

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/64/1

MSC 53C15

А.В. Букушева

МНОГООБРАЗИЯ КЕНМОЦУ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Исследуется многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена. Доказывается, что такое многообразие является многообразием Эйнштейна. На многообразии Кенмоцу определяется N -связность и доказывается, что в случае обращения тензора Схоутена в нуль тензор кривизны N -связности равен нулю тогда и только тогда, когда эндоморфизм N ковариантно постоянен относительно внутренней связности.

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, многообразие Эйнштейна, тензор Схоутена, внутренняя связность, N -связность.

Начало изучению геометрии распределений субримановых многообразий положено в работах [1–4]. Оснащая субримановы многообразия дополнительными структурами, получаем почти контактные метрические многообразия, почти контактные би-метрические многообразия т.д. При этом на распределении D полученного многообразия естественным образом могут быть определены продолженные структуры [1–5]. Продолженные структуры наиболее полно сохраняют свойства исходных структур в случае распределения нулевой кривизны [5]. В настоящее время активно исследуется геометрия почти контактных метрических многообразий, наделенных связностями с кручением [6–10]. К таким многообразиям, прежде всего, относятся четвертьсимметрические пространства, находящие применение в теоретической физике [7, 8]. Совсем недавно стали появляться работы, посвященные изучению почти контактных метрических многообразий с N -связностью [6, 9, 10]. N -связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ гладкого распределения D как единственная связность на многообразии M , удовлетворяющая следующим условиям [9]:

- 1) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0$;
- 3) $\nabla_{\vec{\xi}}^N \vec{y} = [\vec{\xi}, \vec{y}] + N\vec{y}$;
- 4) $\nabla_{\vec{y}}^N \vec{z} = \nabla_{\vec{y}} \vec{z}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Если ∇ – метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [9]:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;

$$2) \nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D);$$

$$3) \nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM);$$

$$4) \nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM).$$

В работах [11–13] особое внимание уделяется внутренним инвариантам почти контактных метрических многообразий. Многообразия Кенмоцу [14, 15], составляющие интересный для исследования класс почти контактных метрических многообразий, характеризуются особым строением внутренних инвариантов. В частности, в работе [6] доказывается, что тензор Схоутена – Вагнера [16] для многообразия Кенмоцу обращается в нуль. N-связность в ряде случаев оказывается предпочтительнее связности Леви-Чивиты. Преимущество N-связности заключается в выполнении следующего условия: $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} \in \Gamma(D)$, где $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y} \in \Gamma(D)$. Несомненно, что сравнение эффективности использования разных классов N-связностей для описания геометрии многообразий Кенмоцу представляет интерес как с точки зрения приложения полученных результатов в теоретической физике [4, 8], так и с точки зрения внутренней логики развития геометрии контактных метрических многообразий.

1. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \phi, g)$ [1, 9]. Здесь, в частности, η – 1-форма, порождающая распределение D : $D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение $D^\perp$ распределения D : $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\phi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\phi(\vec{x}, \vec{y}) = [\phi\vec{x}, \phi\vec{y}] + \phi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \phi[\phi\vec{x}, \vec{y}] - \phi[\vec{x}, \phi\vec{y}]$ – тензор Нейенхайса эндоморфизма ϕ . Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [14, 15]. Здесь $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \phi\vec{y})$ – фундаментальная форма почти контактной метрической структуры.

Имеет место следующая теорема [14, 15].

Теорема 1. Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \phi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\phi\vec{x} - g(\vec{x}, \phi\vec{y})\vec{\xi}$.

Для многообразий Кенмоцу также выполняются следующие условия [15]:

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \eta)\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \quad L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Определяемые далее адаптированные координаты очень часто применяются для исследования геометрии многообразий, оснащенных гладким распределением. По-видимому, впервые, адаптированные координаты использовались в работе [16].

