ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика и механика № 63

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.35 MSC 35L20, 35L72, 35D30
DOI 10.17223/19988621/63/1

О.Л. Бозиев

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Исследуются вопросы существования и единственности слабого решения смешанной задачи для волнового уравнения, содержащего интеграл по пространственной переменной от натуральной степени модуля решения. Для доказательства существования решения используется метод компактности. Компактность приближенных галеркинских решений устанавливается с помощью теорем вложения Соболева. Единственность слабого решения доказывается стандартной процедурой из теории гиперболических уравнений.

Ключевые слова: *нагруженные уравнения в частных производных*, *априорные оценки*, *слабое решение*, *существование и единственность*.

В работе [1] был предложен приближенно-аналитический метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение в частных производных с натуральной степенной нелинейностью. В этом методе для линеаризации обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), ассоциированного с нагруженным, используются априорные оценки решения начально-краевой задачи для нагруженного уравнения. Решение задачи Коши для ОДУ используется для записи приближенного решения нагруженной задачи. Полученное таким образом решение принимается за нулевое приближение, используемое для запуска итерационного процесса нахождения «достаточно точного» приближенного решения нелинейной задачи.

Как показано в [1], для аппроксимации нелинейного уравнения с натуральной степенью p

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0,\ \ a > 1,\ b > 0,$$

которое является одной из разновидностей уравнений, возникающих в релятивистской квантовой механике или при моделировании колебательных процессов [2, с. 44, 66], можно использовать нагруженное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0,\ \ \Omega = [0, l]. \tag{1}$$

В [3, 4] при $p = 2$ и $p = 1$ соответственно показано существование и единственность слабых решений двух различных задач для уравнения вида (1). В настоящей работе существование и единственность слабого решения смешанной задачи для (1) распространяются на случай всех натуральных $p \geq 3$ при однородных начальных и неоднородных краевых условиях.

Итак, в области $Q = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу нахождения функции $u = u(x,t)$, которая является решением уравнения (1) и при $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0,T),\ \psi_1(t)+\psi_2(t) \neq const$, удовлетворяет условиям

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0 \le x \le l\,; \tag{2}$$

$$u(0,t)=\psi_1(t),\ u(l,t)=\psi_2(t),\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

1. Априорные оценки

Априорные оценки 1, 2, 3. В [1] при условии $u(x,t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$ были получены следующие априорные оценки задачи (1) – (3):

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \le C_1(t), \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1(t)}{a^2},\ C_1(0)=0,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$C_1(t) = 2C_0\int_0^t \left(|\psi_{1t}(t)| + |\psi_{2t}(t)|\right)dt,\ C_0 = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}|u_x(l,t)|, \max_{t\in[0,T]}|u_x(0,t)|\right\}.$$

Здесь и всюду ниже равенство вида

$$\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_\Omega |v|^p\,dx$$

выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega), \Omega=[0,l]$.

Кроме того, при дополнительном предположении

$$u \in L_{p-2}(\Omega),\ \ \psi_1(t),\psi_2(t) \in L_{p-1}[0,T]$$

доказано выполнение неравенства

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \le K(t),\ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

в котором

$$K(t) = \frac{F(t)}{2-bF(t)t},\ T < \frac{2}{bF(T)},$$

$$F(t) = \frac{4}{3}p(p-1)t^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^t |C_1(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} C_2(t) + pa^2C_0t\int_0^t\left(\int_0^t |\psi_2(t)|^{p-1}\,dt + \int_0^t |\psi_1(t)|^{p-1}\,dt\right)dt,$$

а $C_2(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \le C_2(t).$$

Априорная оценка 4. Умножим уравнение (1) на $\|u\|_{p,\Omega}^p\,u_t$ и с помощью соотношений, полученных при выводе других оценок, запишем

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|u_t|^2 + a^2|u_x|^2\right)dx + 2b\|u\|_{p,\Omega}^{2p}\|u_t\|_{2,\Omega}^2 =$$
$$= 2a^2\left(u_x(l,t)\partial_t\psi_2(t) - u_x(0,t)\partial_t\psi_1(t)\right).$$

Введем обозначение

$$U(t)=\int\limits_{\Omega}\left(|u_t|^2+a^2|u_x|^2\right)dx=\|u_t\|^2_{2,\Omega}+a^2\|u_x\|^2_{2,\Omega}$$

