

## МЕХАНИКА

УДК 531.383

DOI 10.17223/19988621/57/4

Е.А. Антонов, И.В. Меркурьев, В.В. Подалков

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТИ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ  
НА ДИНАМИКУ ДВУХМАССОВОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО  
ГИРОСКОПА  $L-L$ -ТИПА В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ<sup>1</sup>**

Проведено исследование динамики микромеханического гироскопа, далее ММГ, типа  $L-L$  с двумя активными массами (массами обладают чувствительный элемент и рамка) в режиме вынужденных колебаний. Получена математическая модель рассматриваемой конструкции ММГ, приведены дифференциальные уравнения движения в переменных Ван-дер-Поля. Было построено численное решение полученных уравнений движения и построены графики. На основе этих графиков и полученных аналитических зависимостей был проведен анализ влияния нелинейности упругих элементов ММГ, наличия произвольной угловой скорости основания и присутствия в системе второй массы (массы рамки) на характер поведения системы.

**Ключевые слова:** *двухмассовый микромеханический гироскоп, нелинейная жесткость упругих элементов, вынужденные колебания, произвольная угловая скорость основания.*

На сегодняшний день ни одну современную систему управления, навигации и ориентации нельзя представить без датчиков, созданных на основе технологии МЭМС (микроэлектромеханических систем). Микромеханические гироскопы имеют ряд неоспоримых преимуществ: в первую очередь – миниатюрность, порой габариты гироскопа могут быть десятки микрометров, а также незначительное энергопотребление и низкую себестоимость [1, 2].

Из-за малых размеров ММГ не всегда удается выстроить качественную защиту прибора от внешнего воздействия. Повышение надежности конструкции и точности, получаемой от прибора информации, – на сегодняшний день одно из приоритетных направлений научной деятельности многих крупных компаний (таких, как *Bosch* и *Analog Devices*), занимающихся системами навигации и ориентации [3].

При проектировании конкурентоспособных гироскопических систем необходимо тщательно рассматривать возникающие в разрабатываемой модели динамические эффекты, обусловленные нелинейностью в системе, особенностью изготовления, сборки и т.д. С целью повышения точности технических характеристик для анализа была выбрана двухмассовая модель ММГ, так она более стабильна, чем модель с одной активной массой [4]. Нелинейность упругих элементов в системе представляет большой интерес, что доказывает наличие множества работ, посвященных изучению нелинейных факторов в гироскопах [4 – 8].

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

В итоге для анализа динамики была выбрана двухмассовая концепция ММГ  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний с присутствием в системе нелинейности упругих элементов и произвольной скорости основания, на которое устанавливается рассматриваемый гироскоп.

### Постановка задачи

Рассмотрим выбранную нами модель (кинематическую) микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа:

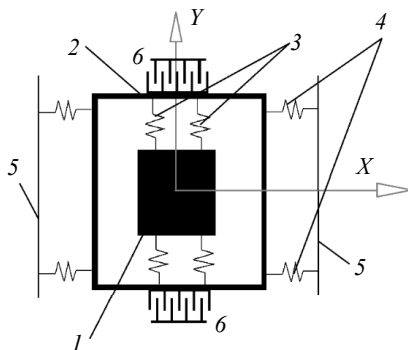


Рис. 1. Кинематическая модель ММГ  $L-L$ -типа

Fig. 1. A kinematic model of an  $LL$ -type micromechanical gyroscope

Чувствительный элемент (далее ЧЭ) изображен на рис. 1. Конструкция его состоит из инерционной массы  $I$ , которая крепится к рамке 2 при помощи четырех одинаковых внутренних торсионов 3. Рамка 2 четырьмя одинаковыми внешними торсионами 4 прикреплена к основанию 5. Торсионы имеют особую форму, что обеспечивает их работу только на изгиб, исключая их растяжение. На рамке 2 и подложке основания 5 размещена гребенчатая структура 6, являющаяся, по сути, системой плоских конденсаторов. Данная модель ЧЭ обеспечивает степени свободы вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Цель данной работы в том, чтобы проанализировать динамический эффект, который возникает из-за наличия в системе нелинейной жесткости торсионов и произвольной угловой скорости основания в двухмассовой модели микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний. Необходимо создать математическую модель такой системы и построить аналитическое решение. Проанализировать полученные дифференциальные уравнения ММГ.

