ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Математика и механика № 63

УДК. 515.12, 519.21 MSC: 54B30, 60B05

DOI 10.17223/19988621/63/2

А.В. Иванов

О ФУНКТОРЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И РАЗМЕРНОСТЯХ КВАНТОВАНИЯ[1]

Размерности квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, совпадают с размерностями финитной аппроксимации для функтора вероятностных мер. Установлены некоторые функториальные свойства размерностей квантования. Показано, что для любого $b > 0$ существует метрический компакт X_b емкостной размерности $\dim_{\mathrm{B}} X_b = b$, на котором имеются вероятностные меры с носителем равным X, размерность квантования которых принимает все возможные значения из отрезка $[0,b]$.

Ключевые слова: *размерность квантования*, *функтор вероятностных мер*, *метрика Канторовича – Рубинштейна*, *размерность финитной аппроксимации.*

Размерность финитной аппроксимации в пространствах вида $F(X)$ определена в [1][2]. Пусть F – полунормальный метризуемый функтор, (X,ρ) – метрический компакт и ρ_F – функториальное продолжение метрики ρ на $F(X)$. Через $F_n(X)$, $n \in N$, обозначим подпространство $F(X)$, состоящее из точек ξ, носитель которых supp(ξ) содержит не более *n* элементов. Известно, что объединение подпространств $F_n(X)$, $n \in N$, всюду плотно в $F(X)$. Для каждого $\xi \in F(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ положим $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon) = \min\{n : \rho_F(\xi, F_n(X)) \le \varepsilon\}$. Для точки ξ с бесконечным носителем число $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует величина

$$\dim_F(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \mathrm{N}(\xi,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

которую мы называем размерностью финитной аппроксимации ξ (если указанный предел не существует, рассматриваются верхний или нижний пределы, и мы получаем соответственно верхнюю $\overline{\dim}_F(\xi)$ или нижнюю $\underline{\dim}_F(\xi)$ размерности финитной аппроксимации ξ).

Если в качестве F взять функтор экспоненты exp с метрикой Хаусдорфа, размерность финитной аппроксимации $\dim_F(A)$ для любого $A \in \exp(X)$ совпадает с

[1] Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

[2] В [1] эта размерность названа «метрическим порядком». Такая терминология была заимствована из работы Л.С.Понтрягина и Л.Г.Шнирельмана [5], где данное понятие было впервые рассмотрено для функтора экспоненты exp. Однако в современных исследованиях в подобных случаях устойчиво используется термин «размерность».

емкостной размерностью $\dim_{\mathrm{B}}(A)$, которая широко исследована и находит приложения в теории динамических систем (см. [2]). Размерность финитной аппроксимации для функтора суперрасширения λ была рассмотрена в [3].

В настоящей работе рассматривается функтор вероятностных мер P с метрикой Канторовича – Рубинштейна. Оказывается, что в этом случае размерность финитной аппроксимации $\dim_{\mathrm{P}}(\mu)$ совпадает с размерностью квантования $D(\mu)$ меры $\mu \in \mathrm{P}(X)$. Теория размерностей квантования мотивирована задачами теории вероятностей и построена в терминах этой теории (см. [4]) для вероятностных мер, определенных в R^n (в том числе и мер с компактным носителем), где метрика задается с помощью нормы (при этом размерность $D(\mu)$ не зависит от выбора нормы). Предложенный общий подход распространяет понятие размерности квантования на вероятностные меры, заданные на произвольном метрическом компакте (X,ρ). В этом случае размерность $D(\mu)$ меры $\mu \in \mathrm{P}(X)$ зависит от выбора совместимой с топологией метрики ρ на X и может варьироваться в широких пределах. Показано, что ряд утверждений теории квантования, известных для мер в R^n, остается верным и в общем случае. При этом доказательства этих утверждений, проведенные в терминах метрики и топологии, оказываются более компактными.

Для функтора P справедливо неравенство $\dim_{\mathrm{P}}(\mu) = D(\mu) \le \dim_{\mathrm{B}} \operatorname{supp}(\mu)$, связывающее размерность квантования меры μ с емкостной размерностью ее носителя, аналог которого выполняется также для суперрасширения и экспоненты (тривиально). С этим неравенством связан вопрос о промежуточных значениях размерности квантования: верно ли, что для любого метрического компакта (X,ρ) и любого числа a, удовлетворяющего неравенствам $0 \le a \le \dim_{\mathrm{B}} X$, существует мера $\mu_a \in \mathrm{P}(X)$, такая, что $\mathrm{D}(\mu_a) = a$ и $\operatorname{supp}(\mu_a) = X$? Для суперрасширения аналогичный вопрос решен положительно [3], для вероятностных мер в общем виде он остается открытым. При этом показано (теорема 1), что для любого $b > 0$ существует метрический компакт X_b размерности $\dim_{\mathrm{B}} X_b = b$, на котором имеются вероятностные меры с носителем равным X, размерность квантования которых принимает все возможные значения из отрезка $[0,b]$.

