

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/71/5

Ю.Н. Григорьев, А.Г. Горобчук, И.В. Ершов

## СХОДИМОСТЬ ЛОКАЛЬНО АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ К ТОЧНЫМ ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ<sup>1</sup>

Проведены численные расчеты течения в плоском сверхзвуковом пограничном слое колебательно возбужденного газа в локально автомоделной и полной постановках для ряда характерных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что во всех рассмотренных случаях для локально автомоделных решений имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям для продольной координаты  $x \geq 8-15$ . Для всех режимов максимальное локальное отклонение предельных локально автомоделных профилей от профилей, рассчитанных в полной постановке, не превышает 5 %. Это служит обоснованием использования легко рассчитываемых локально автомоделных решений в задачах линейной теории устойчивости.

**Ключевые слова:** пограничный слой, устойчивость, колебательно возбужденный газ, локально автомоделные решения, конечно-разностные расчеты.

При решении задач устойчивости пограничных слоев необходимо знание профилей гидродинамических параметров базового стационарного течения. В сложных случаях требуется одновременно учесть многие процессы реального газа, такие, как релаксация внутренних степеней свободы молекул, диссоциация – рекомбинация, химические реакции, излучение и другие. Для расчетов подобных течений универсальным подходом является использование конечно-разностных методов для соответствующих уравнений погранслоного типа или полных уравнений, включающих все необходимые эффекты реального газа [1–3].

На практике чаще используются различные упрощенные подходы, позволяющие избежать сложных расчетов. В первую очередь, можно использовать известные автомоделные решения типа Блазиуса или Дородницына – Хоуарта [4], а дополнительные факторы – возбуждение колебательных степеней свободы, диссоциацию – рекомбинацию и т.п., учитывать только в уравнениях линейной теории устойчивости [5]. Лучшим приближением являются локально автомоделные решения [6–8], зависящие от координаты вдоль потока как от параметра. Однако в зависимости от постановки конкретной задачи – вида граничных условий, наличия химических реакций с тепловыделением и т.п., здесь имеются две альтернативы. Предпочтительным является случай, когда локально автомоделные решения с возрастанием координаты-параметра сходятся к некоторому предельному решению, которое и следует использовать в расчетах устойчивости. В другом случае такой предел отсутствует. При этом продольную координату, на которой рассчитывается локально автомоделное решение, определяют по числу Рей-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 20-01-00168).

нольдса, задаваемого в задаче устойчивости, что приводит к некоторой неопределенной ошибке.

В любом случае при использовании локально автомодельных решений необходимо предварительно определить характер их зависимости от продольной координаты, а также по возможности оценить их отклонение от численных решений, полученных в полной постановке, учитывающей все необходимые эффекты. В данной работе эта задача рассматривается применительно к пограничному слою колебательно возбужденного газа на пластине для ряда распространенных граничных условий.

### Основные уравнения и локально автомодельные решения

Исходная система уравнений плоского пограничного слоя колебательно возбужденного газа в приближении Прандтля была получена из полных уравнений двухтемпературной релаксационной аэродинамики колебательно возбужденного газа [9] на основе стандартной процедуры [4]. В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны текущее расстояние  $x = L$  вдоль пластины, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя – скорость  $U_\infty$ , плотность  $\rho_\infty$  и температура  $T_\infty$ , коэффициент сдвиговой вязкости  $\mu_\infty$ , коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы  $\lambda_\infty = (5c_{Vt}/2 + 6c_{Vr}/5)\mu_\infty(T)$ , коэффициент теплопроводности, описывающий диффузионный перенос энергии колебательных квантов  $\lambda_{v,\infty} = 6c_{Vv}\mu_\infty(T)/5$ . Здесь коэффициенты теплопроводности выражены через коэффициент сдвиговой вязкости  $\mu_\infty(T)$  с помощью полуэмпирических соотношений Эйкена [5], а коэффициенты теплоемкостей  $c_{Vt}$ ,  $c_{Vr}$  и  $c_{Vv}$  предполагаются постоянными. Зависимость вязкости от температуры описывается формулой Сазерленда. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины  $\rho_\infty U_\infty^2$  и  $L/U_\infty$  соответственно.