### Построение уравнений движения

Чувствительный элемент рассматривается как система «инерционная масса – рамка», которая закреплена на вращающемся с произвольной угловой скоростью  $\Omega$  основании. В таком случае кинетическая энергия будет записываться следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{ин} ((\dot{x} - y \cdot \Omega)^2 + (\dot{y} + x \cdot \Omega)^2),$$

где введены следующие обозначения:  $x, y$  – координаты ЧЭ в системе координат,

связанной с основанием;  $m_{\text{ин}}$  – масса инерционной массы;  $m_p$  – масса рамки;  $\Omega$  – угловая скорость основания.

Потенциальная энергия системы включает в себя энергию, обусловленную нелинейной жесткостью упругих торсионов:

$$\Pi = c_x \frac{x^2}{2} + c_y \frac{y^2}{2} + d(x^4 + y^4),$$

здесь  $c_i$  – жесткость упругого элемента (торсиона), а  $d$  – параметр, характеризующий нелинейность упругих свойств торсионов.

Таким образом, лагранжиан системы записывается в виде

$$L = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{\text{ин}} ((\dot{x} - y \cdot \Omega)^2 + (\dot{y} + x \cdot \Omega)^2) - c_x \frac{x^2}{2} - c_y \frac{y^2}{2} - d(x^4 + y^4). \quad (1)$$

Пусть  $\Omega$  – постоянная произвольная угловая скорость основания, а  $F \sin \omega t$  – вынуждающая внешняя сила. В таком случае, воспользовавшись формализмом Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}M + c_x x - 2m_{\text{ин}}\Omega\dot{y} - M\Omega^2 x + 4dx^3 &= F \sin \omega t; \\ \ddot{y}m_{\text{ин}} + c_y y + 2m_{\text{ин}}\Omega\dot{x} - m_{\text{ин}}\Omega^2 y + 4dy^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\omega$  – частота вынуждающей силы,  $M$  – сумма  $m_{\text{ин}}$  и  $m_p$ .

Пусть коэффициенты  $c_x$  и  $c_y$  удовлетворяют соотношению

$$c_x = \frac{m_p + m_{\text{ин}}}{m_{\text{ин}}} c_y. \quad (3)$$

Соотношение (3) вводится для улучшения резонансных свойств ММГ, т.е. характеристики торсионов подбираются таким образом, чтобы резонансные частоты по обобщенным координатам совпадали.

Запишем систему (2) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} - 2\frac{1}{1+\delta}v\dot{\beta} + (1-v^2)\alpha + 4\epsilon\tilde{d}\frac{1}{1+\delta}\alpha^3 &= \epsilon f_0 \sin \mu\tau; \\ \ddot{\beta} + 2\gamma\dot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + (1-v^2)\beta + 4\epsilon\tilde{d}\beta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tau$  – безразмерное время,  $\alpha$  и  $\beta$  – малые безразмерные амплитуды колебаний. Нормирующим параметром в данном случае служила величина  $h$  – зазор между гребенками контактов, образующих систему плоских конденсаторов. В таком случае

$$x = \sqrt{\epsilon} h \alpha; \quad y = \sqrt{\epsilon} h \beta; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_y}{m_{\text{ин}}}}.$$

В нормализованной системе дифференциальных уравнений (4) точкой обозначается дифференцирование по времени;  $v$  – безразмерная угловая скорость основания;  $\delta$  – параметр, характеризующий наличие второй массы в гироскопе (отношение массы рамки к массе чувствительного элемента);  $\tilde{d}$  – безразмерный параметр, характеризующий нелинейные свойства упругих элементов (торсионов);  $f_0$  – безразмерная амплитуда вынуждающей силы;  $\mu$  – безразмерная частота внешнего воздействия.

Отметим, что амплитуда вынуждающей силы  $f_0$  мала по отношению к жесткости торсионов  $c$ , т. е. будем рассматривать мягкое возбуждение, при котором значение  $f_0$  порядка  $\varepsilon^{3/2}$ .