и перейдем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)\right)+2b\|u\|^{2p}_{p,\Omega}\|u_t\|^2_{2,\Omega}=U(t)\frac{d}{dt}\|u\|^p_{p,\Omega}+2a^2\left(u_x(l,t)\partial_t\psi_2(t)-u_x(0,t)\partial_t\psi_1(t)\right).$$

Интегрируя последнее уравнение по t в границах от 0 до t, получим

$$\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)+2b\int\limits_0^t\|u\|^{2p}_{p,\Omega}\|u_t\|^2_{2,\Omega}dt=\int\limits_0^t U(t)\frac{d}{dt}\|u\|^p_{p,\Omega}dt+C_3(t), \tag{6}$$

$$C_3(t)=2a^2\int\limits_0^t\left(u_x(l,t)\partial_t\psi_2(t)-u_x(0,t)\partial_t\psi_1(t)\right)dt.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое правой части (6) и убедимся в справедливости соотношений

$$\int\limits_0^t U(t)\frac{d}{dt}\|u\|^p_{p,\Omega}dt=\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)\Big|_0^t-\int\limits_0^t\|u\|^p_{p,\Omega}dU(t)\le$$

$$\le\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)-\inf_{t\in(0,T)}\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)\le\|u\|^p_{p,\Omega}U(t).$$

То есть

$$\int\limits_0^t U(t)\frac{d}{dt}\|u\|^p_{p,\Omega}dt\le\|u\|^p_{p,\Omega}U(t).$$

Вернемся к (6) и с учетом полученного запишем

$$2b\int\limits_0^t\|u\|^{2p}_{p,\Omega}\|u_t\|^2_{2,\Omega}dt\le\|u\|^p_{p,\Omega}U(t)+C_3(t).$$

Воспользовавшись неравенством (5), окончательно получим оценку, верную при всех значениях $t\in[0,T]$:

$$\int\limits_0^t\|u\|^{2p}_{p,\Omega}\|u_t\|^2_{2,\Omega}dt\le C_4(t), \tag{7}$$

$$C_4(t)=\left(K(t)U(t)+C_3(t)\right)/2b.$$

Априорная оценка 5. Предположим теперь, что решение задачи (1) – (3) ищется в виде галеркинских приближений

$$u_m=\sum_{j=1}^m g_j(t)w_j(x), \tag{8}$$

где $w_j(x)\in H^1_0(\Omega)$, $j=1,2,\dots$, – полная линейно независимая система, а функции $g_j(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы и определяются из условий

$$\left(\partial_t^2u_m,w_j\right)+a^2\left(\partial_xu_m,\partial_xw_j\right)+b\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}\partial_tu_m,w_j\right)=0,\ 1\le j\le m. \tag{9}$$

При этом для всех m в силу (2) имеем

$$u_m(x,0)=0,\ \partial_t u_m(x,0)=0,\ \ 0\le x\le l. \tag{10}$$

Здесь и ниже для частных производных функций u_m используются обозначения вида

$$\partial_t u_m=\frac{\partial u_m}{\partial t},\ \ \partial_t^2 u_m=\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2},\ \ \partial_{tx}^2 u_m=\frac{\partial^2 u_m}{\partial t\partial x}.$$

Пусть задача (1) – (3) имеет два приближенных решения u_m и u_n. Разность скалярных произведений (1), содержащих эти функции, с $\partial_t u_m$ и $\partial_t u_n$ соответственно при $v=u_m-u_n$ имеет вид

$$(v_{tt},v_t)+a^2(v_x,v_{xt})+b\left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p\,\partial_t u_m-\|u_n\|_{p,\Omega}^p\,\partial_t u_n,v_t\right)=0.$$

От этого уравнения перейдем к следующему:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+b\|u_n\|_{p,\Omega}^p\int_\Omega v_t^2dx+b\left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p-\|u_n\|_{p,\Omega}^p\right)\int_\Omega v_t\partial_t u_m dx=0,$$

после интегрирования которого в границах от 0 до t получаем

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+2b\int_0^t\|u_n\|_{p,\Omega}^p\int_\Omega v_t^2dxdt+2b\int_0^t\left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p-\|u_n\|_{p,\Omega}^p\right)\int_\Omega v_t\partial_t u_m dxdt=0.$$

Для перехода к неравенству опустим второе слагаемое в левой части, а третье перенесем в правую часть и оценим по модулю. Тогда

