

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/46/9

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка, являющегося одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания, телекоммуникационных сетях, спутниковых сетях связи. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока принимается по методу максимума апостериорной вероятности. Формулируется алгоритм оптимального оценивания состояний. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оптимальное оценивание состояний; апостериорные вероятности; метод максимума апостериорной вероятности.

При описании и анализе реальных экономических, технических, физических и других процессов часто возникает необходимость применять математические модели теории массового обслуживания (ТМО). В настоящее время в связи с бурным развитием информационных технологий важнейшими сферами приложений ТМО являются проектирование и создание цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО). Так как на практике параметры, определяющие поток событий, как правило, случайным образом изменяются со временем, то адекватными математическими моделями информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО, являются дважды стохастические потоки событий [1–8]. В данных потоках событий не только случайны моменты наступления событий, но и интенсивность потока представляет собой случайный процесс, т.е. имеет место двойная стохастика. Объектом изучения настоящей работы является полусинхронный поток событий второго порядка.

В большинстве случаев рассматриваются модели входящих потоков событий, когда события потока полностью наблюдаемы. Однако на практике любое регистрирующее устройство затрачивает некоторое время на регистрацию события, в течение которого оно не способно обработать следующие события, т.е. событие, поступившее на прибор, порождает период мертвого времени [9], в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. Принимается, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время).

Основными задачами при изучении дважды стохастических потоков событий являются следующие: 1) оценка состояний потока [10–12]; 2) оценка параметров потока [13–19].

В настоящей работе предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний рассматриваемого потока в условиях его неполной наблюдаемости методом максимума апостериорной вероятности [20]. Применение данного метода обусловлено тем, что апостериорная вероятность является характеристикой, обладающей наиболее полной информацией об исследуемом процессе, содержащейся в выборке наблюдений, а также в силу того, что метод максимума апостериорной вероятности обеспечивает минимум полной вероятности ошибки принятия решения [21]. Данная статья является непосредственным развитием работ [11, 12].

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$

является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 . Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где случайная величина $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, случайная величина $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины. Таким образом, длительность интервала между событиями потока в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$.

В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния во второе либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η . В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ в зависимости от значения случайной величины η . Здесь $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 .

В последующем изложении полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеют вид:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события; диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события рассматриваемого потока являются недоступными наблюдению (теряются). По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

Для наглядности на рис. 1 приведен пример возникающей ситуации, где $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности T обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события полусинхронного потока второго порядка, недоступные наблюдению.

Процесс $\lambda(t)$ является марковским. Поскольку $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots$, то $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс или ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс.

Требуется по наблюдениям $t_1, t_2, \dots$ за потоком событий на временном интервале (t_0, t) оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений t , где t_0 – момент начала наблюдений. Без ограничений общности можно положить $t_0 = 0$.

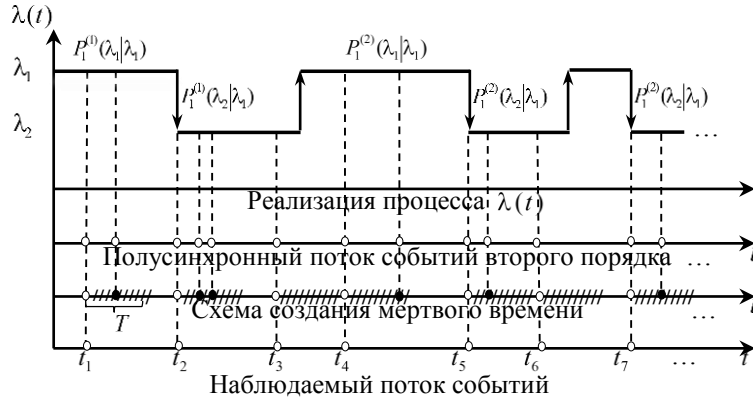


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Fig. 1. Formation of the observed event flow

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий потока за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Оптимальное оценивание по критерию максимума апостериорной вероятности выглядит следующим образом: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$.

2. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка

Момент вынесения решения t принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями наблюдаемого потока. Для начального интервала (t_0, t_1) момент t лежит между началом наблюдения и первым событием в наблюдаемом потоке. Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) , значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots$. Однако, так как наблюдаемое в момент t_k событие порождает период мертвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} , т.е. интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: полуинтервал $(t_k, t_k + T]$ и интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Отметим, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на данных интервалах разные, так как на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток недоступен наблюдению, а на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем.

2.1. Выражения для апостериорной вероятности в условиях отсутствия мертвого времени

Рассмотрим ситуацию, когда $T = 0$, т.е. мертвое время отсутствует. В работе [11] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для данного случая.

Лемма 1. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)w^2(\lambda_1 | t) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2. \quad (1)$$

Лемма 2. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события полусинхронного потока второго порядка определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + [\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В [11] показано, что априорная вероятность $\pi_1(t | t^0)$ того, что значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ в момент времени t при условии, что функционирование потока началось в момент времени t^0 , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\pi_1'(t | t^0) = -[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2] \pi_1(t | t^0) + \alpha_2. \quad (3)$$

Интегрирование уравнения (3) [22] и переход в полученном решении к стационарному случаю ($t \rightarrow \infty$ или $t^0 \rightarrow -\infty$) определяют явный вид априорной финальной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$:

$$\pi_1 = \alpha_2 / [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2]. \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (1) с учетом начального условия приводит к следующей теореме.

Теорема 1. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (5)$$

где $w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1}$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, задается формулой (2);

$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, π_1 определено в (4).

2.2. Алгоритм оптимального оценивания состояний при непродлеваемом мертвом времени

Вернемся к случаю, когда длительность мертвого времени $T \neq 0$. Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, на котором событие потока наступает в граничной точке t_k .

Теорема 2. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1]e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2)(t - t_k)}, \quad (6)$$

$t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ задается формулой (2), а π_1 – формулой (4).

Доказательство. В течение периода мертвого времени T полусинхронный поток событий второго порядка недоступен наблюдению. В этой связи можно заключить, что на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ аналогично поведению априорной вероятности $\pi_1(t | t^0)$. Разница заключается в определении начального значения $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k наступления наблюдаемого события потока. Нетрудно показать, что вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, задается уравнением (3) с начальным условием в момент времени t_k наступления события потока $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. Интегрируя (3), получаем (6). Теорема доказана.

Рассмотрим интервал $(t_k + T, t_{k+1})$, смежный с полуинтервалом $(t_k, t_k + T]$. На данном интервале поток наблюдаем, поэтому вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ осуществляется по формуле (5); при этом начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$:

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}, \quad (7)$$

$t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + T)$, $k = 1, 2, \dots$, рассчитывается по формуле (6) для $t = t_k + T$.

В момент времени t_k наступления события потока, которое порождает период мертвого времени, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ рассчитывается по формуле пересчета (2).

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ ($w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$) и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) в произвольный момент времени t :

- 1) в момент времени $t_0 = 0$ по формуле (4) вычисляется априорная вероятность $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;
 - 2) в любой момент времени t , $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наступления первого наблюдаемого события потока, для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (5);
 - 3) для $k = 0$ в момент наступления первого наблюдаемого события потока t_1 вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$ по формуле (5);
 - 4) k увеличивается на единицу и для $k = 1$ вычисляется $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ по формуле (2), при этом $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (6) на следующем шаге алгоритма;
 - 5) для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (6) для любого t , $t_1 < t < t_1 + T$;
 - 6) для $k = 1$ по формуле (6) вычисляется $w(\lambda_1 | t = t_1 + T)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге алгоритма;
 - 7) для $k = 1$ в любой момент времени t , $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго наблюдаемого события потока, вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (7);
 - 8) для $k = 1$ в момент времени t_2 вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t = t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$ по формуле (7);
 - 9) алгоритм переходит на шаг 4, затем шаги 4–8 повторяются для $k = 2$ и т.д.
- Параллельно по ходу вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по критерию максимума апостериорной вероятности [20]: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