В работе принимается безразмерный коэффициент вязкого трения  $\gamma$  порядка малого параметра  $\varepsilon$ , то есть  $\gamma = \varepsilon\gamma_1$ . Так как масса рамки существенно меньше инерционной массы, поэтому  $\delta$  – порядка  $\varepsilon$ , т.е.  $\delta = \varepsilon\delta_1$ . Перепишем систему (4) с учетом принятых допущений:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} - 2v\dot{\beta} + (1 - v^2)\alpha &= -\varepsilon(2\gamma\dot{\alpha} + 2v\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\alpha^3 - f_0 \sin \mu\tau); \\ \ddot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + (1 - v^2)\beta &= -\varepsilon(2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\beta^3).\end{aligned}\quad (5)$$

Для дальнейшего упрощения записи уравнений в (5) индекс «1» у коэффициентов  $\delta$  и  $\gamma$  опущен, а в правой части уравнений введены замены:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2\gamma\dot{\alpha} + 2v\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\alpha^3 - f_0 \sin \mu\tau; \\ F_2 &= 2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\beta^3.\end{aligned}$$

#### Анализ динамики чувствительного элемента

Для решения системы (5) была применена методика Крылова – Боголюбова [5].

Решение в переменных амплитуда – фаза имеет вид

$$\alpha = A \sin(\mu\tau + \varphi_1) + B \sin(\mu\tau + \varphi_2);$$

$$\beta = A \cos(\mu\tau + \varphi_1) - B \cos(\mu\tau + \varphi_2).$$

Перейдем от переменных  $A, B, \varphi_1, \varphi_2$  к переменным Ван-дер-Поля  $p_1, p_2, q_1, q_2$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1 \sin \mu\tau + q_1 \cos \mu\tau + p_2 \sin \mu\tau + q_2 \cos \mu\tau; \\ \beta &= p_1 \cos \mu\tau - q_1 \sin \mu\tau - p_2 \cos \mu\tau + q_2 \sin \mu\tau.\end{aligned}\quad (6)$$

Из решения однородного уравнения системы (5) следует, что собственные частоты системы будут равны

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1 + v; \\ \omega_2 &= 1 - v,\end{aligned}\quad (7)$$

а решение однородной системы уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1 \sin \omega_1 \tau + q_1 \cos \omega_1 \tau + p_2 \sin \omega_2 \tau + q_2 \cos \omega_2 \tau; \\ \beta &= p_1 \cos \omega_1 \tau - q_1 \sin \omega_1 \tau - p_2 \cos \omega_2 \tau + q_2 \sin \omega_2 \tau.\end{aligned}\quad (8)$$

Для построения частного решения системы (5) запишем производные медленных амплитуд  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= p_1\mu \cos \mu\tau - q_1\mu \sin \mu\tau + p_2\mu \cos \mu\tau - q_2\mu \sin \mu\tau; \\ \dot{\beta} &= -p_1\mu \sin \mu\tau - q_1\mu \cos \mu\tau + p_2\mu \sin \mu\tau + q_2\mu \cos \mu\tau.\end{aligned}\quad (9)$$

Преобразуем (9) с учетом (8)

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= p_1\omega_1 \cos \mu\tau - q_1\omega_1 \sin \mu\tau + p_1(\mu - \omega_1) \cos \mu\tau - q_1(\mu - \omega_1) \sin \mu\tau + \\ &+ p_2\omega_2 \cos \mu\tau - q_2\omega_2 \sin \mu\tau + p_2(\mu - \omega_2) \cos \mu\tau - q_2(\mu - \omega_2) \sin \mu\tau; \\ \dot{\beta} &= -p_1\omega_1 \sin \mu\tau - q_1\omega_1 \cos \mu\tau - p_1(\mu - \omega_1) \sin \mu\tau - q_1(\mu - \omega_1) \cos \mu\tau + \\ &+ p_2\omega_2 \sin \mu\tau + q_2\omega_2 \cos \mu\tau + p_2(\mu - \omega_2) \sin \mu\tau + q_2(\mu - \omega_2) \cos \mu\tau.\end{aligned}\quad (10)$$

Условие совместности записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 \sin \mu\tau + \dot{q}_1 \cos \mu\tau + \dot{p}_2 \sin \mu\tau + \dot{q}_2 \cos \mu\tau &= 0; \\ \dot{p}_1 \cos \mu\tau - \dot{q}_1 \sin \mu\tau - \dot{p}_2 \cos \mu\tau + \dot{q}_2 \sin \mu\tau &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Продифференцировав (9), получим вторые производные для амплитуд  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставив найденные производные в исходную систему уравнений (5), получим