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$ [1–5, 16]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают распределение D : $D = \text{span}(\bar{e}_a)$. Мы будем активно использовать неголономное поле базисов $(\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_a, \partial_n)$. Непосредственно проверяется, что $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\bar{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{a'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [1–5]: $t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Пусть $\psi: D \rightarrow D$ – эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\bar{x}, \bar{y}) = g(\psi\bar{x}, \bar{y})$.

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$.

Имеет место следующее предложение [11].

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{cd} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{ba}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где $C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}$, $C_b^a = g^{da} C_{db}$, $\psi_a^c = g^{bc} \omega_{ab}$.

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем:

$$C_{ab} = g_{ab}, \quad C_a^b = \delta_a^b, \quad \omega_{ba} = 0, \quad \psi_a^c = 0.$$

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем предложение 2.

Предложение 2 [6]. Коэффициенты связности Леви-Чивиты многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{ba}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Непосредственным следствием предложения 2 является следующее предложение.

Предложение 3. Ненулевые компоненты тензора кривизны $\tilde{R}(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ связности Леви-Чивиты многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах принимают следующий вид:

$$\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + \delta_b^d g_{ac} - \delta_a^d g_{bc}, \quad \tilde{R}_{anc}^n = g_{ac}, \quad \tilde{R}_{nan}^c = \delta_{na}^c.$$

Здесь R_{bad}^c – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [9, 16]:

$$R_{abc}^d = 2\tilde{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}\Gamma_{b]c}^e.$$

Тензор Схоутена является допустимым тензорным полем, определяемым равенством $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = \nabla_{\bar{x}}\nabla_{\bar{y}}\bar{z} - \nabla_{\bar{y}}\nabla_{\bar{x}}\bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]}\bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}]$, где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$, $Q = I - P$, ∇ – внутренняя связность, определяемая ниже.

Тензор $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ был назван тензором кривизны Схоутена В.В. Вагнером в работе [16]. В той же работе В.В. Вагнером был введен тензор, определяемый в адаптированных координатах следующим образом: $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$. В нашей работе этот тензор мы называем тензором Схоутена – Вагнера. Заметим, что иногда тензором Схоутена называют также тензор одномерной кривизны, не имеющий непосредственное отношение к настоящей работе.

Распределение D назовем распределением нулевой кривизны, если тензор Схоутена равен нулю.

Теорема 2. Многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена является многообразием Эйнштейна.

Доказательство теоремы сводится к вычислению тензора Риччи $\tilde{r}$ многообразия M в адаптированных координатах. Из равенств

$$\tilde{R}_{abc}^d = \delta_b^d g_{ac} - \delta_a^d g_{bc}, \quad \tilde{R}_{anc}^n = g_{ac}, \quad \tilde{R}_{nan}^c = \delta_{na}^c$$

следует, что $\tilde{r}_{ac} = 2mg_{ac}$, $\tilde{r}_{nn} = 2m$.

Почти контактное метрическое многообразие называется η -Эйнштейновым многообразием, если выполняется условие $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$, где a и b – гладкие функции. Хорошо известно, что если $b = \text{const}$, то η -Эйнштейново многообразие является многообразием Эйнштейна. В нашем случае $a = 2m$, $b = 0$, что и доказывает теорему.

Определим на многообразии M N -связность ∇^N , полагая [9]

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} - \eta(\bar{x})\tilde{\nabla}_{\bar{y}} \bar{\xi} - \eta(\bar{y})\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{\xi} + (\omega + c)(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi} + \eta(\bar{x})N\bar{y}.$$

Предложение 4. Ненулевые коэффициенты $G_{\beta\gamma}^\alpha$ связности ∇^N , заданной на почти контактном метрическом многообразии M , имеют вид $G_{ab}^c = \tilde{G}_{ab}^c$, $G_{nb}^c = N_b^c$.

