x^i \leq \frac{1}{2}$, получаем следующие значения интегралов (17)-(19):

$$\tilde{I}_{li(\alpha)}^{(\mu)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} \frac{\alpha! \mu!}{(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} \frac{[\delta_1^l(\mu - 1) + 1][\delta_1^i(\alpha - 1) + 1]}{s}; \quad (20)$$

$$\tilde{I}_{li(\beta)}^{(\nu)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{\nu! \beta!}{(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{[\delta_2^l(\nu - 1) + 1][\delta_2^i(\beta - 1) + 1]}{t}; \quad (21)$$

$$\tilde{I}_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{g-1} \frac{\eta! \gamma!}{(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{g-1} \frac{[\delta_3^l(\eta - 1) + 1][\delta_3^i(\gamma - 1) + 1]}{g}. \quad (22)$$

Матрица коэффициентов на этом этапе вычисляется из зависимости

$$F_{(f\phi)} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M a_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^M \delta(a_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) H^{m' in' l} I_{il(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)}, \quad (23)$$

где

$$I_{il(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(s+t+g-3)} \frac{[\delta_1^l(\mu - 1) + 1][\delta_1^i(\alpha - 1) + 1]}{s} \times \\ \times \frac{[\delta_2^l(\nu - 1) + 1][\delta_2^i(\beta - 1) + 1][\delta_3^l(\eta - 1) + 1][\delta_3^i(\gamma - 1) + 1]}{tg}. \quad (24)$$

Для того чтобы перейти от МЖ при коэффициентах $b_{(\mu\nu\eta)}^{n'}$ и $\delta b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}$ к обычной МЖ относительно $u_{(pqr)}^{i'}$ $\delta u_{(stg)}^{j'}$, что равносильно переходу от одной системы координатных функций к другой, воспользуемся тензорами преобразования координатных функций. Для этой цели выпишем отдельно аппроксимации полей перемещений внутри КЭ по степенным функциям и по функциям с использованием

одномерных полиномов Лагранжа:

$$u^{n'} = \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^N \sum_{m_3=1}^L a_{(m_1 m_2 m_3)}^{n'} \frac{(x^1)^{m_1}}{(m_1)!} \frac{(x^2)^{m_2}}{(m_2)!} \frac{(x^3)^{m_3}}{(m_3)!}; \quad (25)$$

$$u^{n'} = \sum_{p_1=1}^M \sum_{p_2=1}^N \sum_{p_3=1}^L u_{(p_1 p_2 p_3)}^{n'} L^{p_1} L^{p_2} L^{p_3}, \quad (26)$$

где L^{p_1} , L^{p_2} , L^{p_3} – одномерные полиномы Лагранжа, определяемые по формуле

$$L^{p_k} = R_{j(p_k)}^M = \frac{\prod_{\delta=1}^M (x^{(j)} - x_{(\delta)}^j)}{\left(x^{(j)} - x_{(p_k)}^j \right) \prod_{r=1}^M \left(x_{(p_k)}^j - x_{(r)}^j + \delta_{(p_k)}^{(r)} \right)}. \quad (27)$$

На основании (25) и (26) имеем следующую зависимость для тензора преобразования координатных функций:

$$C_{m_k}^{p_k} (m_k - 1)! = \frac{\partial^{(m_k-1)} L^{p_k}}{(\partial x^k)^{m_k-1}} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (28)$$

а связь между коэффициентами разложения имеет вид

$$a_{(m_1 m_2 m_3)}^{n'} = C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3} u_{p_1 p_2 p_3}^{n'}, \quad (29)$$

где $C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3}$ представляет собой диадное тензорное произведение тензоров согласно формуле

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3} = C_{m_1}^{p_1} \cdot C_{m_2}^{p_2} \cdot C_{m_3}^{p_3} = C_m^p. \quad (30)$$

При этом имеет место очевидное равенство

$$C_{m_1}^{p_1} = C_{m_2}^{p_2} = C_{m_3}^{p_3}. \quad (31)$$

Коэффициенты МЖ $F_{m'n'}$ при $a_{(\mu\nu\eta)}^{n'}$ и $\delta(a_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'})$ вычисляются через коэффициенты МЖ $F_{i'j'}$ при $u_{(pqr)}^{i'} \delta u_{(stg)}^{j'}$ путем двойного умножения на тензоры преобразования

$$F_{i'j'} = C_{i'}^{m'} C_{j'}^{n'} F_{m'n'}. \quad (32)$$

Выведем коэффициенты тензора преобразования для различных законов аппроксимации.