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 \mu \cos \mu\tau - \dot{q}_1 \mu \sin \mu\tau + \dot{p}_2 \mu \cos \mu\tau - \dot{q}_2 \mu \sin \mu\tau &= -\varepsilon G_1 - H_1; \\ -\dot{p}_1 \mu \sin \mu\tau - \dot{q}_1 \mu \cos \mu\tau + \dot{p}_2 \mu \sin \mu\tau + \dot{q}_2 \mu \cos \mu\tau &= -\varepsilon G_2 - H_2,\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}G_1 &= 2\gamma\ddot{\alpha} + 2\nu\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\alpha^3 - f_0 \sin \mu\tau; \quad G_2 = 2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\beta^3; \\ H_1 &= -p_1\Delta_1 \sin \mu\tau - q_1\Delta_1 \cos \mu\tau - p_2\Delta_2 \sin \mu\tau - q_2\Delta_2 \cos \mu\tau; \\ H_2 &= -p_1\Delta_1 \cos \mu\tau + q_1\Delta_1 \sin \mu\tau + p_2\Delta_2 \cos \mu\tau - q_2\Delta_2 \sin \mu\tau,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \mu^2 - \omega_1^2 - 2\nu(\mu - \omega_1); \\ \Delta_2 &= \mu^2 - \omega_2^2 + 2\nu(\mu - \omega_2).\end{aligned}$$

Разрешив (12) и (11) относительно переменных  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu}(G_1 - G_2) \cos \mu\tau - \frac{1}{2\mu}(H_1 - H_2) \cos \mu\tau; \\ \dot{q}_1 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu}(G_1 + G_2) \sin \mu\tau + \frac{1}{2\mu}(H_1 + H_2) \sin \mu\tau; \\ \dot{p}_2 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu}(G_1 + G_2) \cos \mu\tau - \frac{1}{2\mu}(H_1 + H_2) \cos \mu\tau; \\ \dot{q}_2 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu}(G_1 - G_2) \sin \mu\tau + \frac{1}{2\mu}(H_1 - H_2) \sin \mu\tau.\end{aligned}\quad (13)$$

Согласно (13), переменные  $p_1, p_2, q_1, q_2$  являются медленными функциями времени, поэтому корректно будет воспользоваться методом усреднения.

Результат усреднения правых частей системы уравнений (13) дает следующую систему дифференциальных уравнений в переменных Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(p_1 + p_2 + q_1 - q_2) + \nu\delta\mu(-q_1 + q_2) + \\ &\quad + \tilde{d} \frac{3}{2}(D_1 - D_2) \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1 - q_1)\Delta_1 + (q_2 - p_2)\Delta_2 \}; \\ \dot{q}_1 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(-q_1 - q_2 - p_1 + p_2) + \nu\delta\mu(-p_1 + p_2) + \\ &\quad + \tilde{d} \frac{3}{2}(D_3 - D_4) - \frac{1}{2}f_0 \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2 - q_1\Delta_3 + q_2\Delta_4) \}; \\ \dot{p}_2 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(p_1 + p_2 - q_1 + q_2) + \nu\delta\mu(-q_1 + q_2) + \\ &\quad + \tilde{d} \frac{3}{2}(D_1 + D_2) \} + \frac{1}{2\mu} \{ (p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2 + q_1\Delta_3 + q_2\Delta_4) \}; \\ \dot{q}_2 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(-q_1 - q_2 + p_1 - p_2) + \nu\delta\mu(-p_1 + p_2) + \\ &\quad + \tilde{d} \frac{3}{2}(D_3 + D_4) - \frac{1}{2}f_0 \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1 + q_1)\Delta_1 - (q_2 - p_2)\Delta_2 \},\end{aligned}\quad (14)$$

где были введены следующие замены:

$$\Delta_1 = \mu^2 - \omega_1^2 - 2\nu(\mu - \omega_1);$$

$$\Delta_2 = \mu^2 - \omega_2^2 + 2\nu(\mu - \omega_2);$$

$$\Delta_3 = \mu^2 - \omega_1^2 + 2\nu(\mu - \omega_1);$$

$$\Delta_4 = \mu^2 - \omega_2^2 - 2\nu(\mu - \omega_2);$$

$$D_1 = (q_1 + q_2) \left[ (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 \right];$$

$$D_2 = (p_1 - p_2) \left[ (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \right];$$

$$D_3 = (p_1 + p_2) \left[ (q_1 + q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2 \right];$$

$$D_4 = (q_1 - q_2) \left[ (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \right].$$

### Числовой пример

Проведем численную оценку, полученных выражений. Рассмотрим двухмассовый микромеханический гироскоп со следующими характеристиками: масса чувствительного элемента  $m_{\text{ч}} = 10^{-6}$  кг; величина зазора между контактами гребенки (контакты при этом образуют систему плоских конденсаторов)  $h = 100$  мкм; угловая скорость основания  $\Omega = 500$  рад/с; малый параметр  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Для такого случая построим амплитудно-частотные характеристики.