Автор выражает благодарность профессору А.М. Зубкову, который обратил его внимание на исследования в области квантования вероятностных мер.

Предварительные сведения

Через F мы будем обозначать полунормальный функтор, действующий из категории *Comp* компактов и непрерывных отображений в ту же категорию (см. [6]). Для любого полунормального функтора F и любого компакта X имеет место естественное вложение $X \subset F(X)$, и для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ пространство $F(A)$ естественно вкладывается в $F(X)$. Для точки $\xi \in F(X)$ ее *носитель* $\operatorname{supp}(\xi)$ есть минимальное (по включению) замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in F(A)$. Для каждого $n \in N$ определено замкнутое подпространство $F_n(X) = \{\xi \in F(X) : |\operatorname{supp}(\xi)| \le n\} \subset F(X)$. Известно, что для любого полунормального функтора F и любого компакта X множество $\bigcup_{n\in N} F_n(X)$ всюду плотно в $F(X)$ (см. [7]).

Функтор F называется *метризуемым* [8], если для любого метрического компакта (X,ρ) на $F(X)$ определена совместимая с топологией метрика ρ_F так, что выполняются следующие условия:

1) для любого изометрического вложения $i:(X_1,\rho_1)\to(X_2,\rho_2)$ отображение $F(i):(F(X_1),(\rho_1)_F)\to(F(X_2),(\rho_2)_F)$ также является изометрическим вложением;

2) естественное вложение $(X,\rho)\to(F(X),\rho_F)$ является изометрией;

3) $\operatorname{diam}(F(X))=\operatorname{diam}(X)$.

Точки с конечными носителями можно считать «простыми» точками $F(X)$ и число элементов в носителе простой точки трактовать как ее «степень сложности»: чем больше элементов, тем «сложнее» точка. Пусть $\xi\in F(X)$ и $\varepsilon>0$. Очевидно, что наименьшая «степень сложности» ε-приближения[3] ξ определяется по формуле

$$\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)=\min\{n:\rho_F(\xi,F_n(X))\le\varepsilon\}.$$

Если точка ξ не является простой, то в силу замкнутости множеств $F_n(X)$ число $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon\to0$. Скорость этого возрастания характеризуют верхняя и нижняя размерности финитной аппроксимации ξ:

$$\overline{\dim}_F(\xi)=\inf\{\alpha:\overline{\lim}_{\varepsilon\to0}\varepsilon^\alpha\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)=0\}=\sup\{\alpha:\overline{\lim}_{\varepsilon\to0}\varepsilon^\alpha\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)=\infty\},$$

$$\underline{\dim}_F(\xi)=\inf\{\alpha:\underline{\lim}_{\varepsilon\to0}\varepsilon^\alpha\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)=0\}=\sup\{\alpha:\underline{\lim}_{\varepsilon\to0}\varepsilon^\alpha\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)=\infty\}.$$

Очевидно, что $0\le\underline{\dim}_F(\xi)\le\overline{\dim}_F(\xi)\le\infty$. В случае выполнения равенства $\underline{\dim}_F(\xi)=\overline{\dim}_F(\xi)$ для размерностей финитной аппроксимации используется обозначение $\dim_F(\xi)$. В [1] показано, что имеют место следующие равенства:

$$\overline{\dim}_F(\xi)=\overline{\lim}_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)}{-\ln\varepsilon},\qquad \underline{\dim}_F(\xi)=\underline{\lim}_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}.$$

Справедливо также

Предложение 1 [1]. Пусть монотонно убывающая последовательность ε_n такова, что $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, и существует число $c>0$, такое, что для любого n выполняется неравенство $\varepsilon_{n+1}\ge c\varepsilon_n$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mathrm{N}(\xi,\varepsilon_n)}{-\ln\varepsilon_n}=\overline{\dim}_F(\xi),\qquad \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mathrm{N}(\xi,\varepsilon_n)}{-\ln\varepsilon_n}=\underline{\dim}_F(\xi).$$

В ряде случаев требуется указывать компакт X, для которого определяются введенные выше понятия. Тогда для $\xi\in F(X)$ мы будем использовать обозначения $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon,X)$ и $\dim_F(\xi,X)$ соответственно.

Определение 1 [3]. Размерности финитной аппроксимации для функтора F *сохраняются при переходе к подпространству*, если для любого компакта X,

[3] Точка η называется ε-приближением ξ, если $\rho_F(\xi,\eta)\le\varepsilon$.