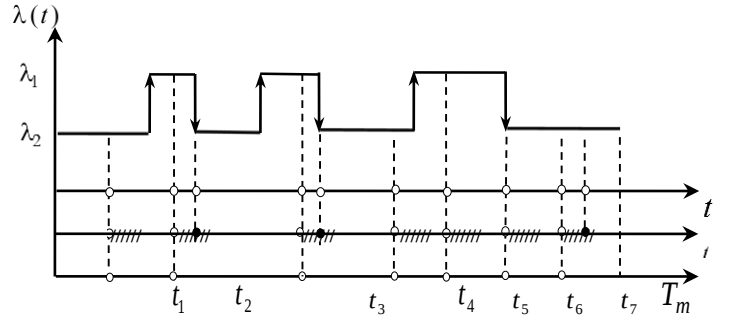
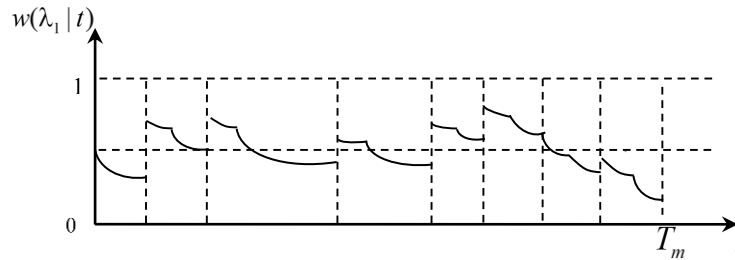
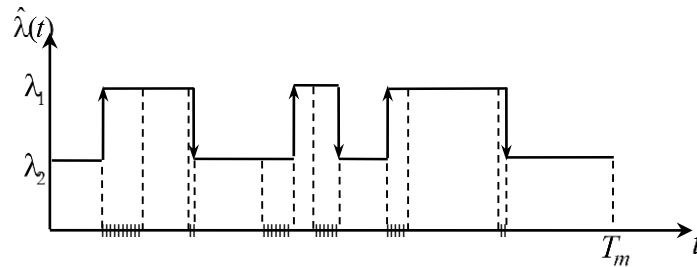
3. Результаты статистических экспериментов

Для получения численных результатов был разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и проведены статистические эксперименты. На первом этапе алгоритма производится имитационное моделирование потока [23] в условиях его неполной наблюдаемости. На втором этапе на основании полученной выборки моментов наступления наблюдаемых событий $t_1, t_2, \dots$ осуществляется вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, а также строятся оценки $\hat{\lambda}(t)$ траекторий истинного процесса $\lambda(t)$.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования; на рис. 3 показана траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$. Расчеты произведены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0,8$, $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,6$; $T = 1$, $T_m = 10$ ед. времени (время моделирования).

Заштрихованные области на оси времени (см. рис. 3) – области принятия ошибочных решений, т.е. это – промежутки времени, на которых оценка $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

На рис. 4 приведена траектория поведения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для данного случая.

Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ Fig. 2. The trajectory of the process $\lambda(t)$ Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ Fig. 3. Trajectory of a posteriori probability $w(\lambda_1 | t)$ Рис. 4. Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ Fig. 4. Trajectory of estimate $\hat{\lambda}(t)$

Для установления частоты принятия ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ проведены статистические эксперименты, осуществляемые по следующему алгоритму: 1) для фиксированного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1), j=1, 2, T$ (ед. времени) моделируется полусинхронный поток событий второго порядка на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ (отдельная i -я реализация (опыт)); 2) осуществляется расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ по формулам (2), (4)–(7); 3) строится оценка $\hat{\lambda}(t)$ траектории истинного процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке $[0, T_m]$; 4) определяется для i -го опыта значение d_i – суммарной протяженности интервалов времени, на которых значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$; 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_i = d_i / T_m$; 6) осуществляется повторение шагов 1–5 N раз ($i = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия ошибочного решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на $[0, T_m]$.

Результатом выполнения данного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N опытах, по которой находятся выборочное среднее полной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{er} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ и выборочная дисперсия $\hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_{er})^2$.