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx\le 2b\int_0^t\left|\|u_m\|_{p,\Omega}^p-\|u_n\|_{p,\Omega}^p\right|\left|\int_\Omega v_t\partial_t u_m dx\right|dt. \tag{11}$$

Рассмотрим отдельно первый сомножитель под знаком интеграла в правой части (11) и разложим его на множители:

$$\left|\|u_m\|_{p,\Omega}^p-\|u_n\|_{p,\Omega}^p\right|\le\int_\Omega\left||u_m|-|u_n|\right|\cdot\left||u_m|^{p-1}+|u_m|^{p-2}|u_n|+\ldots+|u_m||u_n|^{p-2}+|u_n|^{p-1}\right|dx. \tag{12}$$

Следующее ниже утверждение легко доказать, восстанавливая функцию u^2 по своей производной, применяя неравенства Коши и теорему о среднем значении.

Лемма 1. Для абсолютно непрерывной на $[0,\ l]$ функции u^2 выполняется неравенство

$$u^2\le\frac{l+1}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2+\|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Продолжим его с помощью неравенства Фридрихса, записанного в виде

$$\|u\|_{2,\Omega}^2\le\frac{l^2}{8}\|u_x\|_{2,\Omega}^2, \tag{13}$$

и второй из оценок (4):

$$u^2\le\frac{l^2+l+8}{8}\|u_x\|_{2,\Omega}^2\le\frac{l^2+l+8}{8a^2}C_1(t)=C_5(t).$$

Очевидно, что при всех $q\ge 1$ слагаемые правой части (12) удовлетворяют неравенству

$$|u|^q = \left(|u|^2\right)^{\frac{q}{2}} \le C_5^{\frac{q}{2}},$$

откуда следует, что

$$\left||u_m|^{p-1} + |u_m|^{p-2}|u_n| + ... + |u_m||u_n|^{p-2} + |u_n|^{p-1}\right| \le pC_5^{\frac{p-1}{2}}.$$

Продолжим (12) с учетом данного неравенства, а также вложения $L_2(\Omega)$ в $L_1(\Omega)$ и (13):

$$\left|\|u_m\|_{p,\Omega}^p - \|u_n\|_{p,\Omega}^p\right| \le pC_5^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega |v| dx \le pC_5^{\frac{p-1}{2}} l^{\frac{1}{2}} \|v\|_{2,\Omega} \le \frac{p}{8} C_5^{\frac{p-1}{2}} l^{\frac{3}{2}} \|v_x\|_{2,\Omega}. \qquad (14)$$

Для второго сомножителя под знаком интеграла в правой части (11) применением первой из оценок (4) последовательно получим

$$\left|\int_\Omega v_t \partial_t u_m dx\right| \le \int_\Omega |v_t \partial_t u_m| dx \le \sqrt{\int_\Omega v_t^2 dx} \sqrt{\int_\Omega (\partial_t u_m)^2 dx} \le \sqrt{C_1(t)} \|v_t\|_{2,\Omega}.$$

Вернемся к (11), чтобы с помощью найденных оценок записать

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{bp}{4} \frac{l^2 + l + 8}{8a^2} l^{\frac{3}{2}} \int_0^t C_1^{\frac{p}{2}}(t) \|v_x\|_{2,\Omega} \|v_t\|_{2,\Omega} dt.$$

Продолжим это неравенство, положив $C_6 = bpl^{\frac{3}{2}}(l^2 + l + 8)/32a^2$:

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \le C_6 \int_0^t \left(\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + C_1^p \|v_x\|_{2,\Omega}^2\right) dt.$$

Предполагая, что $C_1^p \le a^2$, окончательно получим

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \le C_6 \int_0^t \left(\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2\right) dt.$$

Применяя к нему лемму Гронуолла [5, с. 10], приходим к соотношению

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|v_x\|_{2,\Omega}^2 \le 0,$$

откуда следует, что

$$\|\partial_t u_m - \partial_t u_n\|_{2,\Omega}^2 = 0, \|\partial_x u_m - \partial_x u_n\|_{2,\Omega}^2 = 0. \qquad (15)$$

2. Существование слабого решения

Определение. Функция $u \in L_\infty(0,T; H^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$, такая, что $u_t \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, называется слабым решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет первому из условий (2) и при всех $w \in H^1(\Omega)$ тождеству

$$(u_t, w) + \int_0^t \left(a^2(u_x, w_x) + b\|u\|_{p,\Omega}^p (u_t, w)\right) dt = 0.$$

Приведем некоторые утверждения, необходимые для доказательства существования решения поставленной задачи.

