ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика и механика № 64

УДК 517.9 MSC 35D35, 35Q35, 35B65
DOI 10.17223/19988621/64/3

Н.А. Кучер, А.А. Жалнина, О.В. Малышенко

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Математические модели многоскоростных континуумов, посредством которых описываются движения многокомпонентных смесей, представляют собой обширную область современной механики и математики. Математические результаты (постановка задач, теоремы о существовании и единствености, свойства решений и др.) для таких моделей достаточно скромны по сравнению с результатами для классических однокомпонентных среда. Настоящая работа имеет своей целью в какой-то мере восполнить этот пробел и посвящена исследованию глобальной корректности краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений, являющейся некоторой регуляризацией уравнений движения смеси вязких сжимаемых жидкостей. Построение решения рассматриваемой в этой статье задачи является ключевым этапом для математического анализа исходной модели смеси, поскольку позволяет посредством предельного перехода получить глобально определенные решения последней. Алгоритм построения решения регуляризованной задачи носит конструктивный характер, основанный на процедуре конечномерной аппроксимации бесконечномерной задачи и поэтому на этой основе может быть построен математически обоснованный алгоритм численного решения краевой задачи о движении смеси вязких сжимаемых жидеостей в области, ограниченной твердыми стенками.

Ключевые слова: *смесь вязких сжимаемых жидкостей*, *краевая задача*, *сильное решение.*

Пространственное движение бинарной смеси вязких сжимаемых жидкостей описывается системой уравнений [1]

$$\partial_t(\rho_i u^{(i)}) + \mathrm{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \mathrm{div}\,\sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)}; \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho_i) + \mathrm{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\rho_i, p_i, \vec{u}^{(i)}, i = 1,2,$ соответственно плотность, давление, скорость компонент смеси – искомые функции времени t и точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Тензоры вязких напряжений $\sigma^{(i)}$, $i = 1,2$, задаются равенствами

$$\sigma^{(i)}(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2}\Big[2\mu_{ij}\mathbf{D}(\vec{u}^{(j)}) + \lambda_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{u}^{(j)} \cdot \mathbf{I}\Big],$$

$$\mathbf{D}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Big(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\Big),\ \ \mathbf{I} \text{ – единичный тензор,} \tag{3}$$

в которых (постоянные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij}, $i, j = 1,2,$ таковы, что матрицы

$$\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{2} \text{ и } \{\lambda_{ij} + 2\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{2} \text{ положительно определены.} \tag{4}$$

Предполагается, что давление p_i и плотность ρ_i в i-й компоненте связаны соотношением $p_i=\rho_i^{\gamma_i}$, где $\gamma_i>1$ – показатель адиабаты. Слагаемые $\vec{J}^{(i)}$, характеризующие интенсивность обмена импульсом между компонентами смеси, определены по формуле [2, 3]

$$\vec{J}^{(i)}=(-1)^{i+1}\cdot a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}),\ \ a=\text{const}>0,\ \ i=1,2. \tag{5}$$

Рассмотрим задачу о движении смеси в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, граница $\partial\Omega$ которой является неподвижной непроницаемой стенкой. Тогда краевые условия на границе $\partial\Omega$ выражаются соотношениями

$$\vec{u}^{(i)}=0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\partial\Omega,\ i=1,2. \tag{6}$$

В начальный момент $t=0$ распределение плотностей и импульсов предполагается известным:

$$\rho_i\big|_{t=0}=\rho_i^0,\ \ \rho_i\vec{u}^{(i)}\Big|_{t=0}=\vec{q}^{(i)}\Big|_{t=0}=\vec{q}_0^{(i)} \ \ \textit{в} \ \ \Omega,\ \ i=1,2. \tag{7}$$

Глобальные теоремы существования и результаты о стабилизации решений для нестационарных уравнений многоскоростных континумов вида (1) – (5) в настоящее время получены только в случае одномерного движения с плоскими волнами, когда решение зависит лишь от одной пространственной переменной [3–5]. Первые результаты для модели смеси в приближении Стокса в случае более одной пространственной переменной получены авторами [6, 7]. В [8] проведено исследование так называемой квазистационарной модели смеси сжимаемых жидкостей в ограниченной области со специальными граничными условиями. В работе [9, 10] приведено стационарное решение первой краевой задачи для полных уравнений (1) – (5) в случае трех пространственных переменных, а в [11] – доказательство существование слабых стационарных решений системы уравнений смесей вязких жидкостей с учетом теплопроводности.

Вспомогательные предложения

В этом разделе приводятся сведения из анализа и теории дифференциальных уравнений, которые используются в данной статье.

Пространства непрерывных функций и пространства Соболева. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – открытое ограниченное множество. Символ $\mathrm{D}(\Omega)$ обозначает пространство основных функций, а $\mathrm{D}'(\Omega)$ – пространство распределений (обобщенных функций) на Ω. Через $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$, $m\geq 0$ – целое, $\beta\in(0;1]$ обозначим линейное пространство функций, определенных на замыкании $\overline{\Omega}$ и обладающих всеми частными производными до порядка m включительно, непрерывными в $\overline{\Omega}$ по Гельдеру с показателем β. Функция $u\to\|u\|_{C^{m,\beta}(\overline{\Omega})}$, $m=0,1,\ldots;\beta\in(0;1]$,

$$\|u\|_{C^{m,\beta}(\overline{\Omega})}=\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|D^{\alpha}u(x)\right|+\sum_{|\alpha|=m}\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{\left|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\right|}{|x-y|^{\beta}},$$ где D^{α} обозначает

любую производную $u(x)$ по x вида $\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ является нормой в линейном пространстве $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$, называемым пространством Гельдера; $\mathrm{L}^p(\Omega)$ – банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $1 \le p < \infty$. Норма в нем определяется равенством $\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$. Измеримость и суммируемость понимается всюду в смысле Лебега. $W^{1,\mathrm{p}}(\Omega)$ ($l \ge 0$ – целое, $p \ge 1$) – банахово пространство, состоящее из всех элементов $\mathrm{L}^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка l включительно, суммируемых со степенью p. Норма в $W^{l,p}(\Omega)$ определяется равенством $\|u\|_{\mathrm{W}^{l,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le l} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$, если $1 \le p < \infty$ и

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{l,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \le l} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{|\alpha| \le l} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \right\} \text{ для } p = \infty .$$

$W_0^{1,\mathrm{p}}(\Omega)$ – замкнутое подпространство пространства $W^{1,\mathrm{p}}(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность $C_0^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций.

Для функций, зависящих от $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ и $t \in (0,T) = I$, используются анизотропные функциональные пространства. В общем случае, если X – банахово пространство с нормой $u \to \|u\|_X$, то через $L^p(I,X)$, $p \ge 1$, обозначается пространство (классов) функций $t \to u(t) : I = (0,T) \to X$, измеримых, принимающих значения из X и таких, что $\left(\int_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/\mathrm{p}} = \|u\|_{\mathrm{L}^p(I,X)} < \infty.$ Если $p = \infty$, то эта норма заменяется нормой $\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|u(t)\|_X = \|u(t)\|_{L^\infty(I,X)}$. Нормированное пространство $\mathrm{L}^\mathrm{p}(I,X)$ является полным.

