

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 629.05

DOI: 10.17223/19988605/52/5

Л.П. Барабанова

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНОГО МЕТОДА В НАВИГАЦИИ И ОБНАРУЖЕНИИ

Рассматривается задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации / обнаружении. Получены абсолютные нижние границы для геометрических факторов при любом числе маяков / приемников. Построены образцы оптимальных геометрических конфигураций маяков / приемников в неосвоенных до настоящего времени случаях при 5, 7, 9 маяках / приемниках. Задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода решена полностью. Результат получен операциями с B -матрицами (building matrix).

Ключевые слова: разностно-дальномерная задача; геометрические факторы; минимизация; B -матрицы.

Разностно-дальномерный метод, или TDoA (Time Difference of Arrival), порождает две задачи.

Разностно-дальномерная задача (РДЗ): по моментам времени приема сигнала, синхронно излучаемого известными источниками (маяками), найти место приемника (потребителя).

Эта задача местоопределения приемника сигнала является базовой для многих современных систем навигации, в том числе для спутниковых систем GPS, ГЛОНАСС, Galileo и др.

Разностно-дальномерной задаче математически эквивалентна следующая –

Обратная разностно-дальномерная задача (ОРДЗ): по моментам времени приема сигнала известными синхронными приемниками найти место источника сигнала.

Эта задача местонахождения источника сигнала является базовой для многих систем обнаружения, в том числе для сейсмических систем, систем обнаружения терпящих бедствие, систем координатной идентификации пользователя мобильной сотовой связи, систем слежения за подвижным периодическим источником сигнала и т.п.

Из самих формулировок прямой и обратной разностно-дальномерных задач ясно, что центральным аспектом основанных на них технических систем являются измерение и синхронизация времени. В качестве носителя сигнала в зависимости от физических свойств среды и источников, как правило, используется или электромагнитная, или акустическая, или тепловая, или еще какая-нибудь волна, например бактериологическая.

Поскольку прямая и обратная разностно-дальномерные задачи математически эквивалентны, далее для краткости речь пойдет только о разностно-дальномерной задаче (РДЗ).

Вопрос об оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации впервые был поставлен в работе [1] применительно к GPS. Под оптимизацией в [1] понималась минимизация геометрического фактора PDOP. Там же было доказано, что $3/\sqrt{N} \leq \text{PDOP}(N)$ и что это неравенство превращается в равенство при $N = 4, 6, 8, 12$. Затем в работе [2] другим способом была доказана серия аналогичных неравенств.

Вопрос о представлении абсолютных минимумов геометрических факторов (PDOP, GDOP) навигационных систем типа GPS в виде простых радикалов был впервые поставлен в работе [3]. Там же было доказано, что при всех $N \geq 4$

$$\sqrt{9/N} \leq \min \text{PDOP}(N), \quad \sqrt{10/N} \leq \min \text{GDOP}(N), \quad (1)$$

причем при всех четных $N \geq 4$ эти неравенства становятся равенствами. Также в [3] было доказано, что при $N = 5$

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

Случай *нечетного* числа маяков $N > 5$ остался неразрешенным.

Работа [3] завершалась следующими вопросами:

1. Каково выражение для абсолютного минимума PDOP и GDOP для нечетного числа N маяков?
2. Как выглядят конфигурации маяков, минимизирующие PDOP и GDOP при $N = 5, 7, \dots$?

Независимо от [3] вопрос о нижних границах для PDOP и GDOP был позже рассмотрен в [4, 5], где также были доказаны неравенства (1). В работе [4] всем неравенствам в (1) бездоказательно был присвоен знак равенства. В работе [5] было сделано исключение для случая $N = 5$, остальные равенства, включая случай четных N , не получили доказательств. Дело в том, что для того, чтобы иметь в отдельно взятом неравенстве (1) равенство, необходимо построить соответствующую конфигурацию маяков, а это непросто. Как видим, поставленные выше вопросы взаимосвязаны. В настоящей статье проблема решена полностью, т.е. и для всех нечетных $N > 5$ построены примеры конфигураций маяков, обеспечивающие равенства в (1). Ничего подобного нет в [4, 5]. Между тем в работе [6] есть ссылки на [4, 5] как на уже доказанный результат.

