

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/64/9

М.В. Мир-Салим-заде

РАВНОПРОЧНОЕ ОТВЕРСТИЕ ДЛЯ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ

На основе принципа равнопрочности дается решение обратной упругой задачи об определении оптимальной формы контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами. Критерием, определяющим оптимальную форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности отверстия и требование равенства нулю коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин.

Ключевые слова: *стрингерная пластина, трещины, равнопрочное отверстие.*

Усиленные стрингерами тонкие пластины с технологическими отверстиями используются в различных конструкциях. Отверстия при этом являются концентраторами напряжений и могут привести к преждевременному разрушению. Поэтому представляет интерес найти такой контур отверстия в пластине, подкрепленной ребрами жесткости (стрингерной пластине), который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков (равнопрочный контур) [1]. Задачи по определению равнопрочных контуров рассматривались в работах [1–23]. Весьма важно при определении равнопрочного контура учитывать возможность наличия в теле трещин [24], однако к настоящему времени эта проблема не изучена. В настоящей статье решается задача по отысканию оптимальной формы контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами. Требуется, чтобы отсутствовала концентрация напряжений вблизи отверстия, а трещины не росли.

Постановка задачи

Рассмотрим неограниченную тонкую пластину, усиленную регулярной системой стрингеров. Пластина толщиной h ослаблена отверстием и двумя прямолинейными трещинами (рис. 1). Полагается, что пластина и стрингеры изотропные и выполнены из различных упругих материалов. На бесконечности усиленная пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$.

Принимаются следующие допущения: при деформации толщина стрингеров остается неизменной, а напряженное состояние – одноосным. Стрингеры изгиба не подвергаются и работают лишь на растяжение; в пластине реализуется плоское напряженное состояние; система стрингеров ферменного типа, ослабление стрингеров за счет постановки точек крепления не учитывается; пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами.

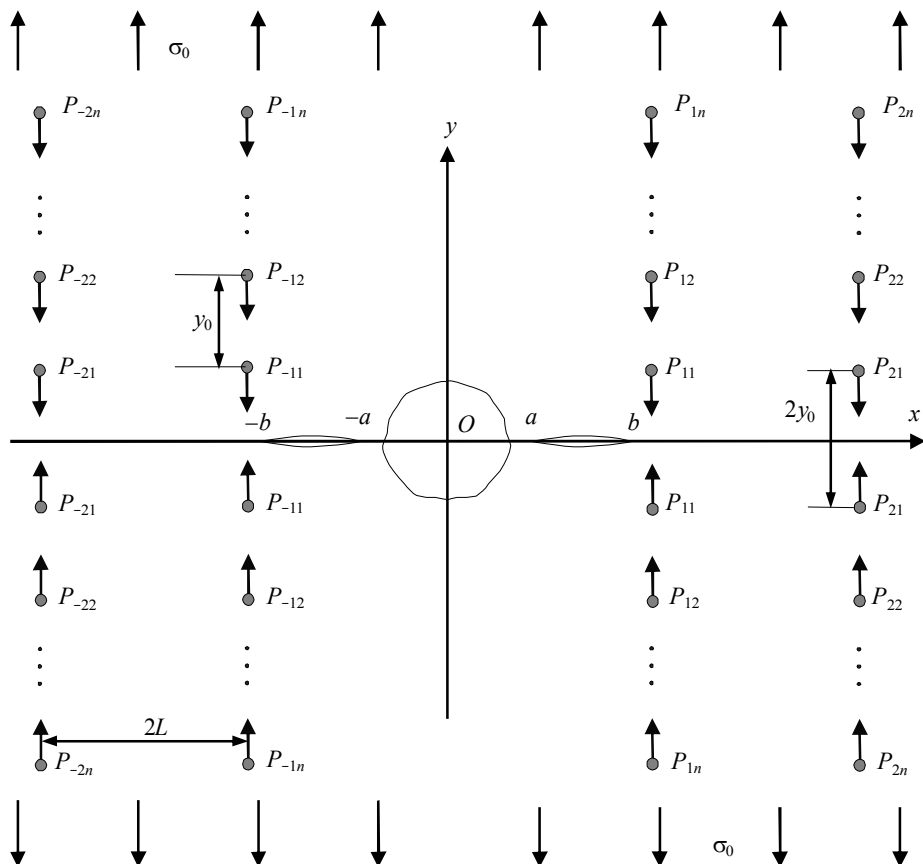


Рис. 1. Расчетная схема задачи
Fig. 1. Schematic diagram of the problem

Действие точек крепления моделируется действием сосредоточенных сил, приложенных в точках, соответствующих центрам точек крепления. Считается, что крепления стрингеров расположены в дискретных точках $z = \pm(2m + 1)L \pm iky_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$) с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины.