В обезразмеренных таким образом переменных система имеет вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = (\gamma - 1) \mu M^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (3)$$

$$\gamma_v \left( \rho u \frac{\partial T_v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) = \frac{\gamma \mu_1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial T_v}{\partial y} \right] - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (4)$$

$$\gamma M^2 p = \rho T. \quad (5)$$

Здесь

$$\mu(T) = \frac{1,5 T^{3/2}}{T + 0,5}; \quad \mu_1 = \frac{\lambda_{v,\infty}}{\lambda_\infty} = \frac{20 \gamma_v}{33}; \quad \gamma_v = \frac{c_{Vv}}{c_{Vt} + c_{Vr}}; \quad c_{Vt} = \frac{3R}{2}; \quad c_{Vr} = c_{Vv} = R;$$

$R$  – газовая постоянная.

В (1) – (5) использованы стандартные обозначения гидродинамических переменных [4, 9]. Коэффициент  $\gamma = c_p/c_V = (c_{Vl} + c_{Vr} + R)/(c_{Vl} + c_{Vr})$  – показатель адиабаты;  $\tau$  – характерное время релаксации возбужденной колебательной моды. Критерии  $M = U_\infty/(\gamma RT_\infty)^{1/2}$  и  $Pr = c_p \mu_\infty/\lambda_\infty$  – соответственно числа Маха и Прандтля невозмущенного потока.

Локально автомодельные уравнения выводятся из системы (1) – (5) аналогично автомодельным уравнениям для совершенного газа [4]. Они имеют вид

$$\left( \frac{\mu}{T} \varphi''(\zeta) \right)' + \varphi \varphi'' = 0; \quad (6)$$

$$\gamma \left( \frac{\mu}{T} T' \right)' + \frac{(\gamma-1)\mu}{4T} Pr M^2 (\varphi'')^2 + Pr \varphi T' + \frac{4Pr\xi\gamma_v}{\tau} (T_v - T) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{20\gamma}{33} \left( \frac{\mu}{T} T_v' \right)' + Pr \varphi T_v' + \frac{4Pr\xi}{\tau} (T_v - T) = 0, \quad (8)$$

где штрихи означают дифференцирование по поперечной автомодельной координате  $\zeta = \eta/(2\sqrt{\xi})$ , величины

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \rho dy$$

представляют собой переменные Дородницына – Хоуарта [4], а вспомогательная функция

$$\varphi(\zeta) = 2 \int_0^\zeta u(\zeta) d\zeta.$$

Видно, что уравнение импульсов (6) имеет автомодельную форму, как в совершенном газе, а уравнения для температур (7), (8) из-за наличия в них релаксационных слагаемых приводятся к локально автомодельной форме, где координата  $\xi \equiv x$  входит как параметр. Из уравнений (6) – (8) следует, что на передней кромке пластины при  $\xi \equiv x = 0$ , а также в термодинамическом равновесии при  $T_v = T$  система переходит в автомодельные уравнения для совершенного газа [4].

Для расчета локально автомодельных решений вводились вспомогательные функции

$$f_1 = \varphi, \quad f_2 = \varphi', \quad f_3 = \varphi'', \quad f_4 = T, \quad f_5 = T', \quad f_6 = T_v, \quad f_7 = T_v'$$

и система уравнений (6) – (8) приводилась к нормальной форме, для которой методом «стрельбы» с помощью процедуры Рунге – Кутты четвертого порядка на интервале  $[0, \delta]$  решалась двухточечная краевая задача. Точкой «прицеливания» служила середина интервала  $\zeta_c = \delta/2$ , где требовалось совпадение значений вычисляемых величин с точностью до  $10^{-8}$ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $\gamma = 1.4$ ,  $\gamma_v = 0.4$ ,  $\tau = 1$ ;  $Pr = 0.75$ ,  $M = 2.2$  и  $4.5$ ;  $\delta = 8$ ,  $\xi = 0-30$ ;  $\Delta\zeta = 0.01$ .

Для продольной скорости на границах использовались условия:

$$\varphi'(0) = 2u(0) = 0, \quad \varphi'(\delta) = 2u(\delta) = 2.$$

Для температур рассматривался ряд характерных условий в набегающем потоке и на поверхности пластины, соответствующих различным аэродинамическим ситуациям. Ниже приводятся данные для следующих режимов.