любого его замкнутого подмножества A и любой точки $\xi \in F(A)$ выполняются равенства

$$\overline{\dim}_F(\xi,A) = \overline{\dim}_F(\xi,X), \quad \underline{\dim}_F(\xi,A) = \underline{\dim}_F(\xi,X).$$

Аппроксимационным спектром точки $\xi \in F(X)$ мы будем называть множество $as(\xi) = \{N(\xi,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Спектр $as(\xi)$ всегда содержит единицу и является бесконечным множеством, если бесконечен носитель ξ.

Рассмотрим в качестве F функтор экспоненты $\exp$ (напомним, что $\exp(X)$ – пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X с топологией Вьеториса), метризованный метрикой Хаусдорфа ρ_H. Тогда для любого $A \in \exp(X)$ и $\varepsilon > 0$ число $N(A,\varepsilon)$ есть наименьшее количество ε-шаров[4], покрывающих A. Таким образом, размерности финитной аппроксимации для функтора $\exp$ совпадают соответственно с верхней $\overline{\dim}_B A$ и нижней $\underline{\dim}_B A$ емкостными размерностями множества A (см. [2]). Нетрудно показать, что емкостные размерности сохраняются при переходе к подпространству.

Пример. Аппроксимационные спектры подмножеств отрезка. Легко проверить, что для функтора $\exp$ и стандартного канторовского совершенного множества $\Pi \in \exp I$, где I – отрезок $[0,1]$, имеет место равенство $as(\Pi) = \{2^{n-1} : n \in N\}$. При этом $as(I) = N$.

Пусть X – компакт и $P(X)$ – пространство вероятностных мер на X со слабой топологией. Для $\mu \in P(X)$ и непрерывной функции $g : X \to R$ через $\mu(g)$ обозначается $\int_X g d\mu$. Для всякого непрерывного отображения компактов $f : X \to Y$ определено отображение $P(f) : P(X) \to P(Y)$, действующее по формуле $P(f)(\mu)(A) = \mu(f^{-1}A)$, где $\mu \in P(X)$ и A – борелевское подмножество Y. Известно, что P – нормальный функтор в категории *Comp* (см. [7]). Функтор P метризуем метрикой Канторовича – Рубинштейна ρ_P (см. [8]), которая определяется следующим образом:

$$\rho_P(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\int_{X^2} \rho(x_1,x_2)d\eta : \eta \in P(\pi_1)^{-1}(\mu_1) \cap P(\pi_2)^{-1}(\mu_2)\},$$

где π_i, $i = 1,2$, – проекции X^2 на 1-й и 2-й сомножители соответственно. Известно [9], что

$$\rho_P(\mu_1,\mu_2) = \sup\{|\mu_1(f) - \mu_1(f)| : f \in Lip_1(X)\},$$

где $Lip_1(X)$ – множество нерастягивающих отображений метрического компакта (X,ρ) в R^1:

$$f \in Lip_1(X) \leftrightarrow \forall x,y \in X \quad |f(x) - f(y)| \le \rho(x,y).$$

---

[4] ε-шаром с центром в точке x в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество $B(x,\varepsilon) = \{y : \rho(x,y) \le \varepsilon\}$.

Свойства размерностей квантования

Предложение 2. Пусть (X,ρ) – метрический компакт, A – конечное подмножество X и $\mu \in \mathrm{P}(X)$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}(A)) = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu.$$

Доказательство. Пусть $A = \{a_1,...,a_n\}$. Положим

$$C_i = \{x \in X : \rho(x,a_i) = \rho(x,A)\} \text{ и } D_i = C_i \setminus \bigcup\nolimits_{j<i} C_j, \ \ i = 1,...,n.$$

Легко проверить, что семейство является разбиением X на борелевские множества. По построению для каждого $x \in D_i$ выполняется равенство $\rho(x,a_i) = \rho(x,A)$. Пусть $\nu = \sum\nolimits_i \mu(D_i)\delta_{a_i} \in \mathrm{P}(A)$. Рассмотрим множество $D = \bigcup\nolimits_i (D_i \times \{a_i\}) \subset X^2$. Для любого борелевского множества $A \subset X^2$ положим $\eta\,(A) = \mu(\pi_1(A \cap D))$. Поскольку $\pi_1(D) = X$ и π_1 взаимно однозначно на D, η является вероятностной мерой на X^2 и $\eta\,(D) = 1$. При этом $\mathrm{P}(\pi_1)(\eta) = \mu$, $\mathrm{P}(\pi_2)(\eta) = \nu$. Следовательно,

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\nu) \le \int\limits_{X^2} \rho(x_1,x_2)d\eta = \sum\nolimits_i \int\limits_{D_i \times \{a_i\}} \rho(x_1,a_i)d\eta = \sum\nolimits_i \int\limits_{D_i} \rho(x,A)d\mu = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu. \quad (1)$$

С другой стороны, для каждой меры $\kappa \in \mathrm{P}(A)$ имеем

$$\kappa(\rho(x,A)) = \int\limits_A \rho(x,A)d\kappa = 0,$$

поскольку $\rho(x,A) = 0$ при $x \in A$. При этом $\rho(x,A) \in Lip_1(X)$, следовательно,

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\kappa) \ge |\,\mu(\rho(x,A)) - \kappa(\rho(x,A))\,| = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение предложения.