Отметим, что область применения полученных результатов не ограничивается GPS, где, конечно, препятствие тела Земли делает их абстрактными. Однако существует множество применений разностно-дальномерного метода, которому посвящена данная статья, когда найденные оценки PDOP и GDOP приобретают безусловный смысл при отсутствии ограничения в распространении сигнала. Приведем только некоторые примеры.

Пример 1. В рое беспилотных летательных аппаратов есть несколько командных, другие определяют свои координаты с помощью разностно-дальномерного метода по синхронным сигналам от командных аппаратов, располагающих абсолютными координатами.

Пример 2. То же самое в Космосе, см. по этому поводу [7].

Пример 3. То же самое под водой на основе акустического сигнала.

Пример 4. Микро-робот, погруженный в тело живого существа, определяет свои координаты по синхронным сигналам маяков, размещенных на поверхности тела (РДЗ). Или, напротив, по сигналу, поступающему от микро-робота, находится его местоположение наблюдателем (ОРДЗ).

Коэффициенты PDOP и GDOP в настоящее время являются официальными стандартами (NMEA 0183, ГОСТ Р 52928–2010 и др.). Других стандартов относительно геометрических факторов в разностно-дальномерных системах навигации нами не обнаружено.

Вопросам вычисления и минимизации PDOP и GDOP в различных разностно-дальномерных системах навигации посвящены десятки работ, ссылки на которые можно найти в упоминаемых здесь статьях. Одно из направлений – это мультисистемность (см., напр.: [6]). Другое – учет ограничений, что характерно для стандартной глобальной спутниковой навигационной системы типа GPS или ГЛОНАСС. Третье – композиция первого и второго (см., напр.: [8]). Очевидно, что, переходя к этим более сложным случаям, нужно досконально и окончательно разобраться с одной системой без ограничений. Таким образом, абсолютные нижние оценки PDOP и GDOP имеют фундаментальный характер и поэтому заслуживают строгого теоретического обоснования.

1. Постановка задачи

Разностно-дальномерная навигационная задача в трехмерном пространстве состоит в решении системы $N \geq 4$ уравнений относительно столбца $X = (\tau, x_1, x_2, x_3)^T$:

$$\tau + |x - a_j| = t_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})^T$ – известные столбцы декартовых координат маяков, t_j – измеренные псевдодальности, τ – неизвестная псевдодальность, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – неизвестный столбец декартовых ко-

ординат потребителя. При этом $|x - a_j| = \sqrt{(x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2 + (x_3 - a_{j3})^2}$ – расстояние между потребителем и маяком с номером j и $X_0 = \tau$, $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $X_3 = x_3$.

Более обще, система (2) является одним функциональным уравнением $F(X) = t$, где X – неизвестная точка в n -мерном пространстве, t – известная точка в N -мерном пространстве, $N \geq n$.

Фиксировать $n = 3$ нежелательно, так как в рассуждениях используются размерности $n = 2$ и $n = 1$.

Объектом математического исследования ниже становится матрица Якоби $J = \partial F / \partial X$ для F :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & e_1^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & e_N^T \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $e_j = (x - a_j) / |x - a_j|$ – n -мерный орт (столбец с единичным модулем), противоположный направлению от потребителя на маяк с номером j . Для краткости будем употреблять операции присоединения матриц: *augment* – справа, *stack* – снизу. Например, в (3) $J = \text{augment}(\bar{1}, A)$, где $\bar{1} = (1, \dots, 1)^T$, $A = \text{stack}(e_1^T, \dots, e_N^T)$.