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер с пластиной. Величины сосредоточенных сил подлежат определению в ходе решения задачи.

На неизвестном контуре L_0 отверстия граничные условия имеют вид

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0; \quad (1)$$

на берегах трещин

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (2)$$

Здесь t и n – касательная и нормаль к контуру отверстия.

Требуется найти такую форму отверстия, при которой не будет происходить рост трещин, а тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на кон-

туре, будет постоянной величиной. Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована, за параметр, характеризующий напряженное состояние в окрестности вершин трещин принят коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, требуем, чтобы выполнялись условия

$$\text{на контуре отверстия } \sigma_t = \sigma_* = \text{const}; \quad (3)$$

$$K_I^a = 0, \quad K_I^b = 0. \quad (4)$$

Здесь K_I^a , K_I^b – коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Так как трещины расположены симметрично, $K_I^a = K_I^{-a}$, $K_I^b = K_I^{-b}$.

Отверстия, удовлетворяющие условию (3), называются равнопрочными [2].

Граничное условие (3) и дополнительное условие (4) служат для определения оптимальной (равнопрочной) формы отверстия. Величина σ_* неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Рассматриваемая задача состоит в определении равнопрочного контура отверстия, величин сосредоточенных сил P_{mn} , напряженно-деформированного состояния усиленной пластины.

Метод решения

Будем искать неизвестный заранее контур L_0 отверстия в классе контуров, близких к круговым. Представим неизвестный контур L_0 в виде

$$r = \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta), \quad (5)$$

в котором функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения обратной задачи. Здесь $\varepsilon = R_{\max}/R$ – малый параметр; $R_{\max}$ – наибольшая высота неровности профиля контура L_0 отверстия от окружности $r = R$.

Отыскание неизвестного контура в виде (5) упрощает решение задачи, кроме того, такие отверстия проще технологически изготовить.

Не уменьшая общности рассматриваемой задачи, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде ряда Фурье $H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos 2k\theta$.

Искомые функции (напряжения, перемещения, сосредоточенные силы P_{mn} , коэффициенты интенсивности напряжений) будем искать в виде разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, \quad \sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, \quad v_n = v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots, \\ P_{mn} &= P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots, \\ K_I &= K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости.

Значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$. Воспользовавшись известными формулами [25] для компонент напряжений σ_n и $\tau_{n\theta}$, краевые условия задачи примут следующий вид:

для нулевого приближения:

$$\text{на контуре } r = R \quad \sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \quad (7)$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b; \quad (8)$$

для первого приближения:

$$\text{на контуре } r = R \quad \sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T; \quad (9)$$

$$\text{на берегах трещин } \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}, \quad T = -H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}.$$

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [25] и граничных условий (7), (8) на контуре отверстия и берегах трещин задача в нулевом приближении сводится к определению двух аналитических функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ из краевого условия

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] = 0 \quad \text{при } \tau = R e^{i\theta}; \quad (11)$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi^{(0)'}}(x) + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (12)$$

Решение краевой задачи (11) – (12) ищем в виде ($k = 0$)

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z) + \Phi_2^{(k)}(z), \quad \Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z) + \Psi_2^{(k)}(z). \quad (13)$$

Здесь потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$, $\Psi_0^{(0)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций в сплошной пластине под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ и σ_0 и определяются следующими формулами:

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)}(z) = & \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ & + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{mn} P_{mn}^{(0)} \left[\frac{mL - iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $m = n = 0$.

