

УДК 51: 101.8

DOI: 10.17223/1998863X/59/4

В.М. Резников

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ОСНОВАТЕЛЬНОЙ КРИТИКА УСЛОВИЙ КОЛМОГорова ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ?

В статье на примере теоремы Бернулли сформулированы требования к применению формальных результатов в частотной интерпретации теории вероятностей. Они включают определение теоретических величин, используемых в теореме на основе экспериментальных данных, и верификацию независимости данных. Показано, что эти требования более жесткие, по сравнению с требованиями в субъективистской интерпретации, поэтому критика в ней условий Колмогорова не является обоснованной.

Ключевые слова: частотная интерпретация, субъективистская интерпретация, теорема Бернулли, устойчивость частот, независимость.

Первое издание известной книги Колмогорова вышло на немецком языке в 1933 г., а на русском она была опубликована в 1936 г., в ней впервые была предложена аксиоматика теории вероятностей, принятая впоследствии математическим сообществом в 1938 г. [1]. Эта небольшая по объему монография являлась разноплановой; так, в ней кроме собственно аксиоматики и изложения основных результатов теории вероятностей были сформулированы некоторые идеи, предполагающие философский анализ, а также относящиеся к применимости теории вероятностей. Во-первых, Колмогоров обосновал значимость понятия независимости в этой теории, при этом он считал, что невозможно в рамках математики описать положения дел, для которых адекватны модели независимых экспериментов, и считал, что эта проблема относится к философии естествознания [1]. Во-вторых, он описал требования к вероятностям в контексте их приложений следующим образом:

«А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число раз n и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий S событие A не будет иметь места» [1. С. 13].

Почему в этой небольшой монографии, посвященной теоретической математике, были сформулированы требования к применению математики? Колмогоров дал ответ на этот вопрос в другой работе, он писал, что успехи в основаниях математики заслонили собой значимую и независимую проблему ее применимости [2]. Отметим, что в период времени, начиная с момента издания книги, посвященной аксиоматике, до признания последней, неизвестны какие-либо критические замечания, относящиеся к аксиоматизации теории вероятностей. Другая судьба у условий применения теории вероятностей по Колмогорову. Если аксиоматика Колмогорова общеизвестна, то его требования к применению теории вероятностей непопулярны, и они не обсуждались

в современной литературе вплоть до появления публикаций Шейфера и Вовка [3, 4]. Так, в работе [3], посвященной истории создания аксиоматики, влиянию математических и философских идей на создание оснований теории вероятностей и на стиль изложения теории, также были проанализированы условия Колмогорова по применению теории вероятностей. Шейфер и Вовк описали рецепцию одного из требований Колмогорова известными математиками, его современниками: Борелем, Фреше, Леви и др. Шейфер и Вовк писали: «Борель, Фреше, Леви неоднократно подчеркивали, что требование А оказывается избыточным, так как оно выводимо на основании теоремы Бернулли, являясь заключением теоремы». Наша работа в основном посвящена исследованию убедительности критики условий Колмогорова в контексте частотной интерпретации, так как в контексте приложений он следовал Мизесу, основателю частотной интерпретации. Исследуемая в статье тематика связана с проблемой применимости математики и ее места в научном исследовании. Несмотря на значимость проблемы применимости математики и ее связь с не менее значимыми проблемами, такими как эффективность математики, понимание явлений природы на основе математики, им уделяется недостаточное внимание в литературе. Дело в том, что чистым математикам проблема приложений неинтересна, а философы, как правило, интересуются теориями, а не их применением. Как говорил известный специалист в области философии науки Кайберг, «только методологи и бизнесмены интересуются проблемой применимости математики» [5]. Уточним замечание Кайберга: проблемой применимости занимаются не только методологи, изучающие проблему применимости математики и ее место в научном исследовании, но и прикладные математики, участвующие в ответственных испытаниях, а также специалисты, принимающие решения на основе математики. Однако их публикации немногочисленны и разбросаны по специальным изданиям, поэтому проблема применимости оказывается актуальной. Так как критика требования Колмогорова основана на теореме Бернулли, поэтому в работе исследуются условия применимости теоремы.