Вначале запишем АЧХ для системы, где отсутствуют нелинейные слагаемые:

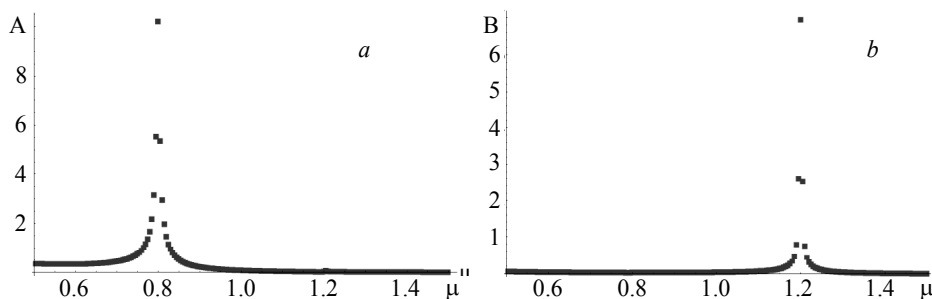


Рис. 2. АЧХ для линейной системы

Fig. 2. Amplitude-frequency response of a linear system

Проанализировав графики, представленные на рис. 2 (а и б) можно сделать вывод, что при частоте внешней вынуждающей силы  $\mu$  близкой к первой собственной частоте колебаний  $\omega_1$  амплитуда колебаний «А» возрастает, в то время как амплитуда «В» имеет порядок  $\varepsilon$ , т.е. происходят колебания с очень малой амплитудой. Когда же частота  $\mu$  близка ко второй собственной частоте колебаний  $\omega_2$ , картина меняется, т.е. теперь амплитуда «В» бесконечно возрастает, а амплитуда «А» стремится к нулю.

Теперь построим АЧХ для нелинейной системы уравнений (14).

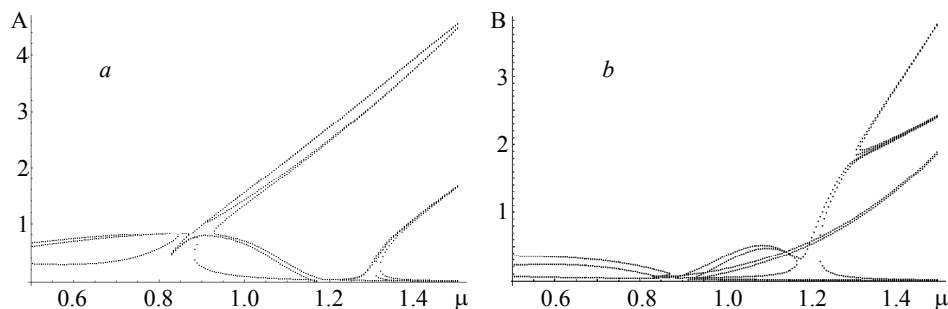


Рис. 3. АЧХ для нелинейной системы

Fig. 3. Amplitude-frequency response of a nonlinear system

Введение в систему нелинейных слагаемых изменило вид АЧХ (рис. 3) по сравнению с линейной системой (рис. 2), но интересующие нас закономерности в поведении амплитуд можно наблюдать и на этих АЧХ. При нахождении частоты внешнего воздействия около  $\omega_1$  амплитуда «А» возрастает, а «В» становится достаточно малой, такой же результат мы наблюдали и в линейной системе. Аналогично с линейной системой ведет себя и нелинейная система при  $\mu$  близком к  $\omega_2$ .

### Заключение

В данной работе построена математическая модель двухмассового микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний. В полученной модели учтены: вязкое трение в системе, произвольная угловая скорость основания, нелинейные упругие свойства торсионов (упругих элементов). Особый интерес представляет тот факт, что в данной задаче угловая скорость основания не  $\sim \varepsilon$ , а является произвольной величиной. Также полученные уравнения позволяют учесть вторую массу рассматриваемого ММГ. Построены АЧХ как для линейной системы, так и для системы с нелинейными слагаемыми. Сделаны соответствующие выводы о поведении системы.