Режим течения 1 – «полет в невозмущенной атмосфере», теплоизолированная (адиабатическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной температуре «пластинчатого термометра» [4], на условной верхней границе пограничного слоя статическая и колебательная температура

$$T'(0) = 0, \quad T_v(0) = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \text{Pr} M^2, \quad T(\delta) = T_v(\delta) = 1.$$

Режим течения 2 – «полет в невозмущенной атмосфере», охлажденная до температуры внешнего потока (изотермическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной статической температуре, на условной верхней границе пограничного слоя статическая и колебательная температура

$$T(0) = T_v(0) = T_W = 1, \quad T(\delta) = T_v(\delta) = 1.$$

Режим течения 3 – «эксперимент в сверхзвуковой аэродинамической трубе», охлажденная до температуры внешнего потока (изотермическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной статической температуре, на условной верхней границе пограничного слоя колебательная температура равна температуре торможения (статической температуре в форкамере трубы):

$$T(0) = T_v(0) = T_W = 1, \quad T(\delta) = 1, \quad T_v(\delta) = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2.$$

Для режима 3 также рассматривалась адиабатическая стенка.

В качестве одного из вариантов граничного условия на колебательную температуру использовалось условие теплообмена при полной аккомодации колебательных квантов:

$$\frac{dT_v(0)}{d\zeta} = a\zeta(T_v(0) - T). \quad (9)$$

Здесь

$$a = \frac{5}{3\text{M}\mu} \sqrt{\frac{2\text{Re}_\infty T}{\pi\gamma}}, \quad \mu = \frac{1,5T^{3/2}}{T+0,5}, \quad T = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \text{Pr} M^2,$$

$\text{Re}_\infty = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$  – число Рейнольдса.

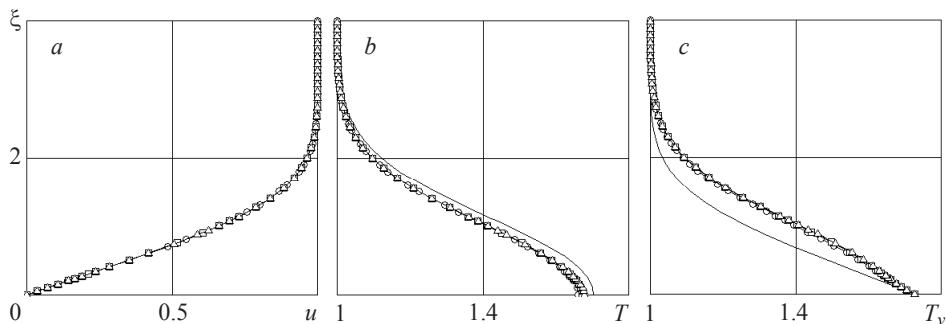
На рис. 1, 2 и 3 представлены профили гидродинамических величин соответственно для режимов течения 1, 2 и 3. На рис. 4 показаны примеры профилей гидродинамических параметров для режима течения 1 с условием (9) на поверхности пластины.

Как видно из рис. 1 – 4 во всех случаях имеет место сходимость локально автомодельных профилей продольной скорости и температур к их предельным значениям при  $\xi \equiv x = 8 - 12$ . При этом профили скорости, неавтомодельность которых связана только со слабой температурной зависимостью, сходились даже на меньших значениях продольной координаты.

Для оценки сходимости локально автомодельных решений к пределу в зависимости от продольной координаты рассчитывались относительные отклонения профилей  $\varepsilon_u(\zeta)$  и температур  $\varepsilon_T(\zeta)$ ,  $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$  в равномерной норме. В качестве пре-

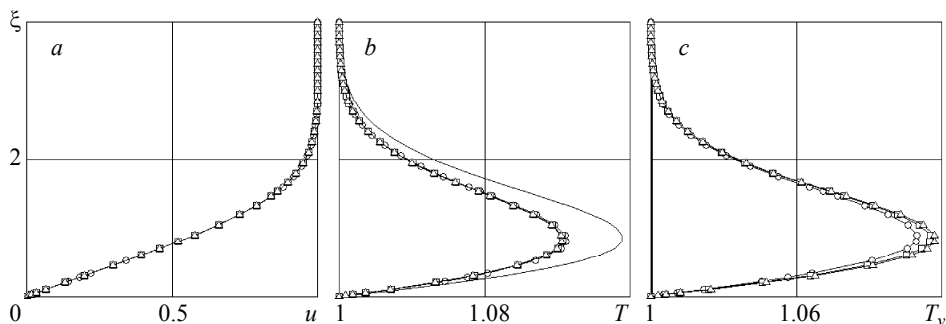
дельных профилей выбирались профили, полученные в сечении  $\xi = 15$ . Зависимости  $\varepsilon_{u,T,T_v}(\xi)$  вычислялись по формуле

$$\varepsilon_{u,T,T_v}(\xi) = \left| 1 - \frac{[u, T, T_v](\xi, \xi)}{[u, T, T_v](\xi, \xi = 15)} \right| \cdot 100\%, \quad \xi = 8, 10, 12.$$