Отображение F является непрерывно дифференцируемым всюду, кроме точек, соответствующих a_j . Поэтому в точке X , найденной из (2) методом наименьших квадратов, имеем $J \cdot dX = dt$, где дифференциалы $dt = (dt_1, \dots, dt_N)^T$, $dX = (d\tau, dx_1, \dots, dx_n)^T$ в классической теории измерений, восходящей к Гауссу, принято трактовать как ошибки измеряемых и искомых величин соответственно. При стандартном предположении о несмещенности, равноточности и попарной некоррелированности измерений dt_j метод наименьших квадратов [1–8; 9. С. 241] приводит к системе n зависимостей $\sigma_i = K_i \cdot \sigma_t$ где σ_t – среднеквадратическая ошибка (СКО) каждого отдельного измерения t_j , $j = 1, \dots, N$, σ_i – СКО для искомой величины с номером $i = 0, \dots, n$, K_i – безразмерный коэффициент чувствительности измерительной системы (2) для искомой величины с номером i . Квадраты коэффициентов $\sigma_i = K_i \sigma_t$ размещаются на главной диагонали матрицы

$$(J^T J)^{-1} = \begin{pmatrix} K_0^2 & * & \dots & * \\ * & K_1^2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & K_n^2 \end{pmatrix}.$$

С акцентом на GNSS (Global Navigation Satellite System)

$$K_\tau = K_0, \quad K_x = \sqrt{K_1^2 + \dots + K_n^2}, \quad K = \sqrt{K_\tau^2 + K_x^2}.$$

В стандартной терминологии для коэффициентов чувствительности измерительной системы GNSS [2–9], которые называются здесь геометрическими факторами, используются аббревиатуры

$$K_\tau = \text{TDOP (Time Dilution of Precision)},$$

$$K_x = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2} = \text{PDOP (Position Dilution of Precision)},$$

$$K = \sqrt{K_\tau^2 + K_x^2} = \sqrt{\text{TDOP}^2 + \text{PDOP}^2} = \text{GDOP (Geometric Dilution of Precision)}.$$

Абсолютная минимизация TDOP выполнена в работе [3]. Целью настоящей работы является абсолютная минимизация PDOP, GDOP в неосвоенном случае нечетных N , а также разрешение особого случая $N = 5$. Поиску подлежат оптимальные конфигурации направлений e_j .

2. Предварительные результаты

Действительные матрицы размера $N \times n$, $N > n$ будем для простоты называть *вертикальными*. В работе [10] А.Н. Колмогоров поставил вопрос о существовании вертикальных матриц, которые в каноническом евклидовом смысле удовлетворяют трем требованиям:

1. Квадраты строк равны единице.
2. Квадраты столбцов равны.
3. Столбцы попарно ортогональны.

Положительный ответ на вопрос Колмогорова для всех натуральных пар $N > n$ дал А.И. Мальцев [11]. Более простое разрешение вопроса Колмогорова было затем получено в [9. С. 237–238]. Идея [9] позволила доказать теоремы 3, 4 в [3], которые можно свести в одну следующую формулировку.

Теорема 1 [3]. Коэффициенты PDOP, GDOP достигают своих наименьших значений

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

одновременно и тогда и только тогда, когда матрица $A = \text{stack}(e_1^T, \dots, e_N^T)$ удовлетворяет трем приведенным требованиям и дополнительно требованию *уравновешенности*:

4. Сумма компонент каждого столбца матрицы равна нулю.

Как видим, в РДЗ первое требование выполняется автоматически. Совмещение всех четырех требований нетривиально.

Определение 1. Вертикальную матрицу, удовлетворяющую требованиям 1–4, назовем согласно [12] строящей матрицей, или *building matrix* (*B*-матрицей).

Теоремой 1 устанавливается взаимно-однозначное соответствие между *B*-матрицами и оптимальными (по критерию конъюнкции PDOP и GDOP) конфигурациями на единичной сфере потребителя-наблюдателя TDoA. В работе [3] было введено понятие *дуальных B*-матриц.

Определение 2. *B*-матрицы $P(N \times m)$, $Q(N \times k)$ дуальны, если $m + k = N - 1$ и столбцы матрицы P ортогональны всем столбцам матрицы Q .

Очевидно, что отношение дуальности в классе *B*-матриц симметрично.

Построение новых *B*-матриц опирается на две следующие леммы.