Для **линейного закона аппроксимации** индексы, входящие в (25) и (27), приобретают следующие значения

$$M = N = L = 2, m_k = 1, 2, p_k = 1, 2, x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, x_{(2)}^1 = \frac{1}{2}. \quad (33)$$

Так как тензоры преобразования одинаковы для всех направлений x^1 , x^2 , x^3 , то достаточно вычислять их для одного направления, например, $C_{m_1}^{p_1}$ при $j=1$ для x^1 . В этом случае выражение (27) для полинома Лагранжа с учетом (33) при-

нимает вид

$$\begin{aligned}
 L^{p_1} = R_{l(p_1)}^2 &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})} = \\
 &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^1 - x_{(p_1)}^1\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Используя формулу (28), вычисляем значения компонент тензора преобразования

$$\begin{aligned}
 C_1^1 &= L^1 \Big|_{x^1=0} = -\left(x^1 - \frac{1}{2}\right) \Big|_{x^1=0} = \frac{1}{2}, \\
 C_2^1 &= \frac{\partial L^1}{\partial x^1} \Big|_{x^1=0} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2} - x^1\right) \Big|_{x^1=0} = -1, \\
 C_1^2 &= L^2 \Big|_{x^1=0} = \left(x^1 + \frac{1}{2}\right) \Big|_{x^1=0} = \frac{1}{2}, \\
 C_2^2 &= \frac{\partial L^2}{\partial x^1} \Big|_{x^1=0} = 1.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, имеем следующую матрицу тензора преобразования:

$$\begin{bmatrix} C_{m_1}^{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 \\ C_2^1 & C_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Для **квадратичного закона аппроксимации** индексы, входящие в (25) и (27), имеют такие значения:

$$M = N = L = 3, \quad m_k = 1, 2, 3, \quad p_k = 1, 2, 3,$$

$$x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, \quad x_{(2)}^1 = 0, \quad x_{(3)}^1 = \frac{1}{2}, \quad (37)$$

а одномерный полином Лагранжа суть:

$$\begin{aligned}
 L^{p_1} = R_{l(p_1)}^3 &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)(x^1 - x_{(3)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(3)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(3)})} = \\
 &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)x^1\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^1 - x_{(p_1)}^1\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(3)}\right)}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

По формуле (28) получаем аналогично (35) следующую матрицу коэффициентов тензора преобразования:

$$\begin{bmatrix} C_{m_1}^{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Для **кубического закона аппроксимации** значения индексов, входящих в (25) и (27), следующие:

$$M = N = L = 4, m_k = 1, 2, 3, 4, p_k = 1, 2, 3, 4;$$

$$x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, x_{(2)}^1 = -\frac{1}{6}, x_{(3)}^1 = \frac{1}{6}, x_{(4)}^1 = \frac{1}{2}, \quad (40)$$

а одномерный полином Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L^{p_1} &= R_{l(p_1)}^4 = \\ &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})} \times \\ &\quad \times \frac{(x^1 - x_{(3)}^1)(x^1 - x_{(4)}^1)}{(x_{(p_1)}^1 - x_{(3)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(3)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(4)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(4)})} = \\ &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)\left(x^1 + \frac{1}{6}\right)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{6} + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)} \times \\ &\quad \times \frac{\left(x^1 - \frac{1}{6}\right)\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{6} + \delta_{(p_1)}^{(3)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(4)}\right)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогично (35) получаем следующий вид матрицы коэффициентов тензора преобразования в случае кубического закона аппроксимации:

$$\left[C_{m_1}^{p_1} \right] = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 & C_1^4 \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 & C_2^4 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & C_3^4 \\ C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{27}{8} & \frac{27}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

Зная коэффициенты тензора преобразования для линейного (36), квадратичного (39) и кубического (42) законов аппроксимации перемещений по формуле (30), получаем общий тензор преобразования для коэффициентов МЖ КЭ.