Функции $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t - z} dt, \quad (15)$$

$$\Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g^{(0)}(t) dt,$$

где $L_1 = [a, b] + [-a, -b]$; $g^{(0)}(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$; μ – модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция $g^{(0)}(x)$ и потенциалы $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$ должны быть определены из краевых условий (11) – (12). Представим граничное условие (12) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_2^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_2^{(0)'}(\tau) + \Psi_2^{(0)}(\tau)] = \\ = -\Phi_*^{(0)}(\tau) - \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} + e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_*^{(0)'}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau)], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \Phi_1^{(0)}(\tau)$, $\Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_0^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)$.

Для решения краевой задачи (16) (определения потенциалов $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$) воспользуемся решением Н.И. Мусхелишвили [25]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(z) = \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g^{(0)}(t) dt - \\ - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \\ + \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(z) = \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2^{(0)'}(z)}{z^2} + \frac{1}{2\pi z} \int_{L_1} \left[\frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g^{(0)}(t) dt + \\ + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}. \end{aligned}$$

В формулах (17) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия R .

Требуя, чтобы функции (13) при $k=0$ удовлетворяли краевому условию (12) на берегах трещин, получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(0)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(0)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g^{(0)}(t) dt = F(x), \quad (18)$$

$$K(t, x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3 - x - 2t + 2t^2 x - x^3 t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$F(x) = f_0^{(0)}(x) + f_1^{(0)}(x),$$

$$\begin{aligned}
f_0^{(0)}(x) = & -\sigma_0 + \frac{\kappa + 2}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x - mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \left[\frac{1}{(x + mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x - mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x - mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x + mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x + mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\
f_1^{(0)}(x) = & -\frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\
& \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\
& + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
& - 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
& + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \left. \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times \\
& \times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\
& + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4}.
\end{aligned}$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения (18) используем метод прямого решения сингулярных уравнений [26, 27]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g^{(0)}(\eta) = \frac{g_0^{(0)}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (19)$$

где $g_0^{(0)}(\eta)$ – ограниченная функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$; она заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Используя процедуру алгебраизации [26, 27], получим, что сингулярное интегральное уравнение (18) при дополнительном условии, которое обеспечивает однозначность перемещений при обходе контуров трещин

$$\int_a^b g_0^{(0)}(t)dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(0)}(t)dt = 0, \quad (20)$$

сводится к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(0)}(\tau_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(0)} = f_0^{(0)}(\eta_m) + f_1^{(0)}(\eta_m), \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(0)}(\eta_m) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где $m = 1, 2, \dots, M - 1$; $A_{mk} = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + K_0(\eta_m, \tau_k) \right]$;

$g_k^{(0)} = g^{(0)}(\tau_k)$; $\eta_m = \cos \theta_m$; $\theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi$; $\eta_m = \cos \theta_m$; $\tau_k = \eta_k$.

Для определения неизвестных сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$ используем закон Гука, согласно которому величина сосредоточенной силы $P_{mn}^{(0)}$, действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где E_s – модуль Юнга материала стрингера, A_s – поперечное сечение стрингера, $2y_0 n$ – расстояние между точками крепления, $\Delta v_{mn}^{(0)}$ – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a_0 радиус точки крепления. Примем [28] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $mL + i(ny_0 - a_0)$ и $mL - i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления $\Delta v_{mn}^{(0)}$. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет отыскать решение задачи.

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [25] и соотношения (13) – (15), (17), найдем взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(0)}$ указанных точек. Ввиду громоздкости эти выражения не приводятся. Решая системы (20) и (21), определим величины сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$, приближенные значения $g^{(0)}(\tau_m)$ в узловых точках и тем самым комплексные потенциалы нулевого приближения.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x = a$ в нулевом приближении имеем

$$K_1^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(0)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \quad (22)$$

в окрестности вершины трещины $x = b$:

$$K_1^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

По формулам Колосова – Мухелишвили и соотношениям (13) находятся компоненты напряжений в усиленной пластине в нулевом приближении. Зная напряженное состояние в нулевом приближении, находим функции N и T .