Лемма 1 [3]. Если $P(N \times n)$, $R(M \times n)$ – *B*-матрицы, то матрица

$$S((N + M) \times n) = \text{stack}(P, R)$$

также является *B*-матрицей.

Лемма 2 [3]. Для всякой *B*-матрицы размера $N \times m$, $m < N - 1$ может быть построена дуальная *B*-матрица.

3. Построение нетривиальных *B*-матриц $A(N \times 3)$ при $N > 5$

Пусть натуральные числа n , m , k подчиняются неравенству

$$n^2 + n - mk > 0. \quad (4)$$

Для таких натуральных троек предлагается следующий алгоритм.

Вход: Пара дуальных *B*-матриц $P((n + m + 1) \times n)$, $Q((n + m + 1) \times m)$ и *B*-матрица $C((n + k) \times n)$.

Выход: *B*-матрица $D(2n + m + 1 + k) \times (n + m)$.

Собираем искомую *B*-матрицу D согласно следующей блочной схеме:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где α и β – неопределенные коэффициенты, а матрица $\bar{0}$ размерности $(n + k) \times m$ состоит из одних нулей. При любых α и β требования 3, 4 для D очевидно выполняются. Требование 1 означает

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Для обеспечения требования 2 для *B*-матриц должно быть

$$\alpha^2 \frac{n + m + 1}{n} + \frac{n + k}{n} = \beta^2 \frac{n + m + 1}{m}.$$

Система двух последних линейных алгебраических уравнений относительно α^2 и β^2 даст

$$\alpha^2 = \frac{n^2 + n - mk}{(n+m+1)(n+m)}, \quad \beta^2 = \frac{m(m+2n+k+1)}{(n+m+1)(n+m)} > 0. \quad (6)$$

Таким образом, если (4) выполнено, то искомые α и β существуют, и матрица D – B -матрица.

Построение B -матрицы 7×3 . Положим на входе вышеприведенного алгоритма $n = 2$, $m = 1$, $k = 1$. Условие (4) выполняется. По размеру возьмем дуальные B -матрицы $P(4 \times 2)$, $Q(4 \times 1)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем также B -матрицу $C(3 \times 2)$ в виде правильного треугольника ортов (по строкам),

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

и предписанные вышеприведенным алгоритмом коэффициенты согласно (6):

$$\alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}, \quad \beta = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Тогда соответствующая согласно (5) матрица D размера (7×3) примет вид:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{15}/6 & 0 & \sqrt{21}/6 \\ 0 & \sqrt{15}/6 & -\sqrt{21}/6 \\ -\sqrt{15}/6 & 0 & \sqrt{21}/6 \\ 0 & -\sqrt{15}/6 & -\sqrt{21}/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица D , изображенная в строках на рис. 1, а, даст образ оптимальной конфигурации 7 маяков (точки излома на рис. 1) на единичной сфере потребителя-наблюдателя.

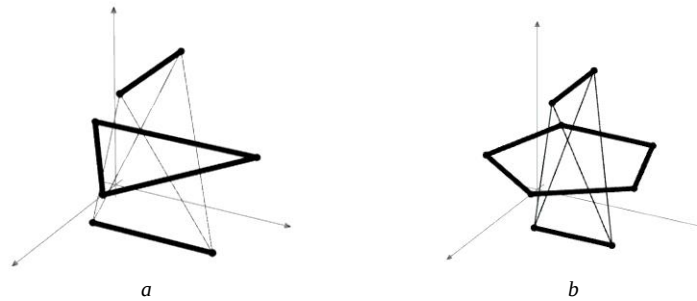


Рис. 1. Образцы оптимальных конфигураций $N = 7$ маяков (а), $N = 9$ маяков (б)

Fig. 1. Samples of optimal configurations for $N = 7$ beacons (a), $N = 9$ beacons (b)

Построение B -матрицы 9×3 . Положим на входе вышеприведенного алгоритма $n = 2$, $m = 1$, $k = 3$. Легко видеть, что условие (4) выполняется. Возьмем те же самые, что и при построении

B -матрицы 7×3 , дуальные B -матрицы $P(4 \times 2)$, $Q(4 \times 1)$, а в качестве матрицы C возьмем B -матрицу $C(5 \times 2)$ в виде правильного пятиугольника. Кроме того, возьмем согласно (6)

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда построенная согласно (5) матрица D размера (9×3) будет искомой (рис. 1, b).