Предложение 3. Аппроксимационный спектр $\mathrm{as}(\mu)$ любой вероятностной меры μ с бесконечным носителем равен N.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $n \in N$ выполняется неравенство $\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}_{n+1}(X)) < \rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}_n(X))$.

Пусть мера $\nu \in \mathrm{P}_n(X)$ такова, что $\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\nu) = \rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}_n(X))$, и пусть $\mathrm{supp}\,(\nu) = A$, $|A| \le n$. Выберем точку $y \in \mathrm{supp}(\mu) \setminus A$ и положим $A' = A \cup \{y\}$. Покажем, что

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}_n(X)) = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu > \int\limits_X \rho(x,A')d\mu = \rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}_{n+1}(A')). \quad (3)$$

Утверждение предложения тем самым будет доказано.

Пусть $a = \rho(y,A)$. Рассмотрим множество $U = \{z \in X : \rho(y,z) < a/3\}$. Поскольку U – окрестность точки $y \in \mathrm{supp}(\mu)$, $\mu(U) > 0$. Для любой точки $x \in U$ $\rho(x,A) \ge \frac{2}{3}a$ и $\rho(x,A') \le \frac{1}{3}a$.

Следовательно, $\int_U \rho(x,A)d\mu > \int_U \rho(x,A')d\mu$. При этом всегда $\rho(x,A) \ge \rho(x,A')$. Поэтому $\int_{X\setminus U} \rho(x,A)d\mu \ge \int_{X\setminus U} \rho(x,A')d\mu$, откуда следует неравенство (3).

Для вероятностных мер, заданных на R^n (метрика в R^n при этом порождается нормой), широко исследованы верхняя и нижняя размерности квантования $\overline{D}$ и $\underline{D}$, которые не зависят от выбора нормы (см. [4]). Эти размерности могут быть определены и для мер $\mu \in \mathrm{P}(X)$, заданных на произвольном метрическом компакте (X,ρ):

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln \rho_{\mathrm{P}}(\mu, \mathrm{P}_n(X))}, \quad \underline{D}(\mu) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln \rho_{\mathrm{P}}(\mu, \mathrm{P}_n(X))}. \qquad (4)$$

У выражений (4) есть недостаток: они не работают для мер с конечным носителем (выражение под знаком логарифма в знаменателе обращается в ноль). При этом имеет место

Предложение 4. Для всякой меры $\mu \in \mathrm{P}(X)$ с бесконечным носителем, заданной на метрическом компакте (X,ρ), размерности квантования совпадают с размерностями финитной аппроксимации:

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(\mu), \quad \underline{D}(\mu) = \underline{\dim}_{\mathrm{P}}(\mu).$$

Доказательство. Положим $\rho_{\mathrm{P}}(\mu, \mathrm{P}_n(X)) = \varepsilon_n$. В силу равенства $\mathrm{as}(\mu) = N$ последовательность ε_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. При $\delta \in [\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$ $\mathrm{N}(\mu,\delta) = n$.

Следовательно,

$$\frac{\ln n}{-\ln \varepsilon_n} \le \frac{\ln \mathrm{N}(\mu,\delta)}{-\ln \delta} < \frac{\ln n}{-\ln \varepsilon_{n-1}}, \qquad (5)$$

при $\delta \in [\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$. Переходя в неравенствах (5) к верхнему и нижнему пределам при $n \to \infty$ и $\delta \to 0$, получаем искомые равенства.

Предложение 5. Размерность квантования сохраняется при переходе к подпространству. Для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ и любой меры $\mu \in \mathrm{P}(A)$ выполняются равенства

$$\overline{D}(\mu, A) = \overline{D}(\mu, X), \quad \underline{D}(\mu, A) = \underline{D}(\mu, X).$$

Доказательство. Пусть $n = \mathrm{N}(\mu, \varepsilon, X)$. Существует мера с конечным носителем $\mu_1 = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i} \in \mathrm{P}_n(X)$, такая, что $\rho_{\mathrm{P}}(\mu, \mu_1) \le \varepsilon$. Для каждой точки x_i из носителя меры μ_1 выберем точку $y_i \in A$ так, что $\rho(x_i, y_i) = \rho(x_i, A)$, и рассмотрим меру $\mu_2 = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{y_i} \in \mathrm{P}_n(A)$. Функция $g(x) = \rho(x, A)$ принадлежит $Lip_1(X)$. Кроме того, $\mu(g) = 0$, поскольку $\mathrm{supp}\,(\mu) \subset A$ и $g(x) = 0$ при $x \in A$. Возьмем произвольную функцию $f \in Lip_1(X)$. Имеем

$$|\mu_1(f) - \mu_2(f)| = |\sum a_i (f(x_i) - f(y_i))| \le \sum a_i |(f(x_i) - f(y_i)| \le$$

$$\le \sum a_i \rho(x_i, y_i) = \sum a_i \rho(x_i, A) = |\mu_1(g) - \mu_2(g)| \le \rho_{\mathrm{P}}(\mu_1, \mu) \le \varepsilon.$$