В статье используются, в частности, пространства $L^p\left(I, W^{l,q}(\Omega)\right)$, $1 < p \le \infty$, $l \ge 0$, с нормой $\|u\|_{L^p\left(I,W^{l,q}(\Omega)\right)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{W^{l,q}(\Omega)} \, dt \right)^{1/p}$, $C^0(\bar{I},X)$ – банахово пространство функций $t \to u(t) : \bar{I} = [0,T] \to X$, непрерывных, принимающих значения из X и таких, что $\|u\|_{C^0(\bar{I},X)} = \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X < \infty$.

Через $E_0^{r,t}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $\mathrm{D}(\Omega)$ по норме $\vec{g} \to \|\vec{g}\|_{E^{r,t}} = \|\vec{g}\|_{L^r(\Omega)} + \|\operatorname{div} \vec{g}\|_{L^t(\Omega)}$; $\gamma_n : \vec{\varphi} \to \gamma_0(\vec{\varphi}) \cdot \vec{n}$ (где γ_0 – оператор следа, а $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω) есть линейный ограниченный плотно определенный в $\mathrm{D}\left(\mathbf{R}^n\right)$ оператор из $E^{p,p}(\Omega)$ в

$\left[W^{l-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)\right]^*, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Значение $\gamma_n(\vec{\varphi})$ обычно обозначается через $(\vec{\varphi}\cdot\vec{n})|_{\partial\Omega}$.

Пространства со слабой топологией определяются так: $C^0(I, X_{\text{weak}}) = \left\{u : I \Longrightarrow X; \langle v,u\rangle_{X^*,X} \in C^0(I), \forall\, v \in X^*\right\}$, X^* – сопряженное пространство к X; $\langle v,u\rangle_{X^*,X} = v(u)$. Топология в этом пространстве индуцирована слабой топологией в X.

Области. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $m \geq 0$ – целое число и $\beta \in (0;1]$. Мы говорим, что граница $\partial\Omega$ этой области (или соответственно Ω) принадлежит классу $C^{m,\beta}$, обозначая, что $\partial\Omega \in C^{m,\beta}$, если имеет место следующее свойство: для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует окрестность U_{x_0} этой точки в $\mathbf{R}^n$, декартова система координат $y = (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n) \equiv (\bar{y}, y_n)$ с центром в x_0 и функция $\eta \in C^{m,\beta}(B_{n-1}), B_{n-1} = \{|\bar{y}| < 1\}$ такие, что в новых координатах $U_{x_0} \cap \partial\Omega = \{y : y_n = \eta(\bar{y}), \bar{y} \in B_{n-1}\}$. Другими словами, граница $\partial\Omega$ есть график функции класса $C^{m,\beta}$ в окрестности каждой ее точки.

Постановка задачи и основные результаты

С целью построения обобщенного решения задачи (1) – (7) рассмотрим ее регуляризацию:

$$\partial_t(\rho_i\vec{u}^{\,(i)}) + \operatorname{div}(\rho_i\vec{u}^{\,(i)}\otimes\vec{u}^{\,(i)}) + \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) + \delta\nabla(\rho_i^{\beta_i}) + \varepsilon\nabla\vec{u}^{\,(i)}\cdot\nabla\rho_i = \operatorname{div}\sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)},$$
$$\text{в } Q_T = (0,T)\times\Omega; \tag{8}$$

$$\partial_t(\rho_i) + div(\rho_i\vec{u}^{(i)}) = \varepsilon\Delta\rho_i, \text{ в } Q_T; \tag{9}$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0,\ \rho_i\vec{u}^{(i)}\Big|_{t=0} = \vec{q}_{\,0}^{\,(i)}, \text{ в } \Omega; \tag{10}$$

$$\vec{u}^{(i)} = 0, \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega; \tag{11}$$

$$\nabla\rho_i\cdot\vec{n} = 0, \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, i = 1,2, \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – малые параметры, а величины $\beta_i, i = 1,2$ выбираются достаточно большими. Уравнения (9) дополнены однородными граничными условиями Неймана (12).

Цель настоящей работы – построение решения регуляризованной задачи методом конечномерной аппроксимации.

Основные результаты о корректности регуляризованной задачи доставляет следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* μ_{ij} *и* λ_{ij} *удовлетворяют условиям* (*4*) *и показатели адиабаты* $\gamma_i > \dfrac{3}{2}, i = 1,2$. *Пусть параметры* ε, δ, β_i *выбраны так, что* $\varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ \beta_i \geq 15,\ i = 1,2$. *Пусть* Ω – *ограниченная область класса* $C^{2,\theta}$,

$\theta \in (0,1]$ *и* $0 < \underline{\rho} \le \rho_i^0 \le \overline{\rho} < \infty, \rho_i^0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\vec{q}_0^{\,(i)} \in L^2(\Omega)$. *Тогда существует сильное обобщенное решение задачи* (*8*) – (*12*), $\rho_{i,\varepsilon}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}$, $\rho_{i,\varepsilon} = \rho_{i,\varepsilon,\delta}$, $\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = \vec{u}_{\varepsilon,\delta}^{(i)}$, $i = 1,2$, *обладающее свойствами*:

(*i*) $\rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\overline{I}, L_{weak}^{\beta_i}(\Omega))$, $\rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\overline{I}, L^p(\Omega)) \cap L^{\beta_i+1}(Q_T)$, $1 \le p < \beta_i$.

$$\rho_{i,\varepsilon} \ge 0 \text{ п.в. в } Q_T, \ \rho_{i,\varepsilon}^{\frac{1}{2}\beta_i} \in L^2(I, W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\partial_t \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i}}(Q_T), \ D^\alpha \rho_{i,\varepsilon} \in \left(L^{\frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i}}(Q_T) \right)^{3\times 3}, \ |\alpha| = 2,$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)), \ \vec{q}_\varepsilon^{\,(i)} = \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in C^0\left(\overline{I}, L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega) \right),$$

$$\vec{q}_\varepsilon^{\,(i)} \in L^2\left(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega) \right), \ \rho_{i,\varepsilon} |\vec{u}_\varepsilon^{(i)}|^2 \in L^\infty(I, L^1(\Omega)) \cap L^2\left(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega) \right),$$

$$\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i}}(Q_T), \ \nabla \rho_{i,\varepsilon}, \ \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^{\frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i}}\left(I, E_0^{\frac{10\beta_i - 6}{3\beta_i + 3}, \frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i}}(\Omega) \right),$$

$$\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon} dx = \int_\Omega \rho_i^0 dx.$$

(*ii*) *Уравнения* (*8*) *выполнены в пространстве распределений* $D'(Q_T)$:

$$\partial_t(\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + \operatorname{div}(\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + \nabla(\rho_{i,\varepsilon}^{\gamma_i} + \delta\rho_{i,\varepsilon}^{\beta_i}) = \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\Delta\vec{u}_\varepsilon^{(j)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} - \varepsilon(\nabla\rho_{i,\varepsilon} \cdot \nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + (-1)^{i+1} a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}), i = 1,2.$$

(*iii*) *Уравнения*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\eta_i dx - \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \nabla\eta_i dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla\rho_{i,\varepsilon} \cdot \nabla\eta_i dxdt = 0, \eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \ i = 1,2,$$

выполнены в $D'(I)$.