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [1, 2] называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\bar{x}+f_2\bar{y}} = f_1\nabla_{\bar{x}} + f_2\nabla_{\bar{y}}$;
- 2) $\nabla_{\bar{x}} f\bar{y} = (\bar{x}f)\bar{y} + f\nabla_{\bar{x}} \bar{y}$;
- 3) $\nabla_{\bar{x}} (\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} + \nabla_{\bar{x}} \bar{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной

связности определяются из соотношения $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Из равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$,

где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} \bar{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручение S внутренней линейной связности по определению полагается равным $S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} - \nabla_{\bar{y}} \bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$.

Заметим, что из формулы преобразования для коэффициентов связности Γ_{ab}^c следует корректность определения тензора Схоутена – Вагнера.

На почти контактном метрическом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\bar{x}} g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}).$$

Заметим [4], что для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется условие $\nabla \varphi = 0$.

Под внутренней геометрией [10–12] почти контактного метрического многообразия M будем понимать геометрические свойства M , которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения $D^\perp$. К основным инвариантам внутренней геометрии мы относим тензор кривизны Схоутена R , тензор Схоутена – Вагнера, дифференциальную форму $\omega = d\eta$, производную Ли $C = \frac{1}{2} L_{\bar{\xi}} g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\bar{\xi}$.

Теорема 3 [6]. Тензор Схоутена – Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю.

2. Многообразие Кенмоцу с N-связностью

Используя предложение 2 и формулу $L_{\bar{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, получаем

Предложение 5. N-связность ∇^N выражается через связность Леви-Чивиты с помощью следующего равенства:

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}}^N \bar{y} + \eta(\bar{x}) N \bar{y} + (g + \eta \otimes \eta)(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\xi} - \eta(\bar{y}) \bar{x} - \eta(\bar{x}) \bar{y}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = \tilde{\nabla}_{\bar{x}}^N \bar{y} + \eta(\bar{x}) N \bar{y} + \tilde{C}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\xi} - \eta(\bar{y}) \bar{x} - \eta(\bar{x}) \bar{y},$$

где $\tilde{C}_{ab} = g_{ab}$, $\tilde{C}_{an} = 0$, $\tilde{C}_{nn} = 2$.

Предложение 6. Пусть M – многообразие Кенмоцу с нулевым тензором Схоутена, тогда тензор кривизны $K(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ связности ∇^N равен нулю тогда и только тогда, когда эндоморфизм N ковариантно постоянен относительно внутренней связности.

Доказательство предложения основано на том, что ненулевые компоненты тензора кривизны $K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ связности ∇^N в адаптированных координатах принимают следующий вид: $K_{abc}^d = R_{abc}^d$, $K_{bnc}^d = \nabla_b N_c^d$.

Из обращения в нуль тензора Схоутена – Вагнера и условия $\nabla\varphi = 0$ следует, что тензор Схоутена многообразия Кенмоцу наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны кэлерова многообразия. В частности, имеет место

Предложение 7. Тензор Схоутена многообразия Кенмоцу обладает следующими свойствами:

$$R(\bar{x}, \bar{y}) \circ \varphi = \varphi \circ R(\bar{x}, \bar{y}), \quad R(\varphi\bar{x}, \varphi\bar{y}) = R(\bar{x}, \bar{y}).$$

Найдем условия, при которых связность ∇^N является метрической связностью.

В адаптированных координатах равенство $\nabla^N g = 0$ переписывается в виде

$$\nabla_c^N g_{ab} = \bar{e}_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} = 0,$$

$$\nabla_n^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0.$$

Учитывая, что для многообразия Кенмоцу $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, из последнего равенства получаем

$$2g_{ab} = N_a^c g_{cb} + N_b^c g_{ac}.$$

Тем самым, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 8. N-связность ∇^N является метрической тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство: $2g_{ab} = N_a^c g_{cb} + N_b^c g_{ac}$.

Найдем ограничение на эндоморфизм N, при котором связность ∇^N сохраняет структурный эндоморфизм многообразия Кенмоцу.