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к решению задачи в первом приближении. Граничные условия задачи для первого приближения запишутся в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\overline{\tau \Phi^{(1)'}}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = N - iT; \quad (23)$$

$$\Phi^{(1)}(x) + \overline{\Phi^{(1)}(x)} + x \overline{\Phi^{(1)'}}(x) + \overline{\Psi^{(1)}(x)} = 0, \quad a \leq |x| \leq b. \quad (24)$$

Решение краевой задачи (23) аналогично нулевому приближению ищем в виде (13) при $k = 1$, где потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$ и $\Psi_0^{(1)}(z)$ описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил $P_{mn}^{(1)}$ и определяются формулами, аналогичными (14), в которых следует положить σ_0 равными нулю и $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$.

Потенциалы $\Phi_1^{(1)}(z)$ и $\Psi_1^{(1)}(z)$ ищем в виде, аналогичном (15), при этом функцию $g^{(0)}(x)$ следует заменить на $g^{(1)}(x)$.

$\Phi_2^{(1)}(z)$ и $\Psi_2^{(1)}(z)$ находим из граничного условия (23), вновь используя метод Н.И. Мухелишвили:

$$\Phi_2^{(1)}(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_2^{(1)}(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}. \quad (25)$$

Здесь $\Phi_*^{(1)}(z)$, $\Psi_*^{(1)}(z)$ определяются формулами, аналогичными (17), в которых следует положить σ_0 равным нулю, $P_{mn}^{(0)}$ заменить на $P_{mn}^{(1)}$, $g^{(0)}(x)$ заменить на $g^{(1)}(x)$. Коэффициенты a_{2k} и b_{2k} находятся по формулам

$$a^{2n} = C_{2n} R^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_0 = 0, \\ b_{2n} = (2n-1)R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2} \quad (n \geq 2), \quad (26)$$

$$b_0 = 0, \quad b_2 = -C_0 R^2, \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} e^{-2ki\theta}.$$

Для сосредоточенных $P_{mn}^{(1)}$ имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)}, \quad (27)$$

где взаимное смещение $\Delta v_{mn}^{(1)}$ определяется аналогично нулевому приближению.

Требуя, чтобы функции (13) при $k = 1$ удовлетворяли краевому условию (24) на берегах трещин в первом приближении, получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g^{(1)}(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g^{(1)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g^{(1)}(t) dt = F^{(1)}(x), \quad (28)$$

$$K(t, x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[\frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right],$$

$$F^{(1)}(x) = f_0^{(1)}(x) + f_1^{(1)}(x),$$

$$f_0^{(1)}(x) = \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n y_0 \left[\frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} n y_0 \left[\frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\},$$

$$f_1^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(1)} n \left\{ \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle +$$

$$+ \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right.$$

$$\left. -4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left\} -$$

$$- \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(1)} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times$$

$$\times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\ \left. + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[\frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \Bigg\}.$$

Как и в нулевом приближении, используя процедуру алгебраизации [26, 27], сингулярное интегральное уравнение (28) при дополнительном условии, обеспечивающем однозначность перемещений при обходе контуров трещин в первом приближении

$$\int_a^b g_0^{(1)}(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^{-b} g_0^{(1)}(t) dt = 0, \quad (29)$$

сводим к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(1)}(\tau_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(1)} = f_0^{(1)}(\eta_m) + f_1^{(1)}(\eta_m), \\ \sum_{k=1}^M g_k^{(1)}(\eta_m) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

где $m = 1, 2, \dots, M-1$; $g_k^{(1)} = g^{(1)}(\tau_k)$.

В первом приближении для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при $x = a$ имеем

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \quad (31)$$

в окрестности вершины трещины $x = b$:

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Полученные системы уравнений первого приближения не являются пока замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты d_{2k} разложения функции $H(\theta)$ в ряд Фурье.

Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (3) при дополнительных ограничениях (4). С помощью полученного решения, найдем σ_t в поверхностном слое контура L_0 ($r = \rho(\theta)$) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)}(\theta) \Big|_{r=R} + \varepsilon \left[H(\theta) \frac{\sigma_t^{(0)}(\theta)}{\partial r} + \sigma_t^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}. \quad (32)$$

Напряжения $\sigma_t^{(1)}(\theta)$ зависят от коэффициентов d_{2k} ряда Фурье искомой функции $H(\theta)$. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты d_{2k} , требуем, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контуре отверстия, близкое к равномерному.