Лемма 2. Пусть функции u и u_t принадлежат пространствам функций из приведенного определения. Тогда в пространствах $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и $L_\infty(0,T;H^1(\Omega))$ соответственно имеет место сильная сходимость

$$\partial_t u_m \to u_t,\, u_m \to u. \tag{16}$$

Доказательство. Из (15) следует фундаментальность последовательностей $\partial_t u_m$ и u_m, значит (16) выполняется.

Лемма 3. Пусть последовательность u_m сходится сильно к функции u в пространстве $L_p(Q)$. Тогда в пространстве $L_2(Q)$ имеет место сильная сходимость

$$\|u_m\|_{p,\Omega}^p \to \|u\|_{p,\Omega}^p.$$

Доказательство. Воспользуемся (14), (15) и (16):

$$\int_0^t \int_\Omega \left| \|u_m\|_{p,\Omega}^p - \|u_n\|_{p,\Omega}^p \right|^2 dxdt \le \frac{p}{8} l^{\frac{3}{2}} \int_0^t C_3^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_\Omega |\partial_x u_m - u_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{p}{8} l^{\frac{3}{2}} \int_0^t C_3^{\frac{p-1}{2}} \left(\|\partial_x u_m - u_x\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \to 0.$$

Утверждение леммы следует отсюда при $m \to \infty$.

Лемма 4 [6, с. 25]. Пусть Q – ограниченная область в R^n, φ_μ и φ такие ограниченные функции из $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, что $\|\varphi_\mu\|_{p,\Omega} \le C$, $\varphi_\mu \to \varphi$ почти всюду в Q. Тогда $\varphi_\mu \to \varphi$ слабо в $L_p(Q)$.

Перейдем к доказательству существования обобщенного решения задачи (1) – (3).

Теорема 1. При $C_1^p \le a^2$ существует функция u, являющаяся обобщенным решением задачи (1) – (3).

Доказательство. Применим метод Галеркина, для чего умножим (9) на $\partial_t g_j(t)$ для всех j и просуммируем полученные уравнения:

$$\left(\partial_t^2 u_m, \partial_t u_m\right) + a^2 \left(\partial_x u_m, \partial_{tx}^2 u_{mt}\right) + b\left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p \, \partial_t u_m, \partial_t u_m\right) = 0. \tag{17}$$

Соотношение (17), рассмотренное вместе с (10), является задачей Коши для системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций $g_j(t)$, которая, как известно, имеет единственное абсолютно непрерывное решение.

Соответствующие задаче (17), (10) оценки (4) примут вид

$$\|\partial_t u_m\|_{2,\Omega}^2 \le C_1(t),\ \|\partial_x u_m\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1(t)}{a^2},\ C_1(0) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{18}$$

Отсюда следует, что в пространствах $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и $L_\infty(0,T;H^1(\Omega))$ соответственно имеет место слабая сходимость подпоследовательностей $\partial_t u_\mu$ и u_μ:

$$\partial_t u_\mu \to u_t,\ u_\mu \to u. \tag{19}$$

В свою очередь, из свойств компактности вложения $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$ следует, что

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду.} \tag{20}$$

Умножим теперь (9) на $\|u_m\|_{p,\Omega}^p g_j'(t)$, $j=1, \ldots, m$, и просуммируем по j. Для полученного уравнения запишем априорную оценку (7) в виде

$$\int_0^t \left(\|u_m\|_{p,\Omega}^p \|\partial_t u_m\|_{2,\Omega}\right)^2 dt \le C_6(t),$$

откуда следует, что в пространстве $L_2(Q)$ имеет место слабая сходимость

$$\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu \to \chi. \tag{21}$$

Вернемся к (17) и перейдем в этом равенстве к пределу при $m = \mu$. Из (19), (20) и (21) следует выполнение в пространстве $L_\infty(0,T)$ слабой сходимости

$$\left(\partial_t u_\mu, w_j\right) \to (u_t, w_j),\ \left(\partial_x u_\mu, \partial_x w_j\right) \to (u_x, \partial_x w_j),\ \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu, w_j\right) \to (\chi, w_j).$$