Для дальнейшего изложения имеет смысл напомнить эту теорему.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A , из них m экспериментов оказались успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, а m/n – это частота события A , ε – это точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1. \quad (1)$$

Отметим, что значимость теоремы для развития теории вероятностей не вызывает сомнений. Так, например, известный математик Б.В. Гнеденко отмечал значимость исследования условий, при которых события происходят с единичной вероятностью. Современный математик Г. Шейфер писал, что теорема является мостом, связывающим азартные игры, основанные на ожидаемых выигрышах, с понятием вероятности [6]. В отличие от несомненной теоретической значимости теоремы ответ на вопрос о применимости теоремы не является в той же мере очевидным. Отметим, что историки математики показали, что свою теорему Я. Бернулли доказал еще в 1691 г., однако он не торопился с ее публикацией из-за недостаточного числа примеров, в которых

используется теорема. Теорема Бернулли составляет четвертую часть его книги, которая была опубликована уже после смерти автора в 1713 г. [7].

Почему Борель, Гадамер, Фреше, Леви и др. критиковали Колмогорова? Несомненным поводом являлось замечание Колмогорова о том, что в контексте приложений он в целом следует Мизесу [1]. Как известно, Мизес был основателем частотной интерпретации теории и последовательным критиком субъективистской интерпретации теории вероятностей [8]. Факт критики Колмогорова вполне понятен, так как большинство его оппонентов были субъективистами. Почему критиковали именно требование А на основе теоремы Бернулли? Ответ на этот вопрос связан с особенностями субъективистской интерпретации. В ней исследуются сингулярные, субъективистские или, как еще говорят, индивидуальные вероятности. Так, Борель, Гадамер, Леви связывали развитие теории вероятностей с исследованиями субъективистских вероятностей. Однако они признавали, что в науке ценятся объективные результаты, но это не является проблемой, так как, по их мнению, применение теоремы Бернулли приводит к объективизации результатов. Рассмотрим аргументацию субъективистов с общематематических позиций. Как известно, формальные науки являются консервативными, это означает, что если рассуждения основаны на истинных посылах и осуществляются формально корректно, тогда и заключение будет истинным, однако формальные науки не обеспечивают выводимости утверждений о свойствах объектов, которых не было в посылках. Для того чтобы оценить убедительность аргументации субъективистов в контексте достижения ими объективистских результатов на основе теоремы Бернулли с точки зрения сторонников частотной интерпретации, мы сформулируем требования к получению убедительных результатов в частотной интерпретации. Известно, что частотная интерпретация является эмпирической, и в этой традиции применение математики не начинается с чистого листа. Так, согласно эмпирической концепции, применению математики предшествует убедительное экспериментальное определение некоторого свойства А изучаемого объекта X [9]. Далее, если объекты X и Y связаны посредством удачно подобранного математического оператора F , тогда в определенных случаях объект Y : $Y = F(X)$ обладает тем же самым свойством А. Применительно к теореме Бернулли это означает, что если вероятность $p(A)$ изучаемого события A получена на основе устойчивых частотных характеристик и поэтому является объективной, тогда и заключение теоремы, которое определяет вероятность близости частотных характеристик события A и его вероятности $p(A)$, тоже имеет объективный характер. Таким образом, с точки зрения представителей частотной интерпретации, стратегия субъективистов, направленная на получение итоговых объективных вероятностей на основе применения теоремы, в которой теоретическая вероятность известна заранее или представляет собой степень уверенности, оказывается несостоятельной. Более того, возникает следующий вопрос: «А имели ли субъективисты право применять теорему с точки зрения частотного подхода?» Корректное применение формальных результатов в частотной интерпретации основано на учете базовых положений эмпиризма. В этой интерпретации имеет место доминирование эмпирических величин над теоретическими величинами, при этом последние априори не существуют. Теоретические величины существуют при определенных условиях, в частности, если соответ-

ствующие эмпирические величины демонстрируют специальные свойства, а именно, оказываются воспроизводимыми. Роль теоретических величин ограничена в качестве представительства эмпирических величин в формальных науках. Теперь перейдем к вопросу о формальных требованиях к применимости теоремы Бернулли в частотной интерпретации. Для того чтобы применить теорему, необходимо выполнение двух условий. Во-первых, определить теоретическую вероятность исследуемого события A , хотя в теореме она считается заданной, однако в эмпирической традиции теоретические величины неизвестны. Во-вторых, проверить, являются ли результаты наблюдений независимыми несмотря на то, что в теореме Бернулли они считаются независимыми, однако по отношению к конкретным данным это неизвестно, что предполагает формальную проверку их независимости.

В математической статистике изучают теоретические методы оценивания неизвестной вероятности события на основе ее частотных характеристик. Для некоторых ситуаций адекватен экспериментальный подход, например для определения искомой вероятности применительно к случайным процессам с неизменяющимися вероятностями, в частности для оценивания вероятности на основе результатов испытаний, связанных с теоремой Бернулли. Эти результаты представляют реализацию события, происходящего с одной и той же постоянной вероятностью, поэтому естественно полагать, что при большом числе испытаний частотные характеристики этого события оказываются маловариабельными и близкими друг другу по величине. Тогда, взяв в качестве вероятности одну из частот, получим, что требование Колмогорова о близости вероятности события и его частотных характеристик выполняется геометрически.