(*iv*) *Выполнены следующие соотношения*:

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}(t)\eta_i dx = \int_\Omega \rho_i^0 \eta_i dx, \ \eta_i \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(t)\vec{\varphi}^{(i)} dx = \int_\Omega \vec{q}_0^{\,(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx, \ \vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega).$$

(v) *Если* $\delta \in (0,1)$, *то имеют место следующие оценки, равномерные относительно параметра* ε:

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{L^2(I,W^{1,2}(\Omega))} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}), \quad \left\|\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^\infty(I,L^{\gamma_i}(\Omega))} \le L(\gamma_i,\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),$$

$$\delta^{1/\beta_i}\left\|\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^\infty(I,L^{\beta_i}(\Omega))} \le L(\beta_i,\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2; \tag{13}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^2(Q_T)} \le L(\delta,\beta_i,\rho_i^0,\vec{q}_0^{(i)}),\ i=1,2,\quad \left\|\rho_{i,\varepsilon}|\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2\right\|_{L^\infty\left(I,L^1(\Omega)\right)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2; \tag{14}$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}|\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2\right\|_{L^2\left(I,L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega)\right)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2,\quad \left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{L^\infty\left(I,L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)\right)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2; \tag{15}$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{L^2\left(I,L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)\right)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2,\quad \left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}}(Q_T)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2; \tag{16}$$

$$\varepsilon\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}}(Q_T)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2,\quad \varepsilon\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\cdot\nabla\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T)} \le L(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}),\ i=1,2. \tag{17}$$

Здесь величина $\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0} = \sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\rho_0^k\left|\vec{u}_0^{(k)}\right|^2 + \frac{\left(\rho_0^k\right)^{\gamma_k}}{\gamma_k-1} + \frac{\delta\left(\rho_0^k\right)^{\beta_k}}{\beta_k-1}\right\}dx$ *определяется начальными данными;* L *– положительная постоянная, независящая от* ε. *Более того, если параметр* δ *не указан в аргументе* L, *то* L *не зависит также от* δ.

Объем статьи не позволяет изложить доказательство теоремы 1 в деталях. Поэтому мы ограничиваемся описанием общей схемы доказательства и более подробно приводим его ключевые моменты.

Аппроксимация Фаэдо – Галеркина вспомогательной задачи (8) – (12)

В этом разделе мы построим схему аппроксимации регуляризованной задачи (8) – (12) посредством конечномерных задач. Изучим локальную, а затем глобальную по времени разрешимость этих задач. Далее, используя априорные оценки решений уравнений Галеркина, докажем возможность предельного перехода, в результате чего получим сильное обобщенное решение задачи (8) – (12) .

Предварительные предложения

Выберем систему достаточно гладких функций $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$, образующую ортонормированный базис в $(L^2(\Omega))^3$, а также ортонормированный базис в $(W_0^{1,2}(\Omega))^3$ (с подходящим образом выбранным скалярным произведением).

Рассмотрим последовательность конечномерных евклидовых пространств X_n со скалярным произведением $(,) = (,)_{X_n}$, определенных как $X_n = span\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{n}$, $(\vec{u},\vec{v}) = \int_{\Omega}\vec{u}\cdot\vec{v}dx,\ \vec{u},\vec{v}\in X_n$, и заметим, что все нормы на X_n и, в частности, $W^{k,p}(\Omega)$-нормы, $k = 0,1,\dots$, $1\le p\le\infty$ эквивалентны.

Обозначим через P_n ортогональный проектор из $(L^2(\Omega))^3$ в X_n [12]. Пусть дана функция $g \in C^0(I, L^1(\Omega))$, $\partial_t g \in L^1(Q_T)$, $\operatorname*{essinf}_{(t,x)\in Q_T} g(t,x) \ge a > 0$. Так как отображение $\vec{w} \to l(\vec{w}) = \int_\Omega g(t)\vec{v}\cdot\vec{w}dx$ является ограниченным линейным функционалом на X_n и $|l(\vec{w})| \le \|\vec{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega g(t)dx$, то по теореме Рисса его можно представить в виде скалярного произведения $(\mathcal{M}_g\vec{v}, \vec{w})$, $\mathcal{M}_{g(t)} \in \mathcal{L}(X_n, X_n)$. Тем самым для всех $t \in \overline{I}$ определено линейное отображение $\mathcal{M}_{g(t)} : X_n \to X_n$, $(\mathcal{M}_g\vec{v}, \vec{w}) = \int_\Omega g(t)\vec{v}\cdot\vec{w}dx$, $\vec{v}, \vec{w} \in X_n$, обладающее свойствами

$$\|\mathcal{M}_{g(t)}\|_{\mathcal{L}(X_n, X_n)} \le c(n)\int_\Omega g(t)dx, \ t \in \overline{I}.$$

Обратный оператор существует для всех $t \in \overline{I}$, и при этом справедлива оценка

$$\|\mathcal{M}_{g(t)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_n, X_n)} \le \frac{1}{a}.$$

Лемма 2. *Пусть* $g \in W^{1,1}(Q_T)$, $\operatorname*{essinf}_{(t,x)\in Q_T} g(t,x) \ge a > 0$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\partial_t(\mathcal{M}_g^{-1}\vec{v}, \vec{w}) = -(\mathcal{M}_g^{-1}\mathcal{M}_{\partial_t g}\mathcal{M}_g^{-1}\vec{v}, \vec{w}), \ \text{в} \ D'(I), \ \vec{v}, \vec{w} \in X_n,$$

$$\partial_t(\mathcal{M}_g^{-1}\vec{v}, \vec{w}) = -(\mathcal{M}_g^{-1}\mathcal{M}_{\partial_t g}\mathcal{M}_g^{-1}\vec{v}, \vec{w}) + (\mathcal{M}_g^{-1}\partial_t\vec{v}, \vec{w}), \ \text{в} \ D'(I), \ \vec{v} \in C^1(I, X_n), \ \vec{w} \in X_n.$$

Уравнение неразрывности с диссипацией

Рассмотрим уравнение

$$\partial_t\rho + div(\rho\vec{u}) = \varepsilon\Delta\rho \ \text{ в } \ Q_T, \tag{18}$$