Следовательно, $\rho_P(\mu_1,\mu_2) \le \varepsilon$ и, значит, $\rho_P(\mu,\mu_2) \le 2\varepsilon$. Таким образом, мера μ_2 является 2ε-приближением μ. Следовательно, $N(\mu,2\varepsilon,A) \le N(\mu,\varepsilon,X)$. Кроме того, очевидно, что $N(\mu,\varepsilon,X) \le N(\mu,\varepsilon,A)$. Из этих двух неравенств следует утверждение предложения.

Предложение 6. Для любой меры $\mu \in P(X)$ $\underline{D}(\mu) \le \underline{\dim}_B \mathrm{supp}\,(\mu)$, $\overline{D}(\mu) \le \overline{\dim}_B \mathrm{supp}(\mu)$.

Доказательство. Поскольку размерности квантования и емкостные размерности сохраняются при переходе к подпространству, без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{supp}\,(\mu) = X$. Пусть $N(X,\varepsilon)$ – наименьшее число ε-шаров, покрывающих X, и A – подмножество X мощности $N(X,\varepsilon)$, для которого $\rho(x,A) \le \varepsilon$ для любого $x \in X$. Тогда $\rho_P(\mu,P(A)) = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu \le \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ $N(\mu,\varepsilon) \le N(X,\varepsilon)$, откуда следует утверждение предложения.

Пусть $\mu \in P(X)$ и $\varepsilon > 0$. Меру $\nu \in P(X)$ будем называть *оптимальным* ε-*приближением* μ, если $|\mathrm{supp}\,(\nu)| = N(\mu,\varepsilon)$ и $\rho_P(\mu,\nu) = \rho_P(\mu,P_{N(\mu,\varepsilon)}(X))$. Будем говорить, что конечное множество $A \subset X$ является n-оптимальным для меры $\mu \in P(X)$, если $|A| = n$ и $\rho_P(\mu,P_n(X)) = \rho_P(\mu,P(A))$.

Предложение 7. Пусть $\mu_i \in P(X)$, $i = 1,\dots,k$, – конечный набор мер и для каждого i определена размерность $D(\mu_i)$. Тогда для любой вероятностной меры вида $\mu = \sum_i p_i\mu_i$, где $p_i > 0$ и $\sum_i p_i = 1$, справедливо равенство $D(\mu) = \max_i D(\mu_i)$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть ν_i – оптимальные ε-приближения мер μ_i соответственно ($i = 1,\dots,k$). Тогда мера $\nu = \sum_i p_i\nu_i$ является ε-приближением меры μ. При этом $\mathrm{supp}\,(\nu) = \bigcup_i \mathrm{supp}\,(\nu_i)$. Следовательно,

$$N(\mu,\varepsilon) \le \sum_i N(\mu_i,\varepsilon). \tag{6}$$

Пусть j таково, что $D(\mu_j) = \max_i D(\mu_i)$ и ν' – оптимальное $p_j\varepsilon$-приближение меры μ. Пусть $\mathrm{supp}\,(\nu') = A$, тогда $|A| = N(\mu,p_j\varepsilon)$. Имеем: $p_j\varepsilon \ge \rho_P(\mu,\nu') = \rho_P(\mu,P(A)) = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu = \sum_i p_i \int\limits_X \rho(x,A)d\mu_i$. Отсюда следует, что $\rho_P(\mu_j,P(A)) = \int\limits_X \rho(x,A)d\mu_j \le \varepsilon$. Таким образом, $N(\mu_j,\varepsilon) \le N(\mu,p_j\varepsilon)$. Откуда в силу (6) получаем, что

$$N(\mu_j,\frac{\varepsilon}{p_j}) \le N(\mu,\varepsilon) \le \sum_i N(\mu_i,\varepsilon). \tag{7}$$

Из неравенств (7) и выбора меры μ_j следует утверждение предложения.