Теперь обратимся к верификации независимости результатов экспериментов, которая необходима для использования теоремы Бернулли. Однако сначала приведем необходимые определения, относящиеся к независимости.

Определение независимости для двух событий. Два события A и B независимы, если условная вероятность события A при условии B равна безусловной вероятности события A :

$$P(A / B) = P(A). \quad (2)$$

Обычно утверждение (2) записывают следующим образом:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B). \quad (3)$$

Отметим, что если формула (2) некорректна, когда $P(B) = 0$, то формула (3) свободна от этого недостатка.

Для произвольного числа n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ условие для их независимости имеет следующий вид [1]:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times P(A_{i_3}) \times \dots \times P(A_{i_m}); \quad (4)$$

$$m = 1, 2, \dots, n; 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_m \leq n.$$

Отметим, что понятие независимости часто используется в теории вероятностей, так как ее применение чрезвычайно упрощает вычисления, однако формальную верификацию независимости сложно осуществить. Легко подсчитать, что для проверки независимости n событий общее число проверяемых комбинаций вероятностей равно $2^n - n - 1$, а чтобы их осуществить, необходимо знать $2^n - 1$ вероятностей. Так как в реальных приложениях чаще используется не теория вероятностей, а математическая статистика, поэтому уместно остановиться на исследовании независимости в рамках последней

дисциплины. Как известно, в математической статистике нет унифицированного определения независимости, проверка независимости носит контекстуальный характер. Так, например, если исследуемые случайные величины имеют нормальное распределение, тогда подходит верификация независимости с помощью коэффициента корреляции. Если две случайные величины имеют произвольное общее известное распределение, тогда для проверки их независимости адекватен критерий Пирсона χ^2 [10]. На первый взгляд, он подходит и для верификации независимости результатов испытаний, относящихся к теореме Бернулли, так как вполне допустимо считать, что результаты бросания монеты, представляющие собой последовательность гербов и решек, имеют биномиальное распределение. Однако критерий Пирсона проверяет независимость для двух случайных величин, представленных двумя группами данных, в то время как результаты эксперимента, связанного с теоремой Бернулли, представляют собой одну последовательность гербов и решек и фактически относятся к одной случайной величине. Возникает вопрос: «Как правильно выбрать две группы данных?» На основе содержательного анализа это невозможно выполнить, и в то же время для такого рода ситуаций не разработаны и обоснованные стандартные формальные правила выделения подпоследовательностей, поэтому критерий Пирсона не подходит. Мы не будем сейчас останавливаться на применении нестандартных подходов проверки независимости, отметим, что совсем непросто осуществить верификацию независимости.

В связи с трудностями верификации возникает естественный вопрос: «Почему не ограничиться содержательными, интуитивными подходами при принятии независимости?» Ответ был дан в интересной работе Эльясберга, в которой приведен пример, иллюстрирующий принципиальное различие между независимостью и минимальной связанностью [11]. Для дальнейшего изложения определим неформально несколько необходимых понятий, относящихся к математической статистике. Распределение случайной величины – это переменная, принимающая некоторые значения с определенными вероятностями. Коэффициент парной корреляции – это мера связи случайных величин. Дисперсия – это оценка вариабельности случайных величин. Пусть даны два множества случайных величин, мощность каждого равна тысяче, в первом множестве коэффициент парной корреляции равен 0,01, а во втором нулю, т.е. в последнем случайные величины независимы. Затем для каждого множества случайных величин вычисляется их сумма, и, наконец, для каждой полученной суммы вычисляется дисперсия. В результате оказывается, что дисперсия для суммы независимых величин на порядок меньше дисперсии слабовзаимосвязанных величин [11], а если взять множества мощности 10 000, тогда дисперсии будут отличаться на два порядка. Данный пример наглядно объясняет, что использование множеств независимых случайных величин должно быть обосновано, особенно в случае их большой мощности.