дополненное начальным условием

$$\rho(0) = \rho_0 \ \text{ в } \ \Omega \tag{19}$$

и граничным условием

$$\partial_n\rho = 0 \ \text{ на } I \times \partial\Omega. \tag{20}$$

Здесь $\rho(t,x), t \in I, x \in \Omega$ – искомая функция, Ω – ограниченная область, $\varepsilon > 0$ – заданная постоянная, ρ_0 – заданная функция и $\vec{u}(t,x)$ – заданное векторное поле, обращающееся в нуль на границе области Ω.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \theta \le 1$, Ω *– ограниченная область класса* $C^{2,\theta}$, $0 < \underline{\rho} \le \overline{\rho} < \infty$ *и* $\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\underline{\rho} \le \rho_0 \le \overline{\rho}$. *Тогда существует однозначное отображение* $S_{\rho_0} : L^\infty(I, (W_0^{1,\infty}(\Omega))^3) \to C^0(\overline{I}, W^{1,2}(\Omega))$, *такое, что:*

- $S_{\rho_0}(\vec{u}) \in R_T = \{\rho : \rho \in L^2(I, W^{2,p}(\Omega)) \cap C^0(\overline{I}, W^{1,p}(\Omega)),$
  $\partial_t\rho \in L^2(I, L^p(\Omega)) \ 1 < p < \infty\}$;

• *Функция* $\rho = S_{\rho_0}(\vec{u})$ *удовлетворяет уравнению* (*18*) *п. в. в* Q_T, *начальному условию* (*19*) *п. в. в* Ω *и граничному условию* (*20*) *в смысле следов п. в. в* I *;*

• *Имеет место оценка*

$$\underline{\rho}\cdot\exp\left(-\int_0^t \|\vec{u}(\tau)\|_{1,\infty}\,d\tau\right) \le [S_{\rho_0}(\vec{u})](t,x) \le \overline{\rho}\cdot\exp\left(\int_0^t \|\vec{u}(\tau)\|_{1,\infty}\,d\tau\right), t\in\overline{I},\ \ x\in\Omega;$$

• *Если* $\|\vec{u}\|_{L^\infty(I,W^{1,\infty}(\Omega))} \le K$, *где* $K>0$, *то*

$$\|S_{\rho_0}(\vec{u})\|_{L^\infty(I_t,W^{1,2}(\Omega))} \le c\|\rho_0\|_{1,2}\cdot\exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K+K^2)t\right),\ I_t=(0,t),\ t\in\overline{I}; \tag{21}$$

$$\|\nabla^2 S_{\rho_0}(\vec{u})\|_{L^2(Q_t)} \le \frac{c}{\varepsilon}\sqrt{t}\,\|\rho_0\|_{1,2}\cdot K\cdot\exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K+K^2)t\right),\ t\in\overline{I}\ ; \tag{22}$$

$$\|\partial_t S_{\rho_0}(\vec{u})\|_{L^2(Q_t)} \le c\sqrt{t}\,\|\rho_0\|_{1,2}\cdot K\cdot\exp\left(\frac{c}{2\varepsilon}(K+K^2)t\right),\ t\in\overline{I}. \tag{23}$$

• $\|[S_{\rho_0}(\vec{u}_1)-S_{\rho_0}(\vec{u}_2)](t)\|_{L^2(\Omega)} \le c(K,\varepsilon,T)t\,\|\rho_0\|_{1,2}\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|_{L^\infty(I_t,W^{1,\infty}(\Omega))},\ t\in\overline{I}$ (24)

Постоянная c в неравенствах (21) – (23) зависит только от Ω (в частности, она не зависит от $\varepsilon, K, T, \rho_0, \vec{u}$). Детали доказательства леммы имеются в [12].

Приближения Галеркина

Для произвольного выбранного $T'\in(0,T]$ ищем вектор-функции

$$\vec{u}^{(i)}\in C^0(\overline{I'},X_n),\ \ I'=(0,T'),\ \ i=1,2,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\int_\Omega \rho_i(t)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dx - \int_\Omega \vec{q}_0^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dx = \int_0^t\int_\Omega\left[\sum_{j=1}^2 \mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla\,\mathrm{div}\vec{u}^{(j)} - \right.$$

$$\left. -\nabla\rho_i^{\gamma_i} - \delta\nabla\rho_i^{\beta_i} - \mathrm{div}(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}) - \varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} + (-1)^{i+1}\cdot a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\right]\vec{\varphi}dxd\tau,$$

$$i=1,2,\ \ t\in I',\ \ \vec{\varphi}\in X_n, \tag{25}$$

где $\rho_i(t)=[S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})](t)$ – решение задачи (18) – (20), построенное в лемме 3.

Уравнения (25) представим в виде

$$(\mathcal{M}_{\rho_i(t)}\vec{u}^{(i)},\vec{\varphi})_{X_n} - (P\vec{q}_0^{(i)},\vec{\varphi})_{X_n} = \int_0^t (P[\mathcal{N}_i(S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)}),\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)})],\vec{\varphi})_{X_n}\,d\tau,$$

где $$\mathcal{N}_i(\rho_i,\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^2\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla\,\mathrm{div}\vec{u}^{(j)} - \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) - \delta\nabla(\rho_i^{\beta_i}) -$$

$$-\mathrm{div}(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}) - \varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} + (-1)^{i+1}\cdot a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}),\ \ i=1,2,$$

и, следовательно, можем записать их в операторной форме

$$\vec{u}^{(i)}(t) = \mathcal{M}^{-1}_{\left[S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})\right](t)}\left\{P\vec{q}_0^{(i)} + \int_0^t P\left[\mathcal{N}_i(S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)}),\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)})\right]d\tau\right\},\ \ i=1,2. \tag{26}$$

Существование локального решения уравнений (26)

Лемма 4. *Найдется такое* $T' > 0$, *что на промежутке* $0 < t < T'$ *существует единственное решение* $\vec{u}^{(i)} \in C((0,T'),X_n)$, $i = 1,2$, *системы уравнений* (*26*).

Доказательство леммы 4 основано на использовании принцпа сжимающих отображений.

Существование глобального по времени решения уравнений (26)

Теорема 5. *На любом конечном промежутке* $0 < t < T$ *система уравнений* (*26*) *имеет единственное решение в классе* $C^0((0,T),X_n)$.