Для того чтобы функция u была обобщенным решением задачи (1) – (3), требуется выполнение равенства $\chi = \|u\|_{p,\Omega}^p u_t$. Его справедливость следует из леммы 4, для применения которой необходимо, чтобы

$$\chi_\mu = \|u_\mu\|_{p,\Omega}^p \partial_t u_\mu \to \|u\|_{p,\Omega}^p u_t = \chi.$$

Указанная сходимость устанавливается с помощью лемм 2 и 3, а также первого неравенства (18). Следовательно, функция u удовлетворяет уравнению

$$(u_t, w) + \int_0^t \left((u_x, w_x) + \|u\|_{p,\Omega}^p (u_t, w)\right) dt = 0$$

для всех j, то есть является обобщенным решением задачи (1) – (3).

Убедимся в выполнении начальных условий. Обратимся к первому из них. Согласно (19), (20) и (4) следует слабая сходимость $u_\mu(x,0) \to u(x,0)$ в $H^1(Q)$, а из (16) имеем $u_\mu \to 0$ в $H^1(Q)$, тогда $u(x,0) = 0$. Аналогично, (20) и (18) означают слабую сходимость $\partial_t u_\mu(x,0) \to u_t(x,0)$ в $L_2(Q)$ и $\partial_t u_\mu(x,0) \to 0$. Следовательно, $u_t(x,0) = 0$.

3. Единственность слабого решения

Теорема 2. Слабое решение задачи (1) – (3) единственно.

Доказательство. Воспользуемся процедурой, применяемой в теории линейных и нелинейных гиперболических уравнений [6, с.28]. Предположим, что задача (1) – (3) имеет два решения – u_1 и u_2. Записывая для каждого из них уравнение (1), для их разности, где $v = u_1 - u_2$, получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + b\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t} - \|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}\right) = 0\,; \tag{21}$$

$$v(x,0) = 0, v_t(x,0) = 0. \tag{22}$$

Будем искать решение задачи (21), (22) – функцию

$$v \in L_\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right),\ v_t \in L_\infty\left(0,T; L_2(\Omega)\right).$$

Для этого от (21) перейдем к уравнению

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + b\|u_1\|_{p,\Omega}^p (u_{1t} - u_{2t}) + b u_{2t}\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p - \|u_2\|_{p,\Omega}^p\right) = 0,$$

умножая которое скалярно на v_t найдём

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+b\|u_1\|_{p,\Omega}^p\int\limits_{\Omega}v_t^2dx+b\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p-\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int\limits_{\Omega}v_tu_{2t}dx=0.$$

После его интегрирования в границах от 0 до t получим

$$\int\limits_{\Omega}\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+2b\int\limits_0^t\|u_1\|_{p,\Omega}^p\int\limits_{\Omega}v_t^2dxdt+2b\int\limits_0^t\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p-\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int\limits_{\Omega}v_tu_{2t}dxdt=0.$$

Далее повторяем все рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2. После применения леммы Гронуолла в итоге получаем, что

$$\int\limits_{\Omega}\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx\le 0,$$

то есть

$$\int\limits_{\Omega}\left((u_{1t}-u_{2t})^2+a^2(u_{1x}-u_{2x})^2\right)dx = 0.$$

Покажем, что $u_1=u_2$. Для этого при $s\in(0,T)$ положим

$$w(x,t)=\begin{cases}-\int\limits_t^s v(x,\sigma)d\sigma,\ t\le s,\\ 0,\ t>s.\end{cases}$$

Пусть, кроме того,

$$v_1(x,t)=\int\limits_0^t v(x,\sigma)d\sigma,$$

откуда следует, что $w(x,t)=v_1(x,t)-v_1(x,s)$ при $t\le s$.

Рассмотрим скалярное произведение обеих частей (21) с $w(x,t)$:

$$(v_{tt},w)-a^2(v_{xx},w)=b\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right),$$

от которого перейдем к равенству

$$\frac{d}{dt}(v_t,w)-(v_t,w_t)+a^2(v_x,w_x)=b\left(\|u_2\|_{1,\Omega}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\|u_1\|_{1,\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial t},w\right).$$

Его интегрирование по t с учетом того, что $w(x,t)=0$ при $t>s$, дает

$$-\int\limits_0^s(v_t,w_t)dt-a^2\int\limits_0^s(v_x,w_x)dt=b\int\limits_0^s\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)dt,$$

а так как $w_t=v$, $w(x,0)=-v_1(x,s)$, то

$$-\frac{1}{2}\left(\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\right)=b\int\limits_0^s\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)dt.$$