После анализа условий применения теоремы в частотной интерпретации и описания принципиальных трудностей, возникающих при верификации этих условий, возвращаемся к требованиям о применимости математики в субъективистской интерпретации. В ней существует единственное требование к применению, а именно, вероятности изучаемых событий должны соответствовать аксиоматике теории вероятностей, в то же время определение

вероятностей и верификация независимости не являются обязательными, так как они считаются известными априори. Теперь у нас имеются основания для анализа критики условия Колмогорова субъективистами. Во-первых, на основе теоремы Бернулли, в контексте требований к применению математики в частотной интерпретации, субъективисты не только не могут получить гарантированные объективные результаты, но и даже просто приемлемые. Во-вторых, стиль применения теории вероятностей субъективистами, с точки зрения условий к применению математики в частотном подходе, не является легитимным. И более общий вывод: в целом критика субъективистами на основе применения теоремы Бернулли результатов, полученных в частотной интерпретации, оказывается несостоятельной. Итак, требование Колмогорова оказывается вне критики на основе применения субъективистской интерпретации. В связи с этим возникает естественный вопрос о корректности условия Колмогорова в рамках частотной интерпретации. Будем полагать, что на основе анализа проведенных экспериментов были определены частотные характеристики выпадения гербов, и они оказались устойчивыми, тем самым была определена теоретическая вероятность успеха, рассматриваемая в теореме. Кроме того, предположим, что на основе верификации было показано, что результаты экспериментов являются независимыми, и в этом случае применение теоремы оказывается легитимным. Тогда возникает вопрос: «Выводимо ли требование Колмогорова на основе обоснованного применения теоремы Бернулли?» Будем исходить из замечания Колмогорова о том, что в контексте приложений он в целом следует Мизесу [1]. Поэтому уместно напомнить определение теоретической вероятности у Мизеса. По Мизесу, теоретическая вероятность определяется как предел бесконечной сходящейся последовательности частот [8]. В реалистичном финитном варианте частотного подхода вероятность определяется на основе устойчивости частот, в этом случае вероятность – это центр сгущения частот, и близость вероятности и частот определяется геометрически, а не по вероятности. Отметим, что тогда требование Колмогорова оказывается следствием устойчивости частот, при этом устойчивость не следует ни из какой теоремы, а отражает характерную черту данных, относящихся к исследуемому феномену. Таким образом, условие Колмогорова является не заключением теоремы Бернулли, а предпосылкой применения теоремы в частотной интерпретации.

Фактически мы получили, что требование Колмогорова не оказывается избыточным. Существуют ли теперь какие-либо основания полагать, что Колмогоров мог ошибиться? Так, Шейфер и Вовк писали, что Колмогоров мог ошибаться, так как он никогда не отвечал на критику оппонентов [4]. Мы считаем, что он не отвечал на критику по прагматическим соображениям. Кроме того, историки отмечали, что отчасти ссылка на Мизеса была вызвана соображениями политкорректности [3]. В связи с последним критическим аргументом приведем два соображения. Во-первых, если условие Колмогорова сформулировано подлинным сторонником интерпретации Мизеса, тогда для критики нет никаких оснований. Во-вторых, А.Н. Колмогоров оказывается вне критики в той степени, в которой он в период времени от написания своей книги до принятия аксиоматики являлся сторонником эмпирической теории вероятностей.

Заключение

В работе показана значимость исследований условий применимости математики не только для ее корректного использования, но и применительно к методологическим проблемам, связанным с определением места математики в ее приложениях. На примере теоремы Бернулли показано, что основные сложности ее корректного применения вызваны верификацией независимости данных, к которым предлагается применить теорему. По нашему мнению, представляет значимость разработка понятия независимости как на общенаучном, так и категориальном уровне. Отсутствие такого рода результатов, как справедливо отмечал Колмогоров, тормозит развитие математики, в частности теории вероятностей. Кроме того, бесспорно, что понятие независимости представляет интерес и для философии, в частности, в контексте исследований онтологии, проблемы свободы воли и др. В известной литературе эта тема практически не представлена за исключением некоторых работ Ю.В. Сачкова [12].

Литература

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М. : Наука, 1974. 120 с.
2. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей // Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. М. : Изд-во Академии наук СССР, 1956. 397 с.
3. Shafer G., Vovk V. The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. 2006. Vol. 21, № 1. P. 70–98. DOI 10.1214/088342305000000467
4. Shafer G., Vovk V. Probability and Finance It's Only a Game! New York : A Wiley-Interscience Publication, 2001. 414 p.
5. Кайберг Г. Вероятность и индуктивная логика. М. : Прогресс, 1978. 375 с.
6. Shafer G. The Significance of Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi for the Philosophy of Probability Today // Journal of econometrics. 1996. Vol. 75, № 1. P. 15–32. DOI 10.1016/0304-4076(95)01766-6
7. Бернулли Я. О законе больших чисел. М. : Наука, 1986. 175 с.
8. Mises R. Mathematical theory of probability and statistics. New York : Academic Press, 1964. 694 p.
9. Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. М. : Знание, 1980. 64 с.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. М. : Мир, 1975. 648 с.
11. Эльясберг П.Е. Вычислительная информация. Сколько ее нужно? Как обрабатывать? М. : Наука, 1983. 208 с.
12. Сачков Ю.В. Вероятностная революция в науке (Вероятность, случайность, независимость, иерархия). М. : Научный мир, 1999. 144 с.