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) & 0 \\ \cos(4\pi/5) & \sin(4\pi/5) & 0 \\ \cos(6\pi/5) & \sin(6\pi/5) & 0 \\ \cos(8\pi/5) & \sin(8\pi/5) & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Основной результат

В дополнение к [3] получаем рис. 2, на котором по оси ординат откладывается размерность пространства. На этом рисунке темные клетки обозначают наличие B -матриц, т.е. достижение нижних границ (1) в радикалах. Левая граница – это правильные симплексы (в трехмерном случае правильный тетраэдр маяков). Кресты обозначают отсутствие соответствующих B -матриц [3], кружки – достижимость нижних границ (1) в плоском случае [1, 6] (это, например, B -матрицы в виде правильных многоугольников). Значок «**D**» обозначает дуальность к B -матрице (6×2) , что геометрически может быть представлено октаэдром [1, 3]. Квадратик – куб [1, 3]. Звездочки – последний результат, полученный в настоящей статье. Значки «**S**» – стеки уже обеспеченных B -матриц слева направо согласно лемме 1, ибо $10 = 4 + 6$, $11 = 4 + 7$, $12 = 4 + 8$ и т.д.

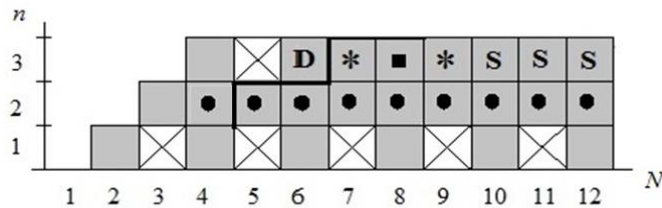


Рис. 2. Схема заполнения списка оптимальных конфигураций
Fig. 2. Scheme of filling out the list of optimal configurations

В итоге мы получаем искомое усиление теоремы 1 (см. верхний уровень при $n = 3$ на рис. 2):

Теорема 2. Коэффициенты PDOP, GDOP достигают своих наименьших значений

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

при всех $N \neq 5$, $N \geq 4$ на общих для них конфигурациях, которые в строках являются B -матрицами.

При $N = 5$ будет

$$\min \text{PDOP}(N) > \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) > \sqrt{10/N}.$$

Осталось рассмотреть случай $N = 5$. В работе [5. Appendix C] весьма сложным путем доказывалось, что

$$\sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5). \quad (7)$$

В связи с этим уместно напомнить, что это неравенство было ранее доказано в работе [3] на основании дуальной леммы [3] методом от противного: если B -матрица (5×3) существует, то по дуальной лемме существует и B -матрица (5×1) , но последняя матрица не существует, так как сложением и вычитанием нечетного числа единиц нельзя получить ноль. Но раз не существует B -матрицы (5×3) , то согласно [3], т.е. на основании теоремы 1, имеет место строгое неравенство (7).

Итак, как показано в [3],

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

Возникает естественный вопрос: каковы же настоящие минимальные значения $\text{PDOP}(5)$, $\text{GDOP}(5)$ и каковы соответствующие конфигурации. В работе [5] утверждается, что $\min \text{GDOP}(5) = 1,428$ реализуется на конфигурации, которая на единичной сфере потребителя-наблюдателя образует правильную четырехугольную пирамиду. Наш компьютерный расчет также привел к правильной четырехугольной пирамиде для оптимальной конфигурации маяков на единичной сфере потребителя-наблюдателя. После этого производилась высокоточная одномерная минимизация функции

$$K(z) = \sqrt{\text{tr}((J(z)^T \cdot J(z))^{-1})},$$

где z – широта основания, $r(z) = \sqrt{1 - z^2}$ – радиус основания пирамиды и

$$J(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & r(z) & 0 & z \\ 1 & 0 & r(z) & z \\ 1 & -r(z) & 0 & z \\ 1 & 0 & -r(z) & z \end{pmatrix}.$$

В результате получилось $z = -0,3537$, и соответствующий минимум $\text{GDOP}(5) = 1,4247$, что заметно меньше оценки [5], которая также базировалась на правильной четырехугольной пирамиде. При $z = -0,3537$ получилось $\text{GDOP}(5) = 1,3509697$.