Оценивая правую часть по абсолютной величине, перейдем к неравенству

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\le 2b\int\limits_0^s\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)\right|dt.$$

Обратимся к подынтегральному выражению в правой части, для которого имеем

$$\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w\right)\right| \le \sup\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p, \|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l |v||w|\,dx \le$$

$$\le \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p + \|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l |v||v_1(x,t) - v_1(x,s)|\,dx \le$$

$$\le \left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p + \|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l |v||v_1(x,t) + v_1(x,s)|\,dx.$$

Усилим последнее неравенство, оценивая слагаемые в первом сомножителе с помощью (5), а ко второму сомножителю применяя неравенства Гельдера и Фридрихса:

$$\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t} - \|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}, w\right)\right| \le 2C_2\|v\|_{2,\Omega}\|v_1(x,t) + v_1(x,s)\|_{2,\Omega} \le$$

$$\le \frac{lC_1(t)}{8a^2}\left(\|v\|_{2,\Omega}^2 + a^2\|v_{1x}\|_{2,\Omega}^2\right).$$

Отсюда следует, что

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{lbC_1(t)}{4a^2}\int_0^s\left(\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\right)dt.$$

Неравенство Гронуолла, примененное к последнему, приводит к равенству

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2 = 0,$$

откуда следует нужный нам результат:

$$v(x,s) = u_1(x,s) - u_2(x,s) = 0,$$

а именно – единственность слабого решения исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бозиев О.Л.* Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.
2. *Lions J.-L.*, *Strauss W.* Some non-linear evolution equation.// Bulletin de la S. M. F. 1965. V. 93. P. 43–96.
3. *Medeiros L.A.* On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. V. 53. No. 1. P. 13–15.
4. Бозиев О.Л. О слабых решениях одного гиперболического уравнения // Сообщения Академии наук Грузинской ССР. 1987. Т. 128. № 3. С. 485–488.
5. *Филатов А.Н.*, *Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 151 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.

Статья поступила 02.08.2019 г.

Boziev O.L. (2020) ON WEAK SOLUTIONS OF A LOADED HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENEOUS INITIAL CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/63/1

Keywords: loaded partial differential equations, a priori estimates, weak solution, existence and uniqueness.

A mixed problem with homogeneous initial conditions for the loaded wave equation is considered. It contains an integral over the spatial variable from the natural degree of the solution module. The definition of the weak solution of this problem is introduced, for which the questions of existence and uniqueness are investigated. The compactness method is used to prove the existence of the solution. Its idea is that in proving the convergence of an approximate solution constructed by the Galerkin method, completely continuous embeddings of Sobolev spaces are essentially used. Based on a priori estimates partially established in the previous works of the author, other estimates are established in the proposed article. Following this, approximate Galerkin solutions are constructed. The existence of approximate solutions is proved by the existence theorem for ordinary differential equations. After that, a passage to the limit is performed. The main difficulty of applying the method is in proving the compactness of a family of approximate solutions. For this purpose, theorems on the compactness of embedding Sobolev spaces of a given order in Sobolev spaces of a smaller order are used. The uniqueness of the weak solution is proved by a standard procedure from the theory of hyperbolic equations.

AMS Mathematical Subject Classification: 35L20, 35L72, 35D30.

Oleg L. BOZIEV (Candidate of Physics and Mathematics, associate professor of Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences., Nalchik, Russian Federation). E-mail: boziev@yandex.ru

REFERENCES

1. Boziev O.L. (2018) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of a nonlinear hyperbolic equation by an approximate analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 5–14 DOI: 10.17223/19988621/51/1.
2. Lions J.-L., Strauss W. (1965) Some non-linear evolution equation. *Bulletin de la S. M. F.* 93. pp. 43–96.
3. Medeiros L. A. (1981) On the weak solutions of nonlinear partial differential equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*. 53(1). pp. 13–15.
4. Boziev O.L. (1987) O slabykh resheniyakh odnogo giperbolicheskogo uravneniya [On week solutions of one hyperbolic equation]. *Soobshcheniya Akademii Nauk Gruzinskoy SSR – Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR*. 128(3). pp. 485–488.
5. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy.* [Integral inequalities and theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 151 p.
6. Lions J.-L. (1969) *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris: Dunod Gauthier-Villars.

Received: August 2, 2019