В первом статистическом эксперименте устанавливается зависимость $\hat{P}_{er}, \hat{D}$ от значения длительности мертвого времени $T = 0, 1, \dots, 6$ ед. времени. Результаты приведены в табл. 1–3 при значениях $T_m = 100$ ед. времени, $N = 100$ и параметрах $\lambda_2 = 1, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1, P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,6$. При этом в каждой из последующих таблиц эксперимента значение разности $\lambda_1 - \lambda_2$ увеличивается на 50% по сравнению с предыдущей.

Таблица 1

Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ ($\lambda_1 = 4$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,1581	0,2373	0,2599	0,2761	0,2880	0,2946	0,2989
$\hat{D}$	0,0018	0,0026	0,0030	0,0035	0,0039	0,0041	0,0044

Таблица 2

Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 4,5$ ($\lambda_1 = 5,5$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,1301	0,1915	0,2223	0,2463	0,2585	0,2676	0,2697
$\hat{D}$	0,0015	0,0022	0,0027	0,0033	0,0037	0,0041	0,0042

Таблица 3

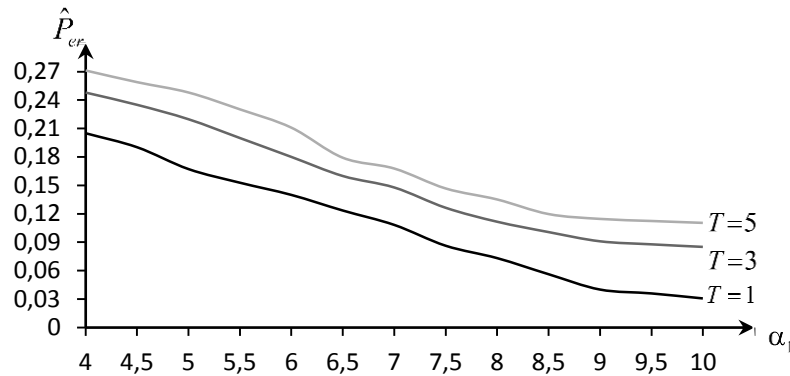
Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 6,75$ ($\lambda_1 = 7,75$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,0929	0,1554	0,1901	0,2157	0,2284	0,2391	0,2412
$\hat{D}$	0,0010	0,0019	0,0022	0,0029	0,0030	0,0035	0,0038

Анализ численных результатов показывает, что при фиксированном значении T оценка $\hat{P}_{er}$ уменьшается с увеличением значения разности $\lambda_1 - \lambda_2$, что является естественным в силу лучшей различимости состояний потока. Заметим, что чем больше значение длительности мертвого времени T , тем меньше темп улучшения качества оценивания при увеличении значения $\lambda_1 - \lambda_2$. При этом при фиксированных параметрах потока с ростом значения T качество оценки состояний ухудшается, так как происходит увеличение потерь информации о потоке (некоторые события теряются). Отметим, что при $T \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$, определяемая теоремой 2, стремится к априорной финальной вероятности π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$, что является понятным в силу того, что периоды наблюдаемости в данном случае практически отсутствуют.

При данных значениях параметров алгоритм оптимального оценивания состояний потока обеспечивает достаточно приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения, причем выборочная дисперсия данной оценки мала.

Во втором статистическом эксперименте при $N = 100, T_m = 100$ ед. времени и параметрах потока $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0,8, \alpha_2 = 0,8, P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0, P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 1$ рассматривается зависимость оценки $\hat{P}_{er}$ от значений параметра $\alpha_1 = 4, \dots, 10$ с шагом 0,5. Результаты данного эксперимента отражены на рис. 5.

Рис. 5. График зависимости $\hat{P}_{er}$ от α_1 при $T=1$, $T=3$, $T=5$ Fig. 5. $\hat{P}_{er}$ as a function of α_1 at $T=1$, $T=3$, $T=5$

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что при данных значениях параметров потока качество оценивания улучшается с ростом значения параметра α_1 (в силу лучшей различимости состояний при больших значениях $\alpha_1 - \alpha_2$) и заметно ухудшается при увеличении значения длительности мертвого времени T (в силу увеличения потерь информации о потоке при больших значениях T).