Снижение концентрации напряжений на контуре отверстия осуществляем путем минимизации критерия

$$U = \sum_{i=1}^M [\sigma_i(\theta_i) - \sigma_*]^2 \rightarrow \min. \quad (33)$$

Здесь σ_* – неизвестное оптимальное значение нормального тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия.

Поставленная задача оптимизации состоит в том, чтобы найти значения неизвестных коэффициентов d_{2k} , обеспечивающие наилучшим образом величины функции $\sigma_i(\theta_i)$ согласно условию (3) при дополнительных ограничениях (4). Функция U и коэффициенты интенсивности напряжений зависят от коэффициентов d_{2k} , и таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, когда коэффициенты d_{2k} связаны с дополнительным условием

$$K_1^a = 0, \quad K_1^b = 0. \quad (34)$$

Необходимо найти минимальное значение функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, причем $k + 1$ аргумент этой функции не являются независимыми, а подчинены двум добавочным условиям (34).

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_0 = U + \lambda_1 K_1^a + \lambda_2 K_1^b$$

с двумя неопределенными множителями λ_1, λ_2 .

$k + 1$ необходимых условий экстремума имеют вид

$$\frac{\partial U_0}{\partial d_{2k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_*} = 0. \quad (35)$$

Полученные $n + 1$ уравнение с двумя добавочными уравнениями (34) составляют систему уравнений с $n + 1 + 2$ неизвестными σ_*, d_{2k} ($k = 1, 2, \dots, n$), λ_1, λ_2 . Добавляя эту систему уравнений к полученным ранее алгебраическим системам (27), (30), получаем замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе σ_* и коэффициентов d_{2k} .

Система уравнений (35) совместно с полученными алгебраическими системами задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить форму равнопрочного контура, напряженно-деформированное состояние стрингерной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_* .

При выполнении расчетов полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Отрезок $[0, 2\pi]$ изменения переменной θ разбивали на M равных частей, где $M > 2m + 1$, m – число оставленных параметров для практических расчетов.

Расчеты проводились для следующих значений свободных параметров: $a_0/L = 0.01$; $y_0/L = 0.25$. Стрингеры считались выполненными из композита АІ-сталь, а пластина из сплава В95, $E = 7.1 \cdot 10^4$ МПа; $E_s = 11.5 \cdot 10^4$ МПа. Для упрощения было принято: $A_s/y_0h = 1$. Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14, а величина $M = 72$. Результаты расчетов коэффициентов разложения искомой функции $H(\theta)$ приводятся в таблице.

Значения коэффициентов Фурье для равнопрочного контура

a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}
0.1081	-0.0874	0.0562	0.0372	-0.0234	0.0016	0.0007

Выводы

Таким образом, предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения стрингерной пластины с отверстием. Полученное решение дает возможность повысить прочность подкрепленной стрингерами пластины с отверстием. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая найти оптимальную форму контура отверстия для стрингерной пластины, ослабленной двумя прямолинейными трещинами в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и стрингеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 57–60.
2. Черепанов Г.П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963–979. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(75\)90085-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90085-4).
3. Мирсалимов В.М. Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе // Прикл. механика и техн. физика. 1974. Т. 15. № 6. С. 133–136. <https://doi.org/10.1007/BF00864606>.
4. Мирсалимов В.М. Обратная задача теории упругости для анизотропной среды // Прикл. механика и техн. физика. 1975. Т. 16. № 4. С. 190–193. <https://doi.org/10.1007/BF00858311>.
5. Куришин Л.М., Оноприенко П.Н. Определение форм двухсвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1078–1084. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90144-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90144-1).
6. Вигдергауз С.Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 566–569. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90046-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90046-0).
7. Wheeler L. On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration // Int. J. of Solids and Structures. 1976. V. 12. Iss. 11. P. 779–789. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(76\)90042-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(76)90042-1).
8. Баничук Н.В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 920–925. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90179-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90179-4).
9. Мирсалимов В.М. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. Т. 12. № 4. С. 147–154.
10. Вигдергауз С.Б. Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 902–908. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90176-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90176-9).
11. Мирсалимов В.М. Равнопрочная выработка в горном массиве // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1979. Т. 15. №4. С. 24–28. <https://doi.org/10.1007/BF02499529>.
12. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
13. Остросаблин Н.И. Равнопрочное отверстие в пластине при неоднородном напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 2. С. 155–163. <https://doi.org/10.1007/BF00907959>.
14. Wheeler L.T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. V. 45. Iss. 1. P. 1–12. doi:10.1115/1.3119743.