Рассмотрим равенство $\nabla_n^N \varphi_a^b = \partial_n \varphi_a^b + N_c^b \varphi_a^c - N_a^c \varphi_c^b = 0$. Учитывая, что многообразие Кенмоцу является нормальным почти контактным метрическим многообразием, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 9. N-связность сохраняет ∇^N структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют: $N_c^b \varphi_a^c - N_a^c \varphi_c^b = 0$.

Последнее равенство выполняется, в частности, если $N = \varphi$.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение.

Предложение 10. Внутренняя связность ∇ и связность Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ почти контактного метрического многообразия удовлетворяют следующему соотношению:

$$\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} = \nabla_{P\bar{x}} P\bar{y} + (\omega(\bar{y}, \bar{x}) - c(\bar{y}, \bar{x}))\bar{\xi} + \eta(\bar{x})(C\bar{y} + \psi\bar{y}) + \eta(\bar{y})(C\bar{x} + \psi\bar{x}).$$

С учетом предложения 2 последнее равенство в случае многообразия Кенмоцу принимает более простой вид: $\tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{y} = \nabla_{P\bar{x}} P\bar{y} - g(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi} + \eta(\bar{x})\bar{y} + \eta(\bar{y})\bar{x}$.

Приведем пример многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны. Определим на пространстве R^3 структуру многообразия Кенмоцу, полагая, что в канонических координатах (x, y, z) выполняются равенства: $g_{11} = g_{22} = e^{2z}$,

$g_{33} = 1$, $\varphi \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi \frac{\partial}{\partial z} = 0$, $\bar{\xi} = \frac{\partial}{\partial z}$, $\eta = dz$. Нетрудно проверить,

что тензор кривизны Схоутена заданной структуры равен нулю.

Другие примеры почти контактных метрических многообразий с нулевым тензором Схоутена можно получить, используя предложение 2. Для этого нужно положить $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ равными нулю и позаботиться о том, чтобы компоненты метрического тензора были константами.

3. Продолженные структуры на распределениях многообразий Кенмоцу

Введем на распределении D многообразия Кенмоцу M структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверткарту $\tilde{K}(\bar{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D , где x^{n+a} – координаты допустимого вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$: $\bar{x} = x^{n+a} \bar{e}_a$. Задание внутренней связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow M$ – естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D , HD – горизонтальное распределение, порожаемое векторными полями $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$, где $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a – коэффициенты внутренней связности. Для каждого допустимого вектора $\bar{x} = x^a \bar{e}_a$ определяются горизонтальный лифт $\bar{x}^h = x^a \bar{e}_a$ и вертикальный $\bar{x}^v = x^a \partial_{n+a}$.

Пусть $\varphi: D \rightarrow D$ – поле структурного эндоморфизма; φ – продолженная связность [4] – является связностью в векторном расслоении (D, π, M) и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\bar{u})$, $\bar{u}_{\bar{x}} = \bar{\xi} - (\varphi \bar{x})^v$, $\bar{\xi} = \partial_n$, $\bar{x} \in D$, $(\varphi \bar{x})^v$ – вертикальный лифт. Относительно базиса $(\bar{e}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\bar{u}$ получает следующее координатное представление: $\bar{u} = \partial_n - \varphi_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Векторные поля $(\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \bar{u} = \partial_n - \varphi_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ задают на распределении D адаптированное поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + \varphi_b^a x^{n+b} dx^n)$ – сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba} \bar{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} \varphi_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \quad [\bar{e}_a, \bar{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a \varphi_d^c) \partial_{n+c},$$

$$[\bar{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{u}, \partial_{n+a}] = \varphi_a^c \partial_{n+c}.$$

Учитывая, что M – многообразие Кенмоцу, перепишем структурные уравнения в следующем виде:

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\bar{u}, \partial_{n+a}] = \varphi_a^c \partial_{n+c}.$$

Мы использовали здесь: интегрируемость распределения D : $\omega_{ba} = 0$; обращение в нуль тензора Схоутена – Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу – $\partial_n \Gamma_{ad}^c = 0$; свойство нормальности многообразия Кенмоцу – $\nabla_a \varphi_d^c = 0$.