Доказательство. Отметим, что возможность продолжения локального решения, построенного в лемме 4, на произвольный конечный интервал $(0,T)$ следует из ограниченности в пространстве $C^0((0,T),L^2(\Omega))$ семейства решений уравнений (26). Действительно, располагая оценкой

$$\left\|\vec{u}^{(i)}\right\|_{C^0(I,L^2(\Omega))} \le C = const,\ i = 1,2, \tag{27}$$

мы получим

$$\left\|\vec{u}^{(i)} - \vec{v}_*^{(i)}\right\|_{C^0(I,X_n)} \le C + \frac{1}{\underline{\rho}}\left\|\vec{q}_0^{(i)}\right\|_{L^2(\Omega)},\quad \vec{v}_*^{(i)} = \mathcal{M}_{\rho_i^0}^{-1} P_n \vec{q}_0^{(i)},$$

и , следовательно,

$$\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|\vec{u}^{(i)} - \vec{v}_*^{(i)}\right\|^2_{C^0(I,X_n)}\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{2}\left(C + \frac{1}{\underline{\rho}}\left\|\vec{q}_0^{(i)}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2} = \tilde{K}_1.$$

Таким образом, решение системы уравнений (26) априори принадлежит шару $\mathcal{B}_{\tilde{K}_1,T}(\vec{v}_*)$, $\vec{v}_* = (\vec{v}_*^{(1)},\vec{v}_*^{(2)})$, и поэтому, выбирая в качестве радиуса K_1 шара $\mathcal{B}_{K_1,\tau_0}$ число $K_1 \ge \tilde{\mathrm{K}}_1$, мы за конечное число шагов продолжим локальное решение уравнений (26) на произвольный конечный промежуток времени $[0,T]$.

Докажем теперь (27). Пусть $\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_n^{(i)}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(i)}(t)\vec{\psi}_j(x) \in C^0(I,X_n)$ – решение уравнений (26), которые в данном случае удобнее представить в форме (25). Для каждой базисной функции $\vec{\psi}_k(x)$, $k = 1,\ldots n$, из (25) (после дифференцирования по t) получаем тождества

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_i \vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\psi}_k(x)dx = \int_\Omega\Big[div\sigma^{(i)} - \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) - \delta\nabla(\rho_i^{\beta_i}) - div\Big(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}\Big) -$$

$$-\varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} + (-1)^{i+1}a\cdot\Big(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}\Big)\Big]\cdot\vec{\psi}_k(x)dx,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\mathrm{div}\sigma^{(i)} = \sum_{j=1}^{2}\{\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\,\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\}.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $C_k^{(i)}(t)$ и суммируя по k, получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_i\,|\vec{u}^{(i)}|^2\,dx-\int_\Omega \rho_i\vec{u}^{(i)}\frac{\partial\vec{u}^{(i)}}{\partial t}dx=\int_\Omega\Big[div\sigma^{(i)}-\nabla(\rho_i^{\gamma_i})-\delta\nabla(\rho_i^{\beta_i})-$$
$$-div\Big(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}\Big)-\varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}+(-1)^{i+1}a\cdot\Big(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}\Big)\Big]\cdot\vec{u}^{(i)}dx. \quad (28)$$

Так как $\rho_i(t)=S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})$, $i=1,2$, то имеют место следующие тождества:

$$\int_\Omega(\nabla(\rho_i^{\gamma_i}),\vec{u}^{(i)})dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{\rho_i^{\gamma_i}}{\gamma_i-1}dx+\varepsilon\gamma_i\int_\Omega\rho_i^{\gamma_i-2}\,|\nabla\rho_i|^2\,dx,\ i=1,2; \quad (29)$$

$$\delta\int_\Omega(\nabla(\rho_i^{\beta_i}),\vec{u}^{(i)})dx=\delta\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{\rho_i^{\beta_i}}{\beta_i-1}dx+\delta\varepsilon\beta_i\int_\Omega\rho_i^{\beta_i-2}\,|\nabla\rho_i|^2\,dx; \quad (30)$$

$$\int_\Omega\left(\rho_i\vec{u}^{(i)},\frac{\partial\vec{u}^{(i)}}{\partial t}\right)dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{1}{2}\rho_i\,|\vec{u}^{(i)}|^2\,dx+$$
$$+\int_\Omega(div\Big(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}\Big),\vec{u}^{(i)})dx+\varepsilon\int_\Omega((\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)})dx. \quad (31)$$

Из соотношений (28) – (31) и неравенства

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(div\sigma^{(i)},\vec{u}^{(i)})dx\ge c_0\int_\Omega\left(\left|\nabla\vec{u}^{(1)}\right|^2+\left|\nabla\vec{u}^{(2)}\right|^2\right)dx$$

получаем следующее энергетическое неравенство на решениях уравнений Галеркина (26):

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2}\rho_i\left|\vec{u}^{(i)}\right|^2+\frac{\rho_i^{\gamma_i}}{\gamma_i-1}+\frac{\delta}{\beta_i-1}\rho_i^{\beta_i}\right]dx+c_0\int_\Omega\left(\left|\nabla\vec{u}^{(1)}\right|^2+\left|\nabla\vec{u}^{(2)}\right|^2\right)dx+$$
$$+\varepsilon\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\left(\gamma_i\rho_i^{\gamma_i-2}+\delta\beta_i\rho_i^{\beta_i-2}\right)|\nabla\rho_i|^2\,dx+a\int_\Omega\left|\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}\right|^2dx\le 0. \quad (32)$$

Из неравенств (32), в частности, следуют оценки

$$\int_\Omega\rho_{k,n}\left|\vec{u}_n^{(k)}\right|^2dx\le\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},\ k=1,2,$$

$$\int_0^t\left(\left\|\vec{u}^{(1)}(\tau)\right\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}+\left\|\vec{u}^{(2)}(\tau)\right\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\right)dx\le\frac{1}{c_0(\Omega)}\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},\ 0<t<T. \quad (33)$$

В силу оценки (21) леммы 3 имеем

$$\rho_{i,n}(t)=S_{\rho_i^0}(\vec{u}_n^{(i)})(t,x)\ge\underline{\rho}\exp\left\{-\int_0^t\left\|\vec{u}_n^{(i)}(\tau)\right\|_{1,\infty}d\tau\right\}\ge\underline{\rho}\exp\left\{-\int_0^t c(n)\left\|\vec{u}_n^{(i)}(\tau)\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}d\tau\right\}.$$

Из этого соотношения и неравенства

$$\int_0^t\left\|\vec{u}_n^{(i)}(\tau)\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}d\tau\le\sqrt{T}\left(\frac{1}{c_0}\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}\right)^{1/2}$$

вытекает, что

$$\rho_{i,n}(t) \geq \underline{\rho} \exp\left\{-c(n)\sqrt{T\frac{1}{c_0}\hat{\mathrm{E}}_{\delta,0}}\right\},$$

и поэтому из первого неравенства в (33) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} |\vec{u}_n^{(k)}|^2\, dx \leq \hat{\mathcal{E}}_{\delta,0} \cdot \underline{\rho}^{-1} \cdot exp\left\{c(n)\sqrt{\frac{T}{c_0}\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}}\right\},\ \ k = 1,2.$$

Таким образом, оценка (27) и теорема 5 доказаны.