15. Cherepanov G.P. Optimum shapes of elastic solids with infinite branches // J. Appl. Mech. ASME. 1995. V. 62. Iss. 2. P. 419–422. doi:10.1115/1.2895947.
16. Саврук М.П., Кравец В.С. Применение метода сингулярных интегральных уравнений для определения контуров равнопрочных отверстий в пластинах // Физико-химическая механика материалов. 2002. Т. 38. № 1. С. 31–40. <https://doi.org/10.1023/A: 1020116613794>.
17. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2007. V. 145. P. 23–34.
18. Мир-Салим-заде М.В. Обратная упругопластическая задача для клепаной перфорированной пластины // Совр. проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сб. статей. Тверь: ТГТУ, 2007. С. 238–246.
19. Kapanadze G. On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2007. V. 143. P. 61–71.
20. Мир-Салим-заде М.В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Материалы, технологии, инструменты. 2007. Т. 12. № 4. С. 10–14.
21. Cherepanov G.P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18. № 5. С. 114–123. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>.
22. Калантарлы Н.М. Равнопрочная форма отверстия для торможения роста трещины продольного сдвига // Проблемы машиностроения. 2017. Т. 20. № 4. С. 31–37.
23. Vigdergauz S. Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. V. 23. Iss. 5. P. 805–819. <https://doi.org/10.1177/1081286517691807>.
24. Мирсалимов В.М. Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2019. Т. 55. № 1. С. 12–21. DOI: 10.15372/FTPRPI20190102.
25. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
26. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
27. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
28. Мирсалимов В.М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // Физико-химическая механика материалов. 1986. Т. 22. №1. С. 84–88. <https://doi.org/10.1007/BF00720871>.

Статья поступила 21.03.2019 г.

Mir-Salim-zada M.V. (2020) AN EQUI-STRESS HOLE FOR A STRINGER PLATE WITH CRACKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 121–135

DOI 10.17223/19988621/64/9

Keywords: stringer plate, cracks, equi-stress hole.

Based on the equivalent strength criterion, an effective solution to the inverse elastic problem of the determining of an optimal shape of the hole contour is proposed for an elastic infinite plate reinforced by stringers. The plate is weakened by two rectilinear cracks. According to the Irwin-Orowan theory of quasi-brittle fracture, the stress intensity factor in the vicinity of the cracks' tips is adopted as a parameter characterizing the stress state in this same region. The criterion determining the optimal shape of the hole is represented as a condition of the absence of the stress concentration on the hole surface and a requirement that the stress intensity factors are zero in the vicinity of the crack tips. An apparatus of the theory of analytic functions and theory of singular integral equations is used. The formulated problem is reduced to a conditional extremum problem. A closed system of algebraic equations is obtained, which allows minimization of the stress state

and stress intensity factors depending on the geometric and mechanical characteristics of the stringer plate. The action of the stringers is replaced by unknown equivalent concentrated forces at the points where the stringers join the plate.

Minavar V. MIR-SALIM-ZADA (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan). E-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az