Определим на многообразии D почти контактную метрическую структуру $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^h) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^v) = g(\bar{x}, \bar{y}), \\ \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^v) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^h) = g(\bar{x}^h, \bar{u}) = g(\bar{x}^v, \bar{u}) = 0, \quad \tilde{g}(\bar{u}, \bar{u}) = 1, \\ \tilde{J}\bar{x}^h &= (\varphi\bar{x})^h, \quad \tilde{J}\bar{x}^v = (\varphi\bar{x})^v, \quad \tilde{J}\bar{u} = \bar{0}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D).\end{aligned}$$

Предложение 11. Пусть M – многообразие Кенмоцу с распределением нулевой кривизны. Тогда для ненулевых коэффициентов $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ связности Леви-Чивиты метрики $\tilde{g}$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n = g_{ab}, \\ \tilde{\Gamma}_{an}^c &= \tilde{\Gamma}_{na}^c = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+b} = \tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+b} = \delta_a^b.\end{aligned}$$

Доказательство предложения основано на применение равенства

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}$, $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}$, $\Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$, $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$.

Теорема 4. Пусть D – распределение нулевой кривизны многообразия Кенмоцу. Тогда продолженная почти контактная метрическая структура $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ является структурой Кенмоцу.

Доказательство. Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивиты, ассоциированная с продолженной структурой $(D, J, \bar{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$. С учетом предложения 11 получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{y}^h &= (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^h - (g(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{\xi})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{y}^v = (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^v, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{y}^h = 0, \\ \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{y}^v &= -(g(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{\xi})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^h} \bar{u} = (\nabla_{\bar{u}} \bar{x})^h = (\nabla_{\tilde{\xi}} \bar{x})^h, \quad \tilde{\nabla}_{\bar{x}^v} \bar{u} = \nabla_{\bar{u}} \bar{x}^v = (\nabla_{\tilde{\xi}} \bar{x})^v.\end{aligned}$$

Используя полученные равенства, характеристический признак многообразия Кенмоцу, убеждаемся в справедливости теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. V. 4 (53). No. 2. P. 13–22.
2. Букушева А.В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2015. № 46. С. 58–63.
3. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. Вып. 2. С. 138–147.
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 4. С. 10–18.
5. Галаев С.В. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2017. № 6 (255). Вып. 46. С. 36–43.
6. Букушева А.В. О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2019. № 50. С. 48–60.

7. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. N.S. 1975. 29. P. 293–301.
8. Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. Многообразия Римана – Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). 2009. Т. 123. С. 110–141.
9. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 258–263.
10. Букушева А.В. О геометрии контактных метрических пространств с ф-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. № 17(214). Вып. 40. С. 20–24.
11. Galaev S.V. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. V. 31. No. 1. P. 35–46.
12. Букушева А.В., Галаев С.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. № 48. С. 32–41.
13. Galaev S.V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. No. 1. P. 71–76.
14. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
15. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov: Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007. 160 p.
16. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

Статья поступила 21.09.2019 г.

Bukusheva A.V. (2020) KENMOTSU MANIFOLDS WITH A ZERO CURVATURE DISTRIBUTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/64/1

Keywords: Kenmotsu manifold, Einstein manifold, Schouten tensor, intrinsic connection, N-connection.

We study the Kenmotsu manifold with the intrinsic connection defined on it with the zero Schouten curvature tensor. The Schouten tensor is a nonholonomic analog of the curvature tensor of a Riemannian manifold. The intrinsic connection defines a parallel displacement of admissible vectors along admissible curves. In the case of the zero Schouten tensor, the parallel displacement does not depend on the choice of an admissible curve.

It is proved that the Kenmotsu manifold with the zero Schouten tensor is an Einstein manifold. On a Kenmotsu manifold M , an N-connectedness is defined, where N is a tangent bundle endomorphism preserving the distribution D of the manifold M . In some cases, the N-connection is preferable to the Levi-Civita connection.

