

УДК 530.12

DOI: 10.17223/00213411/64/4/122

А.В. ШАПОВАЛОВ^{1,2}, Р. БРОНС¹

СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ФРАКТАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ *

На основе группового анализа дифференциальных уравнений рассматриваются свойства симметрии уравнений с фрактальными производными, определяемые в так называемом F^α -исчислении. Обсуждаются аналоги продолжения преобразований независимых и зависимых переменных и инфинитезимальной инвариантности уравнений с фрактальными производными на примере нахождения лиевских симметрий одномерного уравнения диффузии с фрактальной производной по времени.

Ключевые слова: анализ на фракталах, фрактальное уравнение диффузии, групповой подход, продолжение, инвариантность, лиевские симметрии.

Введение

Описание физических систем с фрактальными свойствами базируется на геометрии фракталов, которая существенно отличается от геометрии «обычных» непрерывных систем. Различия между непрерывными и фрактальными объектами можно проиллюстрировать на примере сравнения непрерывной и фрактальной кривых. Непрерывная гладкая кривая на малых масштабах приближается к отрезку прямой. Фрактальная кривая на любых, даже сколь угодно малых масштабах, не сводится к отрезку прямой, а остается нерегулярной, подобной самой себе на больших масштабах. Для фрактальной кривой не определено понятие касательной в смысле геометрии гладких многообразий, так как фрактальные кривые в общем случае недифференцируемы.

Различия в геометрических свойствах фрактальных и непрерывных систем делают невозможным прямой перенос моделей непрерывных систем на фрактальные, поскольку к фрактальным объектам неприменима «обычная» теория дифференциальных и интегральных уравнений. Поэтому в исследованиях фрактальных систем нашли широкое применение компьютерные методы, которые, при всех своих достоинствах, оставляют в стороне аналитические методы, что приводит к проблеме поиска новых подходов к развитию методов анализа на фрактальных структурах.

Для развития аналитических методов на фракталах привлекаются различные идеи и подходы. Некоторые из них признаны адекватными для описания фрактальных свойств объектов определенного вида и послужили основой целого направления в исследованиях фракталов. Примером является использование дробных производных и интегралов для исследования особенностей аномальной диффузии, аномального транспорта, стохастических процессов различной природы и др. (например, [1–5]). Однако дробные производные представляют собой нелокальные операторы, определенные на гладких функциях, и в ряде случаев не подходят для прямого моделирования фракталов, в частности, для операций с фрактальными функциями, отражающими локальные особенности фракталов.

Помимо теории дробного исчисления, в литературе предлагаются аналитические подходы, направленные на разработку теории «исчисления на фракталах», в рамках которых определяются базовые понятия анализа: предел, непрерывность, производные и интегралы. В данной работе используется теория F^α -исчисления (F^α -анализа) на одномерных канторовых множествах (см. [6–9] и цитированную в них литературу). В рамках этой теории вводятся функции от фрактальных переменных и можно рассматривать прямые аналоги дифференциальных и интегральных уравнений, в которых вместо обычных производных используются их фрактальные F^α -аналоги. Такой подход позволяет формулировать модели физических процессов с фрактальными свойствами в терминах уравнений с фрактальными производными и интегралами, что, в свою очередь, ставит задачу исследования свойств таких уравнений и разработки аналитических методов нахождения их

* Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров, Программой повышения конкурентоспособности ТПУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров, грантом РФФИ и Томской области, проект № 19-41-700004.

Уважаемые читатели!

Доступ к полнотекстовой версии журнала
«Известия высших учебных заведений. Физика»
осуществляется на платформе
Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU
на платной основе:

<https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=7725>