**Рис. 1.** Локально автомодельные профили продольной скорости  $u$ , статической  $T$  и колебательной  $T_v$  температур. Режим течения 1,  $M = 2.2$ . Сплошные линии –  $\xi = 0$ , сплошные линии с круглыми маркерами –  $\xi = 5$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с треугольными –  $\xi = 15$

**Fig. 1.** Locally self-similar profiles of longitudinal velocity,  $u$ , and static and vibrational temperatures,  $T$  and  $T_v$ , respectively. Flow regime 1 is provided at  $M = 2.2$ . The solid lines indicate  $\xi = 0$ , the solid lines with circles –  $\xi = 5$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with triangles –  $\xi = 15$



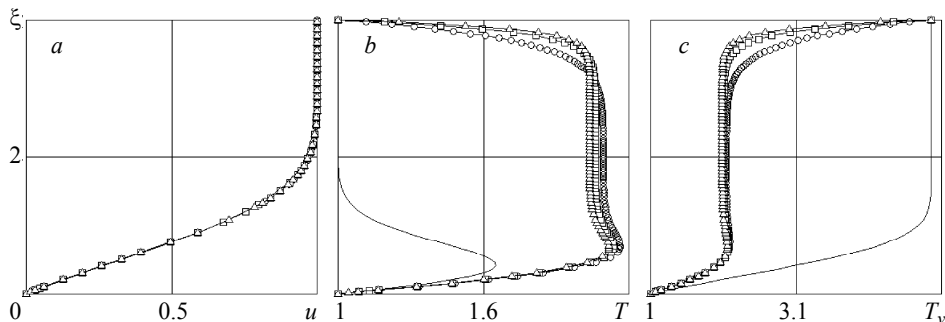
**Рис. 2.** Локально автомодельные профили продольной скорости  $u$ , статической  $T$  и колебательной  $T_v$  температур. Режим течения 2,  $M = 2.2$ . Сплошные линии –  $\xi = 0$ , сплошные линии с круглыми маркерами –  $\xi = 5$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с треугольными –  $\xi = 15$

**Fig. 2.** Locally self-similar profiles of longitudinal velocity,  $u$ , and static and vibrational temperatures,  $T$  and  $T_v$ , respectively. Flow regime 2 is provided at  $M = 2.2$ . The solid lines indicate  $\xi = 0$ , the solid lines with circles –  $\xi = 5$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with triangles –  $\xi = 15$

Типичные характеристики сходимости профилей для различных режимов течения приведены на рис. 5 – 7. Из зависимостей, представленных на рис. 5, видно, что для режима течения 1 наибольшие относительные отклонения получаются на профилях скорости и статической температуры вблизи стенки и имеют соответст-

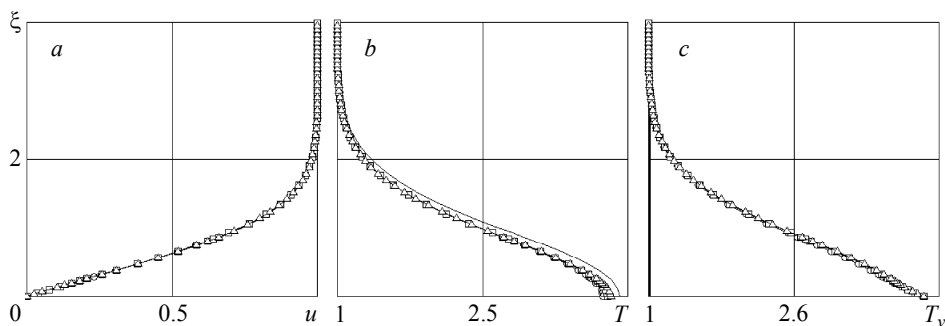
венно порядки  $(0.4-1.3) \cdot 10^{-3}$  и  $(2-5) \cdot 10^{-3}$ . При этом наибольшие относительные отклонения на профилях колебательной температуры наблюдаются на высоте  $\zeta \approx 0.7$  от поверхности пластины и имеют порядок  $(1.8-4.8) \cdot 10^{-3}$ .