Предложение 8. Для любого метрического компакта (X,ρ) существует мера $\mu \in P(X)$ такая, что $\mathrm{supp}\,(\mu) = X$ и $D(\mu) = 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_k : k \in N\}$ – счетное всюду плотное подмножество X, состоящее из попарно различных точек (для конечного X утверждение предложения очевидно). Положим $\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\delta_{x_k}$. Очевидно, что $\mathrm{supp}\,(\mu)=X$. Пусть $A_n=\{x_1,...,x_n\}$. В силу предложения 2

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu,\mathrm{P}(A_n))=\int\limits_X \rho(x,A_n)d\mu=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\rho(x_k,A_n)\le\frac{1}{2^n}\mathrm{diam}\,(X)=\varepsilon_n .$$

Следовательно, $\mathrm{N}(\mu,\varepsilon_n)\le n$. Откуда $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln \mathrm{N}(\mu,\varepsilon_{\mathrm{n}})}{-\ln\varepsilon_{\mathrm{n}}}=0$. Таким образом, в силу предложения 1 $D(\mu)=0$.

Теорема 1. Для любого b: $0\le b\le\infty$ существует компактное метрическое пространство X_b с единственной неизолированной точкой, такое, что $\dim_B X_b=b$, и для любого $a\in[0,b]$ существует вероятностная мера $\mu_a\in\mathrm{P}(X_b)$, для которой $D(\mu_a)=a$ и $\mathrm{supp}\,(\mu_a)=X_b$.

Доказательство. Положим $X_b=\bigcup_{i\in N}Z_i\cup\{p\}$, где Z_i – попарно дизъюнктные конечные множества, не содержащие точку p. При этом $|Z_i|=[2^{bi}]$, если $b<\infty$, и $|Z_i|=2^{i2}$ при $b=\infty$. Метрику ρ на X_b зададим следующим образом: если $x\in Z_i$, $y\in Z_j$ $(x\ne y)$, то $\rho(x,y)=\frac{1}{2^{\min(i,j)}}$, и $\rho(x,p)=\frac{1}{2^i}$ при $x\in Z_i$. Легко видеть, что X_b – компактное метрическое пространство с единственной неизолированной точкой p.

Вычислим емкостную размерность $\dim_B X_b$. При $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$ любая ε_k-сеть в X_b содержит $\bigcup_{i<k}Z_i$. При этом множество $\bigcup_{i<k}Z_i\cup\{p\}$ является ε_k-сетью в X_b. Следовательно, $\mathrm{N}(X_b,\varepsilon_k)=\sum_{i<k}|Z_i|+1$. Откуда в силу предложения 1 $\dim_B X_b=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mathrm{N}(X_b,\varepsilon_k)}{-\ln\varepsilon_k}=b$.

Случай $b=0$ тривиален, поэтому дальнейшие рассуждения будем вести в предположении $b>0$. Определим меру μ_b на X_b следующим образом. Пусть $c=\sum_{i\in N}\frac{1}{i^2}$. При $x\in Z_i$ положим $\mu_b(\{x\})=\frac{1}{ci^2|Z_i|}$, для точки p $\mu_b(\{p\})=0$. Меру произвольного подмножества $A\subset X_b$ определим как сумму мер его точек. Легко проверить, что $\mu_b\in\mathrm{P}(X_b)$.

Вычислим размерность квантования меры μ_b. Пусть $n_k=\sum_{i\le k}|Z_i|+1$, где $k\in N$. В дальнейшем нас будет интересовать поведение n_k при $k\to\infty$, так что при необходимости будем считать, что k достаточно велико. Покажем, что множество $A=\bigcup_{i\le k}Z_i\cup\{p\}$ мощности $|A|=n_k$ является n_k-оптимальным для меры μ_b.

Пусть B – произвольное n_k-оптимальное подмножество для μ_b. Покажем, что $p\in B$. Предположим противное. Пусть $i=\max\{j:B\cap Z_j\ne\varnothing\}$ и $y\in B\cap Z_i$.

Рассмотрим множество $B' = B \cup \{p\} \setminus \{y\}$ и покажем, что $\rho_P(\mu_b, P(B')) < \rho_P(\mu_b, P(B))$. В силу предложения 2 имеем

$$\rho_P(\mu_b, P(B)) = \int_{X_b} \rho(x,B)d\mu = \sum_{x\in X\setminus B} \rho(x,B)\mu_b(\{x\}). \qquad (8)$$

Аналогично

$$\rho_P(\mu_b, P(B')) = \sum_{x\in X\setminus B'} \rho(x,B')\mu_b(\{x\}). \qquad (9)$$

В силу определения метрики ρ для всех точек $x \notin B$

$$\rho(x,B) \ge \rho(x,B'). \qquad (10)$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (9), есть положительное слагаемое

$$\rho(y,B')\mu_b(\{y\}) = \frac{1}{2^i ci^2 \,|\, Z_i \,|}, \qquad (11)$$

которого нет в сумме (8). При этом для любого $x \in Z_{i+1}$ справедливо равенство $\rho(x,B) = 2\rho(x,B') = \frac{1}{2^i}$. Следовательно,

$$\sum_{x\in Z_{i+1}} (\rho(x,B) - \rho(x,B'))\ \mu_b(\{x\}) = \frac{1}{2^{i+1}c(i+1)^2}. \qquad (12)$$

При достаточно больших i имеет место неравенство $\frac{1}{2^{i+1}c(i+1)^2} > \frac{1}{2^i ci^2 \,|\, Z_i \,|}$.