Заключение

В настоящей работе приведены формулы для расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $w(\lambda_2 | t)$ состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях непродлевающегося мертвого времени. На основании полученных формул разработан алгоритм оптимального оценивания состояний потока (процесса $\lambda(t)$) в произвольный момент времени t на основании выборки моментов наступления событий $t_1, \dots, t_m$ в наблюдаемом потоке, обеспечивающий минимум полной вероятности ошибки вынесения решения. Алгоритм реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. На имитационной модели проведены статистические эксперименты для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$, численные результаты которых не противоречат физической интерпретации и иллюстрируют приемлемую оценку полной вероятности ошибки оценивания и достаточно малую выборочную дисперсию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
10. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.

11. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
12. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка // *Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая*. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2017. Т. 301. С. 97–105.
13. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 141–151.
14. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // *Автоматика и телемеханика*. 2008. № 9. С. 76–93.
15. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1996. V. 50, is. 1. P. 56–63.
16. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1993. V. 48, is. 10. P. 40–45.
17. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
18. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // *Automation and Remote Control*. 2002. V. 63, is. 3. P. 511–515.
19. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 18–25.
20. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
21. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. 504 с.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2019) OPTIMAL STATE ESTIMATION OF SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 73–82

DOI: 10.17223/19988605/46/9

We solve the optimal estimation problem for the states of a semi-synchronous events flow of the second order. We consider the stationary operation mode of the flow in conditions of an unextendable dead time, i.e. after each registered event at the moment t_k , there is a dead time period of fixed duration T , during which other events of the considered flow are inaccessible to observation. At the end of the dead time period, the first event that occurred again creates a period of dead time, etc.

The accompanying random process of the flow is a piecewise constant process $\lambda(t)$ with two states: if $\lambda(t) = \lambda_1$, then there is the first process state, if $\lambda(t) = \lambda_2$, then there is the second one. The process is unobservable in principle, and we can only observe moments $t_1, t_2, \dots$, when events occur in the flow. We have to estimate the state of the process $\lambda(t)$ (flow) at moment t when the observations have stopped by observations $t_1, t_2, \dots$ of the events flow over the time interval (t_0, t) , where t_0 denotes the beginning of observations.

The optimal estimation of states is performed using the maximum method of a posteriori probability. To make the decision regarding the state of the process $\lambda(t)$ at the moment t , we have to determine posterior probabilities $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, that at the moment t the value of the process $\lambda(t) = \lambda_i$ (m is the number of events per time t), wherein $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. The optimal estimation is as follows: if $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, then the estimate of the process state is $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, otherwise $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$.

In the paper we find an explicit form for posterior probabilities on the intervals of the flow observability and unobservability. Based on these formulas, the algorithms have been obtained for calculating the posterior probability $w(\lambda_1 | t)$ ($w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$) and for deciding on the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t . The algorithms were implemented by C# programming language in Visual Studio 2013. Statistical experiments were conducted on the imitational model to establish the frequency of making erroneous decisions about the state of the process $\lambda(t)$, the numerical results of which are given in the paper and illustrate an acceptable estimate of the total probability of making the erroneous decision.

Keywords: semi-synchronous event flow of the second order; unextendable dead time; optimal state estimation; posterior probabilities; maximum method of a posteriori probability.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Operations Research Department of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Master student of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing Systems with Correlated Flows]. Minsk: Belarus State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
10. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
11. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8
12. Nezhelskaya, L.A. & Tumashkina, D.A. (2017) Optimalnoe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytii vtorogo por-yadka [Optimal state estimation of a semi-synchronous event flow of the second order]. In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk state University. pp. 97–105.
13. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
14. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Otsenka parametrov sinkhronnogo dvazhdyy stokhasticheskogo potoka sobytii [Parameter estimation of a synchronous double stochastic flow of events]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 76–93.
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56–63.
16. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.
17. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
18. Vasilieva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
19. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semy-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18–25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
20. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions]. Moscow: Sovetskoe radio.
21. Levin, B.R. (1968) *Teoriticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
22. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoye ischislenie* [The differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.