Из графиков на рис. 6, следует, что для режима течения 2 на профилях скорости наибольшие относительные отклонения наблюдаются на высоте  $\zeta \approx 1$  от поверхности пластины и имеют порядок  $(1.7-5.8) \cdot 10^{-5}$ . Наибольшие относительные отклонения на профилях статической и колебательной температур получаются на высоте  $\zeta \approx 0.8$  от поверхности пластины и имеют соответственно порядки  $(2.5-9) \cdot 10^{-4}$  и  $(0.9-3.5) \cdot 10^{-3}$ .



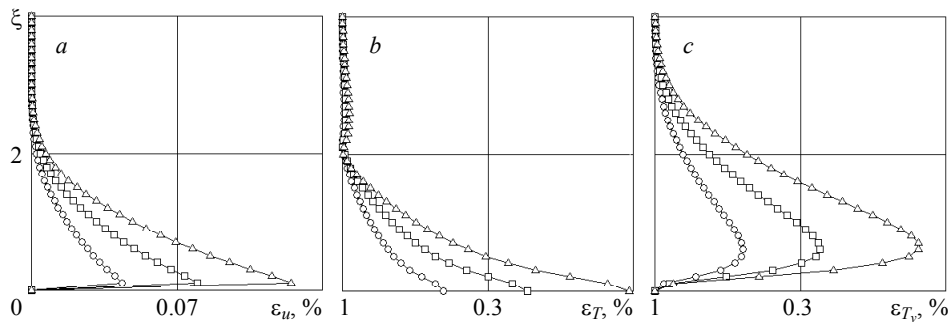
**Рис. 3.** Локально автомодельные профили продольной скорости  $u$ , статической  $T$  и колебательной  $T_v$  температур. Режим течения 3,  $M = 4.5$ . Сплошные линии –  $\xi = 0$ , сплошные линии с круглыми маркерами –  $\xi = 5$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с треугольными –  $\xi = 15$

**Fig. 3.** Locally self-similar profiles of longitudinal velocity,  $u$ , and static and vibrational temperatures,  $T$  and  $T_v$ , respectively. Flow regime 3 is provided at  $M = 4.5$ . The solid lines indicate  $\xi = 0$ , the solid lines with circles –  $\xi = 5$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with triangles –  $\xi = 15$



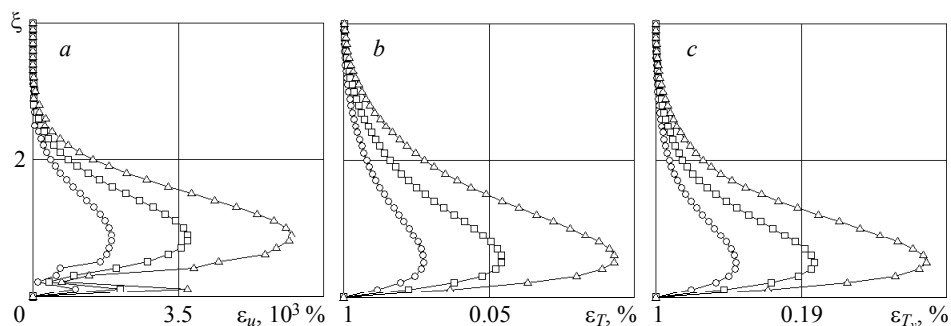
**Рис. 4.** Локально автомодельные профили продольной скорости  $u$ , статической  $T$  и колебательной  $T_v$  температур. Режим течения 1 с условием (9),  $M = 4.5$ ,  $Re_\infty = 10^4$ . Сплошные линии –  $\xi = 0$ , сплошные линии с круглыми маркерами –  $\xi = 5$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с треугольными –  $\xi = 15$