Таким образом, в силу (10), (11) и (12) $\rho_P(\mu_b, P(B)) > \rho_P(\mu_b, P(B'))$, то есть B не является n_k-оптимальным множеством для меры μ_b (при достаточно больших *k*).

Итак, если B – оптимальное множество для меры μ_b мощности n_k, то $p \in B$. Покажем теперь, что $\bigcup_{i\le k} Z_i \subset B$. Предположим, что существует точка $y \in Z_i \setminus B$, где $i \le k$. Тогда в B найдется точка $z \in Z_j \cap B$ при $j > k$. Положим $B' = B \cup \{y\} \setminus \{z\}$. Поскольку при $x \notin B \cup \{y\}$ $\rho(x,B) = \rho(x,B')$ и $\rho(y,B)\mu_b(\{y\}) > \rho(z,B')\mu_b(\{z\})$, мы получаем неравенство $\rho_P(\mu_b, P(B)) > \rho_P(\mu_b, P(B'))$, противоречащее оптимальности B.

Таким образом, n_k-оптимальное множество B, которое заведомо существует, совпадает с A, что и требовалось. Положим

$$\varepsilon_k = \rho_P(\mu_b, P(A)) = \sum_{i>k} \int_{Z_i} \rho(x,A)d\mu_b = \sum_{i>k} \frac{1}{2^i ci^2}. \qquad (13)$$

Из определения ε_k и n_k-оптимальности A следует равенство $N(\mu_b, \varepsilon_k) = n_k = \sum_{i\le k} |\, Z_i \,| + 1$.

Обозначим для краткости через a_i i-й член ряда из (13): $a_i = \frac{1}{2^i ci^2}$. Поскольку $\lim_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{2}$, для больших i заведомо выполняется неравенство $a_{i+1} > \frac{1}{4} a_i$.

Откуда следует, что $\varepsilon_{k+1} > \frac{1}{4}\varepsilon_k$ при больших k. Таким образом, в силу предложения 1 при $b < \infty$

$$b = \dim_B X_b \geq \underline{D}(\mu_b) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln \mathrm{N}(\mu_b, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(\sum_{i\leq k}[2^{bi}]+1)}{-\ln \sum_{i>k} \frac{1}{2^i ci^2}} \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln[2^{bk}]}{\ln(2^{k+1}c(k+1)^2)} = b.$$

Следовательно, $\underline{D}(\mu_b) = b$. Поскольку $\dim_B X_b \geq \overline{D}(\mu_b) \geq \underline{D}(\mu_b)$, имеют место равенства $\overline{D}(\mu_b) = \underline{D}(\mu_b) = b$.

Аналогично, при $b = \infty$

$$\underline{D}(\mu_b) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(\sum_{i\leq k} 2^{i^2} + 1)}{-\ln \sum_{i>k} \frac{1}{2^i ci^2}} \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln 2^{k^2}}{\ln(2^{k+1}c(k+1)^2)} = \infty$$

и, следовательно, $D(\mu_b) = \infty$.

Пусть теперь $a < b$. В каждом множестве Z_i выберем подмножество Z'_i мощности $|Z'_i| = [2^{ai}]$ и положим $X_a = \bigcup_i Z'_i \cup \{p\}$. Очевидно, что X_a является замкнутым подпространством X_b. На X_a рассмотрим меру μ_a, которая определяется аналогично мере μ_b на X_b. Поскольку размерность квантования сохраняется при переходе к подпространству, мы получаем, что $D(\mu_a) = a$ в $\mathrm{P}(X_b)$. При этом $\mathrm{supp}(\mu_a) = X_a$. Рассмотрим вероятностную меру ν на X_b, для которой $D(\nu) = 0$ и $\mathrm{supp}(\nu) = X_b$ (ν существует в силу предложения 8). Положим $\mu'_a = \frac{1}{2}(\mu_a + \nu) \in \mathrm{P}(X_b)$. Очевидно, что $\mathrm{supp}(\mu'_a) = X_b$. При этом в силу предложения 7 $D(\mu'_a) = a$. Теорема доказана.