REFERENCES

1. Cherepanov G.P. (1963) Obratnaya uprugoplasticheskaya zadacha v usloviyakh ploskoy deformatsii [Inverse elastic-plastic problem under plane deformation]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroyeniye*. 2. pp. 57–60.
2. Cherepanov G.P. (1974) Inverse problems of the plane theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 38(6). pp. 915–931. DOI: 10.1016/0021-8928(75)90085-4.
3. Mirsalimov V.M. (1974) On the optimum shape of apertures for a perforated plate subject to bending. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 15(6). pp. 842–845. DOI: 10.1007/BF00864606.
4. Mirsalimov V.M. (1975) Converse problem of elasticity theory for an anisotropic medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 16(4). pp. 645–648. DOI: 10.1007/BF00858311.
5. Kurshin L.M., Onoprienko P.N. (1976) Determination of the shapes of doubly-connected bar sections of maximum torsional stiffness. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 40(6). pp. 1020–1026. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90144-1.
6. Vigdergauz S.B. (1976) Integral equations of the inverse problem of the theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 40(3). pp. 518–522. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90046-0.
7. Wheeler L. (1976) On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration. *International Journal of Solids and Structures*. 12(11). pp. 779–789. DOI: 10.1016/0020-7683(76)90042-1.
8. Banichuk N.V. (1977) Optimality conditions in the problem of seeking the hole shapes in elastic bodies. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 41(5). pp. 946–951. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90179-4.
9. Mirsalimov V.M. (1977) Inverse doubly periodic problem of thermoelasticity. *Mechanics of Solids* 12(4). pp. 147–154.
10. Vigdergauz S.B. (1977) On a case of the inverse problem of two-dimensional theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 41(5). pp. 927–933. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90176-9.
11. Mirsalimov V.M. (1979) A working of uniform strength in the solid rock. *Soviet Mining*. 15(4). pp. 327–330. DOI: 10.1007/BF02499529.
12. Banichuk N.V. (1980) *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Shape optimization for elastic bodies]. Moscow: Nauka.
13. Ostrosablin N.I. (1981) Equal-strength hole in a plate in an inhomogeneous stress state. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 22(2). pp. 271–277. DOI: 10.1007/BF00907959.
14. Wheeler L.T. (1992) Stress minimum forms for elastic solids. *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 45(1). pp. 1–12. DOI: 10.1115/1.3119743.
15. Cherepanov G.P. (1995) Optimum shapes of elastic solids with infinite branches. *Journal of Applied Mechanics*. ASME. 62(2). pp. 419–422. DOI: 10.1115/1.2895947.
16. Savruk M.P., Kravets V.S. (2002) Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates. *Materials Science*. 38(1). pp. 34–46. DOI: 10.1023/A:1020116613794.
17. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. (2007) The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*. 145. pp. 23–34.

18. Mir-Salim-zada M.V. (2007) Obratnaya uprugoplasticheskaya zadacha dlya klepanoy perforirovannoy plastiny [Inverse elastoplastic problem for a riveted perforated plate]. *Sbornik statey "Sovremennye problemy prochnosti, plastichnosti i ustoychivosti" – Collected papers "Modern problems of strength, plasticity, and stability"*. Tver': TGTU. pp. 238–246.
19. Kapanadze G. (2007) On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*. 143. pp. 61–71.
20. Mir-Salim-zada M.V. (2007) Opredelenie formy ravnoprochnogo otverstiya v izotropnoy srede, usilennoy regul'yarnoy sistemoy stringerov [Determination of an equistrong hole shape in isotropic medium reinforced by a regular system of stringers]. *Materialy, tekhnologii, instrumenty*. 12(4): 10–14.
21. Cherepanov G.P. (2015) Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels. *Physical Mesomechanics*. 18. pp. 391–401. DOI: 10.1134/S1029959915040116.
22. Kalantarly N.M. (2017) Ravnoprochnaya forma otverstiya dlya tormozheniya rosta treshchiny prodol'nogo sdviga [Equistrong hole shape for a crack growth deceleration under longitudinal shear]. *Problemy mashinostroeniya – Journal of Mechanical Engineering*. 20(4). pp. 31–37.
23. Vigdergauz S. (2018) Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 23(5). pp. 805–819. DOI: 10.1177/1081286517691807.
24. Mirsalimov V.M. (2019) Maximum strength of opening in crack-weakened rock mass. *Journal of Mining Science*. 55(1). pp. 9–17. <https://doi.org/10.1134/S1062739119015228>.
25. Muskhelishvili N.I. (1977) *Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam: Kluwer.
26. Kalandiya A.I. (1973) *Matematicheskie metody dvumernoy uprugosti* [Mathematical methods for two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka.
27. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976) *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress distribution around cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova Dumka.
28. Mirsalimov V.M. Some problems of structural arrest of cracks. *Soviet Materials Science*. 1986. 22(1). pp. 81–85. DOI: 10.1007/BF00720871.

Received: March 21, 2019