Vladimir M. Reznikov, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: mathphil1976@gmail.com

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2021. 59. pp. 34–41.

DOI: 10.17223/1998863X/59/4

IS CRITICISM OF KOLMOGOROV'S CONDITIONS OF USING MATHEMATICS SOUND?

Keywords: frequency interpretation; subjectivist interpretation; Bernoulli's theorem; stability of frequencies; independency.

The article studies the foundations of criticism offered by the followers of the subjective interpretation of probability theory, namely Kolmogorov's condition about the proximity of the theoretical probability and empirical frequencies in the context of using mathematics. They consider this requirement to be redundant as it is deducible on the basis of Bernoulli's theorem being its conclusion. In my opinion, the question of redundancy of this condition has not only a historical value,

but is also topical, because the inference about Kolmogorov's error is based on using Bernoulli's theorem and the problem of using mathematics does not receive adequate attention. To analyze the soundness of this criticism, I formulate the conditions of using Bernoulli's theorem in the frequency interpretation, because Kolmogorov remarked that regarding applications he followed Mises, the founder of the frequency interpretation. These conditions are: the correct use of the theorem presupposes estimation of the probability of success in research and verification of the independence of its results. I show that the verification of result independence is a hard problem, and, for this reason, the models of independent trials are usually accepted on informal foundations. I offer arguments in favor of the formal verification by means of Elyasberg's example. The example demonstrates that the dispersion of the sum of a thousand of independent random values differs from the dispersion of the sum of a thousand of weakly connected random values with a pair correlation coefficient 0.01 by more than one order. In contrast to the frequency interpretation, the requirements of using the subjective one are limited by accepting probability axioms only. Subjectivists believe that the probability of success in research and the independence of its results are known a priori. It appears that the using of the theorem by subjectivists does not guarantee objective results and, in fact, is not correct in the context of requirements to applications in the frequency interpretation. Thus, the criticism of Kolmogorov is not sound.

References

1. Kolmogorov, A.N. (1974) *Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostey* [Basic Concepts of Probability Theory]. Moscow: Nauka.
2. Kolmogorov, A.N. (1956) *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory]. In: Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N. & Lavrentiev, M.A. (eds) *Matematika, ee sodержanie, metody i znachenie* [Mathematics, its content, methods and meaning]. Moscow: USSR AS. pp. 52–284.
3. Shafer, G. & Vovk, V. (2006) The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. *Statistical Science*. 21(1). pp. 70–98. DOI: 10.1214/088342305000000467
4. Shafer, G. & Vovk, V. (2001) *Probability and Finance: It's Only a Game!* New York: A Wiley-Interscience Publication.
5. Kyberg, H. (1978) *Veroyatnost' i induktivnaya logika* [Probability and Inductive Logic]. Translated from English by B.L. Likhthenfeld. Moscow: Progress.
6. Bernoulli, Ja. (1986) *O zakone bol'shikh chisel* [On the Law of Large Numbers]. Translated from German. Moscow: Nauka.
7. Shafer, G. (1996) The Significance of Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi for the Philosophy of Probability Today. *Journal of Econometrics*. 75(1). pp.15–32. DOI: 10.1016/0304-4076(95)01766-6
8. Mises, R. (1964) *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. New York: Academic Press.
9. Alimov, Yu.I. (1980) *Al'ternativa metodu matematicheskoy statistiki* [Alternative to the Method of Mathematical Statistics]. Moscow: Znanie.
10. Cramer, H. (1975) *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical Methods of statistics]. Translated from English. Moscow: Mir.
11. Elyasberg, P.E. (1986) *Vychislitel'naya informatsiya. Skol'ko ee nuzhno? Kak obrabatyvat'?* [Computational information. How much needed? How to process?]. Moscow: Nauka.
12. Sachkov, Yu.V. (1988) *Veroyatnostnaya revolyutsiya v nauke (Veroyatnost', sluchaynost', nezavisimost', ierarkhiya)* [Probabilistic Revolution in Science (Probability, Chance, Independence, Hierarchy)]. Moscow: Nauchnyy mir.