Аналогичный расчет для $\text{PDOP}(5)$ привел нас также к правильной четырехугольной пирамиде (близкой, но другой), доставляющей минимум $\text{PDOP}(5) = 1,350767$ при $z = -0,36675$.

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации и обнаружении: получены абсолютные нижние границы для геометрических факторов GDOP и PDOP при любом числе маяков / приемников в трехмерном пространстве. Кроме того, построены образцы оптимальных геометрических конфигураций маяков / приемников в неосвоенных до настоящего времени случаях при нечетном числе маяков / приемников. Таким образом, цель, означенная в постановке задачи, – абсолютная минимизация PDOP , GDOP во всех неосвоенных случаях в трехмерном пространстве – достигнута. Результат получен операциями с B -матрицами (building matrix). Представленная в статье методика позволяет сделать вывод о полезности B -матриц в математическом обеспечении специальных измерительных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee H.B. Accuracy Limitations of Hyperbolic Multilateration Systems // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1975. V. AES-114, No. 1. P. 16–29.
2. Yarlağadda R., Ali I., Al-Dhahir N., Hershey J. GPS GDOP metric // IEEE Proceedings Radar Sonar and Navigation. 2000. V. 147, No. 5. P. 259–264.
3. Барабанова Л.П. К минимизации геометрических факторов GNSS // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 145–132.
4. Xue S., Yang Y. Positioning configurations with the lowest GDOP and their classification // J. Geodesy. 2015. V. 89, No. 1. P. 49–71.

5. Xue S., Yang Y. Understanding GDOP minimization in GNSS positioning: Infinite solutions, finite solutions and no solution // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59, No. 3. P. 775–785.
6. Liu B., Teng Y., Huang Q. GDOP minimum in multi-GNSS positioning // *Advances in Space Research*. 2017. V. 60, No. 7. P. 1400–1403.
7. Han S., Gui Q., Li G., Du Y. Minimum of PDOP and its applications in inter-satellite links (ISL) establishment of Walker- δ constellation // *Advances in Space Research*. 2014. V. 54, No. 4. P. 726–733.
8. Swaszek P.F., Hartnett R.J., Seals K.C. Lower Bounds on DOP // *J. of Navigation*. 2017. V. 70, No. 5. P. 1041–1061.
9. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. Математические задачи дальномерной навигации. М. : Физматлит, 2007. 272 с.
10. Колмогоров А.Н., Петров А.А., Смирнов Ю.М. Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1947. № 11. С. 561–566.
11. Мальцев А.И. Замечание к работе А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова, Ю.М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов» // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1947. № 11. С. 567–568.
12. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. О строящих матрицах в теории метода наименьших квадратов // *Известия вузов. Математика*. 2019. № 4. С. 27–35.

Поступила в редакцию 9 января 2020 г.

Barabanova L.P. (2020) OPTIMIZATION OF GEOMETRY IN TDOA METHOD FOR NAVIGATION AND DETECTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 43–51

DOI: 10.17223/19988605/52/5

Navigation problem. By the time of reception of the signal synchronously emitted by known sources (beacons), find the location of the receiver (consumer). This problem is basic for many modern navigation systems, including satellite systems GPS, GLONASS, Galileo, etc.

Detection problem. Find the location of the signal source by the time points of signal reception by the well-known synchronous receivers. This problem is basic for many detection systems, including seismic systems, distress detection systems, coordinate systems for identifying a mobile cellular user, tracking systems for a moving signal source, etc.

Since both of these problems are mathematically equivalent, for brevity, we will only deal with the navigation TDoA problem in three-dimensional space.