Априорные оценки решений уравнений (26)

Лемма 6. *Предположим, что* $\beta_i \geq 4$, $i = 1,2$. *Пусть* $\vec{u}_n^{(i)}$, $i = 1,2$, *– решение* (*26*) *и* $\rho_{i,n} = S_{\rho_i^0}\left(\vec{u}_n^{(i)}\right)$, *т.е.* $\rho_{i,n}$ *– решение задач*

$$\partial_t(\rho_{i,n}) + \operatorname{div}(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}) = \varepsilon\Delta\rho_{i,n} \ \text{ в } \ Q_T,$$

$$\nabla\rho_{i,n} \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\partial\Omega,$$

$$\rho_{i,n}\big|_{t=0} = \rho_i^0,\ \ i = 1,2.$$

Тогда имеют место следующие оценки, не зависящие от номера n,

$$\sup_{t\in[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\|\rho_{i,n}(t)\|^{\gamma_i}_{L^{\gamma_i}(\Omega)} \leq \max_k(\gamma_k - 1)\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},\ \ \delta\cdot ess\sup_{t\in[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\|\rho_{i,n}(t)\|^{\beta_i}_{L^{\beta_i}(\Omega)} \leq \max_k(\beta_k - 1)\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\|\sqrt{\rho_{i,n}(t)}\,\vec{u}_n^{(i)}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},\ \int\limits_0^T\left(\|\vec{u}_n^{(i)}(t)\|^2_{1,2} + \|\vec{u}_n^{(2)}(t)\|^2_{1,2}\right)dt \leq c_0^{-1}\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}; \qquad (34)$$

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T \|\nabla\rho_{i,n}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leq C(\beta_i, \delta, \rho_i^0, \vec{q}_0^{(i)}), \qquad (35)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_{i,n}\|_{L^{\beta_i+1}(Q_T)} \leq C(\beta_i, \delta, \rho_i^0, \vec{q}_0^{(i)}).$$

Величина $\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0}$ *определена выше и не зависит от* n *и параметра* ε.

Предельный переход в уравнениях неразрывности с диссипацией

Лемма 7. *Из последовательности* $\vec{u}_n^{(i)}$, $\rho_{i,n} = S_{\rho_i^0}(\vec{u}_n^{(i)})$, $n = 1,2,\ldots$, *решений уравнений* (*26*), *построенных в теореме 5*, *может быть выделена подпоследовательность* (*за которой сохраним прежнее обозначение*), *которая сходится при* $n\to\infty$ *в следующем смысле*:

$$\rho_{i,n} \to \rho_i \ \ *\text{– слабо в } \ L^\infty(I, L^{\beta_i}(\Omega)),\ \ \nabla\rho_{i,n} \to \nabla\rho_i \ \text{ слабо в } \ L^2(Q_T),$$

$$\vec{u}_n^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \ \text{ слабо в } \ L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)), \qquad (36)$$

$$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)), \tag{37}$$

$$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)} \ * - \text{слабо в } L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)), \tag{38}$$

$$\rho_{i,n} \to \rho_i \text{ сильно в } L^p(Q_T),\ 1 \le p < \frac{4}{3}\beta_i. \tag{39}$$

Предельные функции $\vec{u}^{(i)}$, ρ_i, $i = 1,2$, *принадлежат, следовательно, функциональным классам:*

$$\rho_i \in L^\infty(I, L^{\beta_i}(\Omega)), \quad \nabla\rho_i \in L^2(Q_T),\ \vec{u}^{(i)} \in L^2(I, W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\rho_i\vec{u}^{(i)} \in L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))$$

и удовлетворяют уравнениям неразрывности с диссипацией (9) в том смысле, что

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_i\eta_i(x)dx - \int_\Omega \rho_i\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\eta_i(x)dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla\rho_i\nabla\eta_i dx = 0 \text{ в } D'(I),\ \ \eta_i \in C^\infty\left(\mathbf{R}^3\right),\ i = 1,2.$$

Предельный переход в уравнениях баланса импульсов

Предварительно сформулируем дополнительные свойства решений краевой задачи (9), (10), (12), из которых следует, что предельные функции ρ_i, $\vec{u}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям (9) почти всюду в Q_T и граничным условиям (12) в смысле следов.

Лемма 8. *Существуют значения* $t_i \in \left[\frac{17}{16}, \frac{5}{4}\right)$, $r_i \in \left[\frac{34}{15}, \frac{10}{3}\right)$, $i = 1,2$, *такие, что последовательности* $\{\partial_t\rho_{i,n}\}$, $\{\nabla^2\rho_{i,n}\}$, $i = 1,2$, *ограничены в* $L^{t_i}(Q_T)$, *последовательности* $\{\nabla\rho_{i,n}\}$ *ограничены в* $L^{t_i}(I, L^{r_i}(\Omega))$, *последовательности* $\{\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}\}$ *ограничены в* $L^{t_i}(I, E_0^{r_i,t_i}(\Omega))$. *Следовательно, предельные функции* ρ_i, $\vec{u}^{(i)}$ *принадлежат тем же функциональным классам, т. е., в частности,*

$$\partial_t\rho_i \in L^{t_i}(Q_T),\ \nabla\rho_i \in L^{t_i}(I, L^{r_i}(\Omega)),\ i = 1,2,$$

$$\rho_i\vec{u}^{(i)} \in L^{t_i}(I, E_0^{r_i,t_i}(\Omega)),\ i = 1,2.$$

и удовлетворяют уравнениям (9) почти всюду в Q_T. *Начальные условия (10) выполнены в том смысле, что*

$$\rho_i \in C^0(\bar{I}, L^{p_i}(\Omega)),\ i = 1,2,\ 1 \le p_i < \beta_i.$$

Граничные условия (12) выполнены в смысле следа, т. е.

$$j_n(\nabla\rho_i) = 0,\ \ j_n(\rho_i\vec{u}^{(i)}) = 0, \text{ п.в. в } I.$$

Обратимся теперь к уравнениям баланса импульсов. Поскольку для каждого вектора $\vec{a} \in L^2(Q_T)$, $\partial_t \vec{a} \in L^2(Q_T)$ справедливо равенство $\partial_t(P_n\vec{a}) = P_n\partial_t\vec{a}$ п.в. в Q_T, то из уравнений (25) следуют тождества

$$\int_\Omega \partial_t P_n(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)})\cdot\vec{\varphi}dx = -\int_\Omega\sum_{j=1}^2 \mu_{ij}\nabla\vec{u}_n^{(j)} : \nabla(P_n\vec{\varphi})dx - \int_\Omega\sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\,\mathrm{div}\vec{u}_n^{(j)}\cdot\mathrm{div}(P_n\vec{\varphi})dx +$$
$$+\int_\Omega(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}\otimes\vec{u}_n^{(i)}) : \nabla(P_n\vec{\varphi})dx + \int_\Omega(\rho_{i,n}^{\gamma_i}+\delta\rho_{i,n}^{\beta_i})\,\mathrm{div}(P_n\vec{\varphi})dx - \int_\Omega\varepsilon(\nabla\rho_{i,n}\cdot\nabla)\vec{u}_n^{(i)}\cdot P_n(\vec{\varphi})dx +$$
$$+\int_\Omega(-1)^{i+1}a(\vec{u}_n^{(2)}-\vec{u}_n^{(1)})P_n\vec{\varphi}dx, t\in I,\ \vec{\varphi}\in D(\Omega),\ i=1,2. \tag{40}$$

В следующей лемме указаны свойства последовательностей, позволяющие совершить предельный переход в (40).