Замечание. Все пространства X_b гомеоморфны сходящейся последовательности S. Из теоремы 1 и предложения 6 следует, что размерность квантования фиксированной меры $\mu \in \mathrm{P}(S)$ зависит от метрики на S и может варьироваться от нуля до бесконечности (включительно).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanov A.V.* On metric order of the spaces of the form F(X) // Topology and its Applications. 2017. V. 221. P. 107–113. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.051.
2. *Песин Я.Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
3. *Иванов А.В.*, *Фомкина О.В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2019. № 7. С. 5–14. DOI: 10.17076/mat1034.
4. *Graf S.*, *Luschgy H.* Foundations of Quantization for Probability Distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p.

5. *Pontryagin L.*, *Shnirelman L.* On one metric property of dimension // Annals of Mathematics. 1932. No. 33. P. 156–162.
6. *Федорчук В.В.*, *Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.
7. *Fedorchuk V.*, *Todorčeviĉ S.* Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.
8. *Федорчук В.В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т. 54. № 2. С. 396–417.
9. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

Статья поступила 29.10. 2019 г.

Ivanov A.V. (2020) ON THE FUNCTOR OF PROBABILITY MEASURES AND QUANTIZATION DIMENSIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 63. pp. 15–26

DOI 10.17223/19988621/63/2

Keywords: quantization dimension, functor of probability measures, Kantorovich–Rubinstein metric, dimension of finite approximation.

Let F be a seminormal metrizable functor, (X,ρ) a metric compact, ρ_F a functorial extension of the metric ρ to $F(X)$, and let $F_n(X)$ be the subspace of $F(X)$ consisting of points ξ, the support supp (ξ) of which contains not more than n elements ($n \in N$). For each $\xi \in F(X)$ and a real number $\varepsilon > 0$ we set $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon) = \min\{n : \rho_F(\xi, F_n(X) \le \varepsilon\}$ ($\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)$ is well defined since $\bigcup_{n\in N} F_n(X)$ is everywhere dense in $F(X)$). For any point $\xi \notin \bigcup_{n\in N} F_n(X)$ the number $\mathrm{N}(\xi,\varepsilon)$ increases unlimitedly as $\varepsilon \to 0$. The rate of this increase is characterized by

$$\dim_F(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \mathrm{N}(\xi,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

which we call the dimension of finite approximation of the point ξ (if the specified limit does not exist, we consider the upper or lower limits and get the upper $\overline{\dim}_F(\xi)$ or the lower $\underline{\dim}_F(\xi)$ dimensions of finite approximation).

For the probability functor P, which is metrized by the Kantorovich–Rubinstein metric, the dimension of finite approximation $\dim_{\mathrm{P}}(\xi)$ coincides with the quantization dimension $D(\mu)$ of the measure $\mu \in \mathrm{P}(X)$. The theory of quantization dimensions is motivated by problems of probability theory and is constructed in terms of this theory for probability measures defined in R^n (where the metric is defined by the norm; in this case the dimension $D(\mu)$ is independent of the choice of the norm). The proposed functorial approach extends the notion of quantization dimension to probability measures defined on an arbitrary metric compact (X,ρ). In this case, the dimension $D(\mu)$ of the measure $\mu \in \mathrm{P}(X)$ depends on the choice of the metric ρ compatible with the topology on X and can vary widely. It is shown that a number of statements of the theory of quantization, known for measures in R^n, remains true in the general case. Moreover, the proofs of these statements, carried out in terms of metric and topology, are more compact.

It is proved that for any $b \in [0,\infty]$ there is a metric compact X_b such that the box-dimension $\dim_B X_b = b$; on X_b, there exist probability measures with the support equal to X_b quantization dimensions of which take all possible values from the interval $[0,b]$.

Financial support. The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

AMS Mathematical Subject Classification: 54B30, 60B05

Aleksandr V. IVANOV (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation). E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. *Ivanov A. V.* (2017) On metric order of the spaces of the form $F(X)$. *Topology and its Applications*. 221. pp. 107–113. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.051.
2. *Pesin Ya.B.* (1997) *Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications*. The University of Chicago Press. 397 p.
3. *Ivanov A.V.*, *Fomkina O.V.* (2019) On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trans. of Karelian Research Centre of RAS*. 7. pp. 3–12. DOI: 10.17076/mat1034.
4. *Graf S.*, *Luschgy H.* (2000) *Foundations of Quantization for Probability Distributions*. Springer-Verlag. 231 p.
5. *Pontryagin L.*, *Shnirelman L.* (1932) On one metric property of dimension. *Annals of Mathematics*. 33. pp. 156–162.
6. *Fedorchuk V.V.*, *Filippov V.V.* (1988) General topology. Basic constructions. MSU Press. 252 p.
7. *Fedorchuk V.*, *Todorčević S.* (1997) Cellularity of covariant functors. Topology and its Applications. 76. pp. 125–150.
8. *Fedorchuk V.V.* Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Math. USSR Izv.* 36(2). pp. 411–433.
9. *Kantorovich L. V.*, *Akilov G. P.* (1977) Functional analysis. Moscow: Nauka.

Received: October 29, 2019