Особо интересным результатом данной работы стал вывод о том, что в рассматриваемой системе при приближении частоты внешнего воздействия к одной из собственных частот системы происходит резкое возрастание амплитуды колебаний по одной моде, а по другой моде, напротив, амплитуда становится достаточно малой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. Simulation of Translational Vibrations Effect on Torque-to-Balance RR-Type MEMS Gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 2018. V. 9. No. 1. P. 50–56.
2. Пешихонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // *Гироскопия и навигация*. 2011. № 1. С. 3–17.
3. Shkel A. Microtechnology comes of age // *GPS World*. Sep. 2011. V. 22. P. 43–50.
4. Лестев А.М., Ефимовская А.В. О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2012. Т. 55. № 5. С. 40–46.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

6. Лестев М.А. Нелинейный параметрический резонанс в динамике микромеханического гироскопа // Известия вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47. № 2. С. 36–42.
7. Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
8. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.

Статья поступила 13.06.2018 г.

Antonov E.A., Merkuryev I.V., Podalkov V.V. (2019) INFLUENCE OF NONLINEAR RIGIDITY OF ELASTIC ELEMENTS ON THE  $L$ – $L$  TYPE TWO-MASS MICROMECHANICAL GYROSCOPE DYNAMICS IN A FORCED-OSCILLATION REGIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 54–62

DOI 10.17223/19988621/57/4

Keywords: two-mass micromechanical gyroscope, nonlinear rigidity of elastic elements, forced oscillations, arbitrary angular velocity of the base.

In this paper, an  $L$ – $L$  type micromechanical gyroscope is considered in a forced-oscillation regime. The main purpose is to analyze the effect of nonlinearity on the gyroscope dynamics. In this case, the nonlinearity is caused by difference in the rigidity of elastic elements. A distinctive feature of this work is that the angular velocity of the base is supposed to be arbitrary. A mathematical model of the micromechanical gyroscope, which is characterized by two active masses, is developed assuming that the mass of the frame is far less than that of the sensitive element. The problem solution is obtained using the Van der Pol variables. The differential equations of motion of the  $L$ – $L$  type two-mass micromechanical gyroscope are solved numerically with an application of the mathematical package "Mathematica". The amplitude-frequency responses are plotted on the basis of calculated results. The obtained data allowed one to analyze the system behavior and to make an appropriate conclusion. It was revealed that when the frequency of driving force approaches the system natural frequencies, one of the amplitudes rapidly increases while another tends to zero.

**Financial support.** The reported study was funded by RFBR according to the research project № 16-01-00772-a and №16-08-01269-a.

*ANTONOV Egor Aleksandrovich* (National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation). E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

*MERKURYEV Igor' Vladimirovich* (Doctor of Technical Sciences, Head of Department, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation). E-mail: merkuryeviv@ya.ru

*PODALKOV Valeriy Vladimirovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation).

## REFERENCES

1. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. (2018) Simulation of translational vibrations effect on torque-to-balance RR-type MEMS gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 9(1). pp. 50–56. DOI: 10.1134/S2075108718010029.
2. Peshekhonov V.G. (2011) Gyroscopic navigation systems: current status and prospects. *Gyroscopy and navigation*. 2(3). pp. 111–118. DOI: 10.1134/S2075108711030096.
3. Shkel A.M. (2011) Microtechnology comes of age. *GPS World*. 22. pp. 43–50.
4. Lestev A.M., Efimovskaya A.V. (2012) O vliyani nelineynykh faktorov na dinamiku mikromekhanicheskogo giroskopa s dvukhmassovym chuvstvitel'ny m elementom [On the

- influence of nonlinear factors on the dynamics of micromechanical gyroscope with a two-mass sensitive element]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 55(5). pp. 40–46.
5. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]. Moscow: Nauka.
  6. Lestev A.M. (2004) Nelineyny parametricheskiy rezonans v dinamike mikromekhanicheskogo giroskopa [Nonlinear parametric resonance in micromechanical gyroscope dynamics]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 47(2). pp. 36–42.
  7. Martynenko Yu.G., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2008) Control of nonlinear vibrations of vibrating ring microgyroscope. *Mechanics of Solids*. 43(3). pp. 379–390. DOI: 10.3103/S0025654408030102.
  8. Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2009) *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of the micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit.

Received: June 13, 2018