Лемма 9. *Последовательность решений уравнений Галеркина* (*26*) *обладает свойствами*:

• *Имеет место равномерная оценка*

$$\left\|\partial_t P_n(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)})\right\|_{L^{t_i}(I,W^{-2,2}(\Omega))} \le c(\hat{\mathcal{E}}_{\delta,0},\delta,\varepsilon),\ i=1,2;$$

• $\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)}$ *сильно в* $L^2(I,W^{-1,2}(\Omega))$, $i=1,2$;

$$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}\otimes\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(I,L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega)),\ i=1,2; \tag{41}$$

• $\|\rho_{i,n}(t)-\rho_i(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, $n\to\infty$, *равномерно по* $t\in[0,T]$;

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_{i,n}^2\,div\vec{u}_n^{(i)}\,dxd\tau \to \int_0^t\int_\Omega \rho_i^2\,div\vec{u}^{(i)}dxd\tau;$$

• $\nabla\rho_{i,n} \to \nabla\rho_i$ *сильно в* $L^2(Q_T)$, $i=1,2$; (42)

• $\nabla\rho_{i,n}\cdot\nabla\vec{u}_n^{(i)} \to \nabla\rho_i\cdot\nabla\vec{u}^{(i)}$ *слабо в* $L^1(Q_T)$, $i=1,2$;

• $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{Q_T}(\nabla\rho_{i,n}\cdot\nabla)\vec{u}_n^{(i)}\cdot P_n\vec{\varphi}dxdt = \int_{Q_T}(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dxdt$, $\forall\vec{\varphi}\in D(\Omega)$.

На основании леммы 9 может быть сделан следующий шаг в доказательстве теоремы 1, а именно доказаны предельные соотношения, перечисленные в следующей лемме.

Лемма 10. *Для каждого* $\vec{\varphi}\in D(\Omega)$ *справедливы формулы*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\sum_{j=1}^2\mu_{ij}\left(\nabla\vec{u}_n^{(j)} : \nabla(P_n\vec{\varphi}) - \nabla\vec{u}^{(j)} : \nabla\vec{\varphi}\right)dxd\tau = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})div\vec{u}_n^{(j)}\cdot div(P_n\vec{\varphi})dxd\tau = \int_{Q_T}\sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})div\vec{u}^{(j)}\cdot div\vec{\varphi}dxd\tau,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}\otimes\vec{u}_n^{(i)}) : \nabla(P_n\vec{\varphi})dxd\tau = \int_{Q_T}(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}) : \nabla\vec{\varphi}dxd\tau,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}(\rho_{i,n}^{\gamma_i}+\delta\rho_{i,n}^{\beta_i})div(P_n\vec{\varphi})dxd\tau=\int_{Q_T}(\rho_i^{\gamma_i}+\delta\rho_i^{\beta_i})div\vec{\varphi}dxd\tau,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\varepsilon(\nabla\rho_{i,n}\cdot\nabla)\vec{u}_n^{(i)}\cdot P_n(\vec{\varphi})dxd\tau=\int_{Q_T}\varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dxd\tau,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}(-1)^{i+1}a(\vec{u}_n^{(2)}-\vec{u}_n^{(1)})P_n\vec{\varphi}dxd\tau=(-1)^{i+1}\int_{Q_T}a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\vec{\varphi}dxd\tau.$$

В силу леммы 10 из (40) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega\partial_t P_n(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)})\cdot\vec{\varphi}dxd\tau=-\int_0^t\int_\Omega\sum_{j=1}^2\mu_{ij}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}dxd\tau-$$
$$-\int_0^t\int_\Omega\sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\,\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\cdot\mathrm{div}\vec{\varphi}dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}):\nabla\vec{\varphi}dxd\tau+\tag{43}$$
$$+\int_0^t\int_\Omega(\rho_i^{\gamma_i}+\delta\rho_i^{\beta_i})\,\mathrm{div}\vec{\varphi}dxd\tau-\varepsilon\int_0^t\int_\Omega(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dxd\tau+(-1)^{i+1}\int_0^t\int_\Omega a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\vec{\varphi}dxd\tau.$$

Отсюда, с учетом свойств (38) и свойств проектора видим, что

$$\rho_i\vec{u}^{(i)}\in L^\infty(I,L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)),\ i=1,2,\quad \partial_t\int_\Omega\rho_i\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}\in L^1(I),\ \vec{\varphi}\in D(\Omega),$$

и поэтому существуют $\vec{q}^{(i)}\in C^0(\overline{I},L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))$, $i=1,2$, такие, что для п. в. $t\in I$ имеет место равенство $\vec{q}^{(i)}(t)=\rho_i(t)\vec{u}^{(i)}(t)$ *п.в. в* Ω.. Более того, в результате изменения поля скоростей $\vec{u}^{(i)}$ на множестве нулевой меры в I получим, что

$$\rho_i\vec{u}^{(i)}\in C^0(\overline{I},L_{weak}^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)).$$

Отсюда следуют формулы

$$\lim_{t\to0+}\int_\Omega\rho_i\vec{u}_n^{(i)}\vec{\varphi}dx=\int_\Omega\vec{q}_0^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dx\ ,\ i=1,2.$$

Из формулы (43) в силу произвольности $t\in(0,T)$ следуют равенства

$$\partial_t\int_\Omega\rho_i\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dx=-\int_\Omega\sum_{j=1}^2\mu_{ij}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}dx-\int_\Omega\sum_{j=1}^2(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\,\mathrm{div}\vec{u}^{(j)}\cdot\mathrm{div}\vec{\varphi}dx+$$
$$+\int_\Omega(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}):\nabla\vec{\varphi}dx+\int_\Omega(\rho_i^{\gamma_i}+\delta\rho_i^{\beta_i})\,\mathrm{div}\vec{\varphi}dx-\varepsilon\int_\Omega(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}dx+$$
$$+(-1)^{i+1}\int_\Omega a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\vec{\varphi}dx,\ \ \vec{\varphi}\in D(\Omega)\ \text{п.в. на}\ I\ .$$

Отсюда, для каждой функции $g(t)\in D(I)$ получим тождества

$$-\int_0^T\int_\Omega \rho_i \vec{u}^{(i)}\cdot\vec{\varphi}\partial_t g dxdt = -\int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^2 \mu_{ij}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla(\vec{\varphi}g)dxdt - \int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\operatorname{div}\vec{u}^{(j)}\operatorname{div}(\vec{\varphi}g)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega (\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}):\nabla(\vec{\varphi}g)dxdt + \int_0^T\int_\Omega (\rho_i^{\gamma_i}+\delta\rho_i^{\beta_i})\operatorname{div}(\vec{\varphi}g)dxdt - \varepsilon\int_0^T\int_\Omega (\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)}\cdot(\vec{\varphi}g)dxdt +$$

$$+(-1)^{i+1}\int_0^T\int_\Omega a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\vec{\varphi}g dxdt,\ i=1,2. \qquad (44)$$

Поскольку семейство функций $\{\vec{\varphi}(x)\cdot g(t)\}$, $\vec{\varphi}\in D(\Omega)$, $g\in D(I)$ всюду плотно в $D(Q_T)$, то тождества (44) доказывают, что предельные функции $\rho_i=\rho_{i,\varepsilon,\delta}$, $\vec{u}^{(i)}=\vec{u}^{(i)}_{\varepsilon,\delta}$ удовлетворяют регуляризованным уравнениям баланса импульсов (8).