Такой подход к формированию коэффициентов МЖ при законах аппроксимации высоких порядков позволяет значительно сократить количество вычислений и легко строить МЖ для любых других видов аппроксимирующих полиномов.

Рассмотрим влияние типа аппроксимирующих функций для построенных МЖ КЭ на примере расчета резинового элемента конструкции в виде полого толсто-стенного цилиндра, находящегося под внутренним давлением, на скорость сходимости полученного приближенного решения МКЭ.

Толстостенные цилиндры широко используются в химической, нефтяной, военной промышленности, на атомных электростанциях. Они подвергаются высоким давлениям и температурам, которые имеют постоянный или циклический характер. Анализ конечных радиальных и ортогональных перемещений при внутреннем давлении в толстостенных цилиндрах проводят с целью обнаружения предела прочности материала, поскольку промышленные цилиндры часто подвергаются давлению выше предела текучести материала. Следовательно, необходим точный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндров, чтобы полностью использовать их несущую способность и обеспечить безопасность эксплуатации.

Исходные данные: внутренний радиус $R_1 = 0.25$ м, внешний радиус цилиндра $R_2 = 0.5$ м, модуль сдвига $\mu = 0.7$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.49999$, давление $P = 0.1$ МПа. Расчетная схема представлена на рис. 2, где $r \in [R_1; R_2]$. Перемещения внутренней и внешней поверхностей определялись по формуле [10]:

$$u(r) = \frac{PR_1^2}{\mu(R_2^2 - R_1^2)} \left[(1 - \nu)r + \frac{(1 + \nu)R_2^2}{r} \right].$$

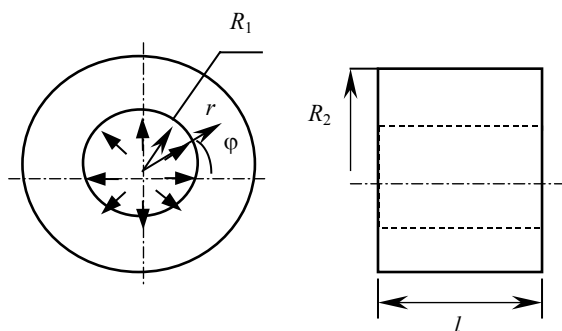


Рис. 2. Расчетная схема полого цилиндра под внутренним давлением
Fig. 2. Calculation scheme for a hollow cylinder under internal pressure

Расчет внутренних радиальных, u_1 (при $r = 0.25$), и внешних радиальных, u_2 (при $r = 0.5$), перемещений выполнен в рамках вычислительного комплекса «МИРЕЛА+» [1]. Результаты представлены в таблице. Здесь М1 – дискретизация по дуге, М2 – вдоль радиуса, М3 – по толщине цилиндра. Как видно из таблицы, увеличение степени аппроксимации перемещений в радиальном направлении способствует улучшению численных результатов при одинаковых сетках разбиения (точное решение: $u_1/u_2 = 0,07738/0,04762$).

Скорости сходимости МКЭ для линейного, квадратичного и кубического законов аппроксимации перемещений проиллюстрирована на рис. 3. Как видно, увеличение степени дискретизации влечет более высокую точность решения. Кубическая аппроксимация дает более быструю сходимость МКЭ и на сетке $2 \times 13 \times 2$ дает более точный результат. Тот факт, что аппроксимирующие функции более высокого порядка дают более точные результаты и быструю сходимость МКЭ, также подтверждается результатами, приведенными в работе [6] для неэластомерных конструкций.