The advantage of N-connectivity is that it satisfies the following condition: $\nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} \in \Gamma(D)$, where $\bar{x} \in \Gamma(TM)$, $\bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$. In the case when $N = C$, or $N = C - \varphi$, N-connectivity ∇^N coincides with the Tanaka–Webster connection or the Schouten–van Kampen connection, respectively. It is proved that the N-connection curvature tensor is zero if and only if the endomorphism N is covariantly constant with respect to the intrinsic connection. The covariantly constant with respect to the interior connection of tensor fields can be attributed, in particular, the structural endomorphism φ of the Kenmotsu manifold. The interior invariants of the Kenmotsu manifold are investigated. In particular, it is proved that the Schouten–Wagner tensor for the Kenmotsu manifold vanishes. On a distribution D of the Kenmotsu manifold, an almost contact metric structure called the extended structure is determined for the case $N = \varphi$ by means of N-connection ∇^N . It is proved that in the case of a Kenmotsu manifold with a Schouten tensor, the extended structure is a Kenmotsu structure.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15

Aliya V. BUKUSHEVA (Candidate of pedagogical sciences, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation). E-mail: bukusheva@list.ru

REFERENCES

1. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2011) Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics*. 4(53). 2. pp. 13–22.
2. Bukusheva A.V. (2015) Nelineynye svyaznosti i vnutrennie polupul'verzatsii na raspredelenii s obobshchennoy lagranzhevoy metrikoy [Nonlinear connections and internal semipulverizations on a distribution with a generalized Lagrangian metric]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 46. pp. 58–63.
3. Galaev S.V. (2017) Prodolzhenkiye struktury na koraspredeleniyakh kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy [Extended structures on codistributions of contact metric manifolds] *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 17(2). pp. 138–147. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147>.
4. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2013) Svyaznosti nad raspredeleniyem i geodezicheskiye pul'verzatsii [Connections over a distribution and geodesic sprays]. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 57(4). pp. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13040026>.
5. Galaev S.V. (2017) Pochti kontaktnyye metricheskiye mnogoobraziya s raspredeleniyem nulevoy krivizny [Almost contact metric manifolds with distribution of zero curvature]. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*. 6(255). 46. pp. 36–43.
6. Bukusheva A.V. (2019) O geometrii mnogoobraziy Kenmotsu s N-svyaznost'yu [On geometry of Kenmotsu manifolds with N-connection]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 50. pp. 48–60. DOI: 10.5922/0321-4796-2019-50-7.
7. Golab S. (1975) On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. *Tensor. N.S.* 29. pp. 293–301.
8. Gordeeva I.A., Panzhensky V.I., Stepanov S.E. (2009) Mnogoobraziya Rimana – Kartana [Riemann–Cartan manifolds]. *Itogi nauki i tekhniki*. 123. pp. 110–141.
9. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye prostranstva s N-svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N-connection]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 15(3). pp. 258–263. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264>.
10. Bukusheva A.V. (2015) O geometrii kontaktnykh metricheskikh prostranstv s ϕ -svyaznost'yu [The geometry of contact metric spaces with ϕ -connection]. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics*. 17(214). 40. pp. 20–24.
11. Galaev S.V. (2015) Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*. 31(1). pp. 35–46.
12. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2017) Geometriya pochti kontaktnykh giperkelerovykh mnogoobraziy [Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur*. 48. pp. 32–41.
13. Galaev S.V. (2018) Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1). pp. 71–76. DOI: 10.1134/S1995080218010122.
14. Kenmotsu K. (1972) A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.* 24. pp. 93–103.
15. Pitis G. (2007) *Geometry of Kenmotsu manifolds*. Brasov: Publishing House of Transilvania University of Brasov. 160 p.
16. Vagner V.V. (1941) Geometriya $(n-1)$ -mernogo negolonomnogo mnogoobraziya v n -mernom prostranstve [Geometry of the $(n-1)$ -dimensional manifold in the n -dimensional space]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu*. 5. pp. 173–255.

Received: September 21, 2019