Доказательство априорных оценок (v) теоремы 1

Из неравенств (34), (35) и формул (36) в силу слабой полунепрерывности снизу норм получаем оценки (13), (14). Из (38), (34) следует оценка (15). Оценка (16) вытекает из (37). Оценка (17) есть следствие результатов о регулярности решений параболической задачи Неймана. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajagopal K.R., Tao L.* Mechanics of Mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
2. *Крайко А.Н., Нигматулин Р.И.* Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. гидромеханика. 1972. Т. 6. С. 93–174.
3. *Кажихов А.В., Петров А.Н.* Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. № 35. С. 61–73.
4. *Петров А.Н.* Корректность начально-краевой задачи для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1982. Вып. 56. С. 105–121.
5. *Злотник А.А.* Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Математические заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 307–312.
6. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36. No. 4. P. 1259–1281.
7. *Frehse J., Goj S., Malek J.* A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum // Appl. Math. 2005. V. 50. No. 6. P. 527–541.
8. *Frehse J., Weigant W.* On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. 2008. V. 53. No. 4. P. 319–345.
9. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 3 (31). С. 52–65.
10. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Вестник Новосибирского государственного университета. 2009. Т. 9. № 3. С. 33–53.
11. *Кучер Н.А., Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 6 (31). С. 1338–1353. DOI: 10.1134/S0037446612060110.
12. *Novotny A., Straskraba I.* Introduction to mathematical theory of compressible flow. New York: Oxford University Press, 2004.

Статья поступила 27.01.2019 г.

Kucher N.A., Zhalnina A.A., Malyshenko O.V. (2020) ON THE EXISTENCE OF STRONG SOLUTIONS TO REGULARIZED EQUATIONS OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID MIXTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 31–47

DOI 10.17223/19988621/64/3

Keywords: mixture of viscous compressible fluids, inhomogeneous boundary value problem, strong solution.

Mathematical results (statements of problems, theorems on the existence and uniqueness, properties of solutions, etc.) on models of multi-velocity continuums by which the motion of multicomponent mixtures is described are rather modest in comparison with results on classical one-component media. This paper aims to fill this gap to some extent and is devoted to the study of the global correctness of the initial boundary value problem for equations of unsteady spatial motions of a mixture of viscous compressible fluids.

This paper is the first part of an extensive research that studies regularization of a mathematical model for unsteady spatial flows of a viscous compressible fluids mixture. The construction of the solution of the regularized problem is the key step for the mathematical analysis of the original mixture model because it allows to obtain globally defined solutions of the latter by passing to the limit. In addition, the proposed algorithm for constructing solutions to the regularized problem is constructive. This algorithm is based on the procedure of finite-dimensional approximation of the infinite-dimensional problem and the result is a mathematically well-grounded algorithm for the numerical solution of the boundary value problem of the motion of a viscous compressible fluids mixture in the region bounded by solid walls. The local time solvability of finite-dimensional problems is proved by applying the contraction mapping principle. With the help of a priori estimates, the possibility to extend the local solution for an arbitrary period of time, as well as the possibility of a passage to the limit to an infinite-dimensional problem is established. Finally, we obtain the result on the existence and uniqueness of a globally defined strong solution to the regularized problem.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 35D35, 35Q35, 35B65

Nikolay A. KUCHER (Doctor of Physics and Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: nakycher@rambler.ru

Alexandra A. ZHALNINA (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: qwert1776@yandex.ru

Olga V. MALYSHENKO (Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation) E-mail: molga81@list.ru

REFERENCES

1. Rajagopal K.R., Tao L. (1995) *Mechanics of Mixtures*. Singapore: World Sci. Publ.
2. Kraiko A.N., Nigmatulin R.I. (1972) Mekhanika mnogofaznykh sred [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki. Gidromekhanika*. 6. pp. 93–174 [in Russian].
3. Kazhikov A.V., Petrov A.N. (1978) Korrektnost’ nachal’no-kraevoy zadachi dlya model’noy sistemy uravneniy mnogokomponentnoy smesi [Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture]. *Dinamika sploshnoy sredy*. 35. pp. 61–73 [in Russian].
4. Petrov A.N. (1982) Korrektnost’ nachal’no-krayevoy zadachi dlya odnomernykh uravneniy vzaimopronikayushchego dvizheniya sovershennykh gazov [Well-posedness of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of mutually penetrating motion of perfect gases]. *Dinamika sploshnoy sredy*. 56. pp. 105–121 [in Russian].
5. Zlotnik A.A. (1995) Ravnomernye otsenki i stabilizatsiya resheniy sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya mnogokomponentnoy barotropnoy smesi [Uniform estimates and

stabilization of solutions to a system of equations of the one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture]. *Matematicheskie zametki*. 58(2). pp. 307–312 [in Russian].
6. Frehse J., Goj S., Malek J. (2005) On a Stokes-like system for mixtures of fluids. *SIAM J. Math. Anal*. 36(4). pp. 1259–1281.
7. Frehse J., Goj S., Malek J. (2005) A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum. *Appl. Math.* 50(6). pp. 527–541.
8. Frehse J., Weigant W. (2008) On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids. *Appl. Math.* 53(4). pp. 319–345.
9. Kucher N.A., Prokudin D.A. (2009) Statsionarnye resheniya uravneniy smesi vyazkikh szhimaemykh zhidkostey [Stationary solutions to the equations of a mixture of viscous compressible fluids]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki.* 12(3). pp. 52–65 [in Russian].
10. Kucher N.A., Prokudin D.A. (2009) Korrektnost' pervoy krayevoy zadachi dlya uravneniy smesey vyazkikh szhimayemykh zhidkostey [Well-posedness of the first boundary value problem for equations of mixtures of viscous compressible fluids]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mat. Mekh. Inform.* 9(3). pp. 52–65 [in Russian].
11. Kucher N.A., Mamontov A.E., Prokudin D.A. (2012) Stationary solutions to the equations of dynamics of mixtures of heat-conductive compressible viscous fluids. *Sib. Math. J.* 53(6). pp. 1075–1088. DOI: 10.1134/S0037446612060110.
12. Novotny A., Straskraba I. (2004) *Introduction to mathematical theory of compressible flow*. New York: Oxford University Press.

Received: January 21, 2019