Результаты расчета полого цилиндра под внутренним давлением

Закон аппроксимации	Размеры сетки $M1 \times M2 \times M3$	Количество уравнений	Перемещения u_1/u_2	Абсолютная погрешность решения
Линейный	2×3×2	36	0.0317/0.0524	—
	2×4×2	48	0.0481/0.0678	—
	2×5×2	60	0.0612/0.0728	—
	2×7×2	84	0.0684/0.0915	0.00898/0.0335
	2×9×2	108	0.0711/0.0982	0.00628/0.0268
	2×10×2	120	0.0752/0.1049	—
	2×11×2	132	0.0742/0.1093	—
Квадратичный	2×13×2	156	0.0756/0.1154	0.00178/0.0096
	2×3×2	36	0.0428/0.0591	—
	2×5×2	60	0.0623/0.0731	—
	2×7×2	84	0.0722/0.0955	0.00518/0.0295
	2×9×2	108	0.0728/0.1042	0.00458/0.0208
Кубический	2×11×2	132	0.0760/0.1124	—
	2×13×2	156	0.0791/0.1263	0.00172/0.0013
	2×4×2	48	0.0492/0.0684	—
	2×7×2	84	0.0712/0.0963	0.00618/0.0287
	2×9×2	120	0.0753/0.1215	0.00208/0.0035
	2×13×2	156	0.0775/0.1244	0.00012/0.0006

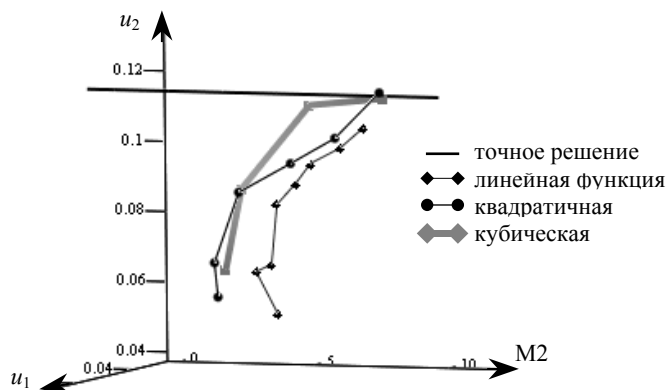


Рис. 3. Влияние аппроксимирующей функции на скорость сходимости МКЭ

Fig. 3. Effect of the approximating function on the FEM convergence rate

Заключение

На примере полого толстостенного цилиндра показано функционирование трех условно выделенных блоков САПР конструкций из эластомеров, основанной на МКЭ. Полученные в первом блоке МЖ КЭ для линейного, квадратичного и кубического законов аппроксимации перемещений были использованы во втором блоке при расчете радиальных перемещений МКЭ. Анализ полученных результатов в третьем блоке показал, что использование КЭ с аппроксимирующей кубической функцией позволяет ускорить сходимость МКЭ и получить более точные ре-

зультаты в сравнении с линейной в 10 раз и с квадратичной функцией в 2 раза по абсолютной погрешности. Таким образом, порядок аппроксимирующей функции при построении матрицы жесткости конечного элемента существенно влияет на скорость сходимости МКЭ, что доказывает перспективность использования аппроксимирующих функций более высоких порядков для определения параметров напряженно-деформированного состояния изделий из эластомеров, в частности толстостенных цилиндров.