The lower bounds for the coefficients GDOP and PDOP, which are exact for number $3 < N \neq 5$ of beacons of TDoA system are presented.

Definition. A real matrix satisfying conditions:

- 1) the squares of rows equal 1,
- 2) the squares of columns equal each other,
- 3) the columns are pairwise orthogonal,
- 4) the sum of components of each column of matrix equals zero

is called building matrix or B -matrix.

The following statements are equivalent:

1. $\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}$.
2. $\min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$;
3. B -matrix $(N \times 3)$ exists.
4. Rows of the B -matrix $(N \times 3)$ define the optimal configuration, i.e minimum for $\text{PDOP}(N)$ and $\text{GDOP}(N)$.

Theorem. Geometric factors PDOP, GDOP reach their lowest values

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

for all $3 < N \neq 5$, on configurations common to them, which in rows are B -matrices. We construct samples of real matrices $(N \times 3)$ with number $3 < N \neq 5$. It is proved that in case $(N \times 3)$ there are no B -matrices.

When $N = 5$ there are strict inequalities

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

The main tool is the duality of B -matrices.

Keywords: TDoA problem; geometric factors; minimization; B -matrices.

BARABANOVA Lubov Petrovna (Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Kovrov State Technological Academy, Kovrov, Russian Federation).

E-mail: lpbarabanova@yandex.ru

REFERENCES

1. Lee, H.B. (1975) Accuracy Limitations of Hyperbolic Multilateration Systems. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. AES-114(1). pp. 16–29. DOI: 10.1109/TAES.1975.308024
2. Yarlagadda, R., Ali, I., Al-Dhahir, N. & Hershey, J. (2000) GPS GDOP metric. *IEEE Proceedings Radar Sonar and Navigation*. 147(5). pp. 259–264.
3. Barabanova, L.P. (2010) On minimisation of GNSS geometric factors. *Journal of Comput. Syst. Sci. Int.* 49(2). pp. 310–317. DOI: 10.1134/S1064230710020164
4. Xue, S. & Yang, Y. (2015) Positioning configurations with the lowest GDOP and their classification. *Journal of Geodesy*. 89(1). pp. 49–71. DOI: 10.1007/s00190-014-0760-6
5. Xue, S. & Yang, Y. (2017) Understanding GDOP minimization in GNSS positioning: Infinite solutions, finite solutions and no solution. *Advances in Space Research*. 59(3). pp. 775–785. DOI: 10.1016/j.asr.2016.10.019
6. Liu, B., Teng, Y. & Huang, Q. (2017) GDOP minimum in multi-GNSS positioning. *Advances in Space Research*. 60(7). pp. 1400–1403. DOI: 10.1016/j.asr.2017.06.049
7. Han, S., Gui, Q., Li, G. & Du, Y. (2014) Minimum of PDOP and its applications in inter-satellite links (ISL) establishment of Walker- δ constellation. *Advances in Space Research*. 54(4). pp. 726–733. DOI: 10.1016/j.asr.2014.04.020
8. Swaszek, P.F., Hartnett, R.J. & Seals, K.C. (2017) Lower Bounds on DOP. *Journal of Navigation*. 70(5). pp. 1041–1061. DOI: 10.1017/S0373463317000248
9. Barabanov, O.O. & Barabanova, L.P. (2007) *Matematicheskie zadachi dal'nomernoy navigatsii* [Mathematical problems of long-distance navigation]. Moscow: Fizmatlit.
10. Kolmogorov, A.N., Petrov, A.A. & Smirnov, Yu. M. (1947) A formula of Gauss in the theory of the method of least squares. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 11(6). pp. 561–566.
11. Maltsev, A.I. (1947) A remark on the work of A. N. Kolmogorov, A. A. Petrov, and Yu. M. Smirnov, “A formula of Gauss in the theory of least squares”. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 11(6). pp. 567–568.
12. Barabanov, O.O. & Barabanova, L.P. (2019) On building matrices in the theory of least squares method. *Izvestiya vuzov. Matematika – Russian Mathematics*. 63(4). pp. 23–30. DOI: 10.3103/S1066369X19040030