При выборе аппроксимирующих функций для вычисления МЖ КЭ необходимо учитывать, что количество опорных точек интегрирования должно быть выбрано рациональным, так как от них зависит объем вычислений при интегрировании, который пропорционален в трехмерных задачах n^3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». Киев: Наукова думка, 2005. 403 с.
2. Solin P. Partial Differential Equations and the Finite Element Method. New Jersey: Wiley-Interscience, 2005. 504 p.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 672 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>.
4. Fialko S.Yu. Application of rigid links in structural design models // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. V. 13. No. 3. P. 119–137. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-119-137>.
5. Урев М.В. Сходимость МКЭ для эллиптического уравнения с сильным вырождением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 137–148.
6. Завьялов Г.Г., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Уточненные схемы МСКЭ для расчета массивных конструкций // Проблемы прочности. 1978. № 6. С. 76–82.
7. Гусев А.А. Метод конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия математика, информатика, физика. 2017. Т. 25. № 3. С. 217–233. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233>.
8. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of tubes // Computational Mechanics. 2017. P. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В. Конечно-элементный анализ оболочек вращения при использовании высокоточного треугольного элемента дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика, механика. 2016. № 5. С. 59–63.
10. Гребенюк С.М., Бова А.А. Визначення напружено-деформованого стану гумової труби на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2014. Вип. 22. С. 67–79.

Статья поступила 28.07.2018 г.

Kirichevsky R.V., Skrynnykova A.V. (2019) THE EFFECT OF APPROXIMATING FUNCTIONS IN THE CONSTRUCTION OF THE STIFFNESS MATRIX OF THE FINITE ELEMENT ON THE CONVERGENCE RATE OF THE FINITE ELEMENT METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 26–38

DOI 10.17223/19988621/57/2

Keywords: finite element method, stress-strain state, elastomers, cubic approximation.

The aim of this article is to study the influence of approximating functions on the convergence rate of the finite element method (FEM) when constructing the finite element stiffness matrix. To achieve this aim, coefficients of the transformation tensor have been obtained for different approximating functions with the use of one-dimensional Lagrange polynomials which are used for constructing the stiffness matrix of a finite element (linear, quadratic, and cubic). The found coefficients of the transformation tensor are used in the calculation of internal and external radial displacements in a hollow thick-walled resin cylinder under internal pressure. The analysis of the FEM convergence with linear, quadratic, and cubic approximation functions of displacements for the performed calculations shows that the use of a finite element with an approximating cubic function makes it possible to accelerate the FEM convergence and to obtain more accurate results. This fact proves the perspectiveness of using higher order approximating functions for different classes of problems in mechanics (in our case, for the elastomeric element).

AMS Mathematical Subject Classification 74G15, 74S05, 65B99

KIRICHEVSKY Rostislav Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine). E-mail: rost71@mail.ru

SKRYNNYKOVA Anna Vladimirovna (Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine). E-mail: ann3005@rambler.ru

REFERENCES

1. Kirichevsky V.V., Dohnjak B.M., Kozub Yu.G., et al. (2005) *Method konechnykh elementov v vichislitel'nom komplekse "MIRELA+"* [Finite element method in the MIRELA+ computer system]. Kiev: Nauk. Dumka. 403 p.
2. Šolín P. (2005) *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. New Jersey: Wiley-Interscience. 504 p.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. (2013) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann. pp. 672. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>
4. Fialko S.Yu. (2017) Application of rigid links in structural design models. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 13 (3). pp. 119–137. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-119-137>.
5. Urev M.V. (2014) Convergence of the finite element method for an elliptic equation with strong degeneration. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 8(3). pp. 411–421. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478914030144>.
6. Zav'yalov G.G., Kirichevsky V.V., Sakharov A.S. (1978) Utochnenie chemy MKSE dlja rascheta massivnykh konstrukciy [Refinement of the FEM scheme for the calculation of massive constructions]. *Problemy prochnosti*. 6. pp. 76–82.
7. Gusev A.A. (2017) High-Accuracy Finite Element Method for Solving Boundary-Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 25(3). pp. 217–233. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233>.
8. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. (2017) A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of tubes. *Computational Mechanics*. 2017. pp. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>.
9. Klochkov U.V., Nikolaev A.P., Vahina O.V. (2016) Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 71(5). pp. 114–117. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133016050034>.
10. Grebenyuk S.M., Bova A.A. (2014) Determination of stress-strain state of rubber tube on the basis of precise finite element moment scheme. *Problems of computational mechanics and strength of structures*. 22. pp. 67–79.

Received: July 28, 2018