**Fig. 4.** Locally self-similar profiles of longitudinal velocity,  $u$ , and static and vibrational temperatures,  $T$  and  $T_v$ , respectively. Flow regime 1 with condition (9) is provided at  $M = 4.5$ ,  $Re_\infty = 10^4$ . The solid lines indicate  $\xi = 0$ , the solid lines with circles –  $\xi = 5$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with triangles –  $\xi = 15$



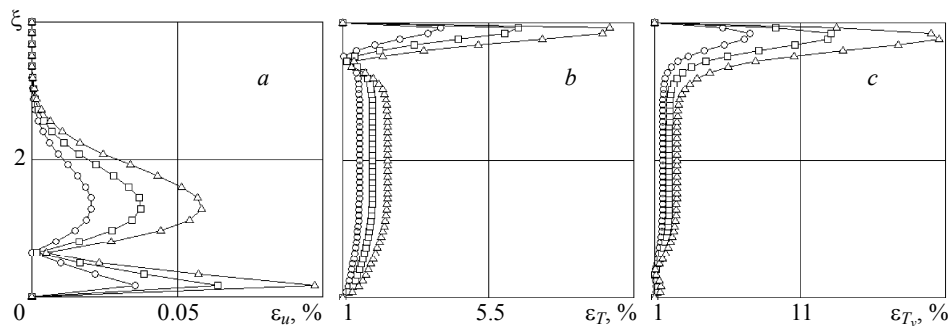
**Рис. 5.** Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 1,  $M = 2.2$ . Сплошные линии с треугольными маркерами –  $\xi = 8$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с круглыми –  $\xi = 12$

**Fig. 5.** Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 1 is provided at  $M = 2.2$ . The solid lines with triangles indicate  $\xi = 8$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with circles –  $\xi = 12$



**Рис. 6.** Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 2,  $M = 2.2$ . Сплошные линии с треугольными маркерами –  $\xi = 8$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с круглыми –  $\xi = 12$

**Fig. 6.** Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 2 is provided at  $M = 2.2$ . The solid lines with triangles indicate  $\xi = 8$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with circles –  $\xi = 12$



**Рис. 7.** Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 3,  $M = 4.5$ . Сплошные линии с треугольными маркерами –  $\xi = 8$ , с квадратными маркерами –  $\xi = 10$ , с круглыми –  $\xi = 12$

**Fig. 7.** Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 3 is provided at  $M = 4.5$ . The solid lines with triangles indicate  $\xi = 8$ , the solid lines with squares –  $\xi = 10$ , and the solid lines with circles –  $\xi = 12$

Зависимости, приведенные на рис. 7, показывают, что для режима течения 3 наибольшие относительные отклонения на профилях скорости наблюдаются вблизи поверхности пластины и имеют порядок  $(4-9.3) \cdot 10^{-4}$ . При этом наибольшие относительные отклонения на профилях статической и колебательной температур получаются вблизи условной границы пограничного слоя  $\zeta = \delta \approx 8$  и имеют соответственно порядки 0.03–0.10 и 0.09–0.21.

### Численные расчеты пограничного слоя в полной постановке

Для перехода к конечно-разностной схеме система уравнений (1) – (5) плоско-го пограничного слоя колебательно возбужденного газа может быть представлена в следующем обобщенном виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (11)$$

Здесь индекс  $i$  относится к соответствующей искомой величине, например компоненте продольной скорости  $u$ , температуре газа  $T$  и т.д. Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  и  $e_i$ , входящие в уравнения (11), могут зависеть как от величин  $f_i$ , так и от их производных.

Для численного решения уравнений (11) был реализован конечно-разностный метод, изложенный в работах [10, 11]. Расчетная область покрывалась прямоугольной сеткой по пространственным координатам:  $x_n = x_0 + nh_x$ ,  $y_j = jh_y$  ( $n, j = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $h_x$ ,  $h_y$  – шаги сетки в направлениях осей  $x$  и  $y$ . Дополнительно вводилась вспомогательная сетка с полуцелыми индексами:  $x_{n+1/2} = x_0 + (n+1/2)h_x$ ,  $y_j = jh_y$  и  $x_n = x_0 + nh_x$ ,  $y_{j+1/2} = (j+1/2)h_y$ . Для аппроксимации уравнений (11) использовалась явно – неявная конечно-разностная схема Кранка – Николсон:

$$a_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij}^n - f_{ij}^{n-1}}{h_x} + b_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij+1}^{n-1/2} - f_{ij-1}^{n-1/2}}{2h_y} =$$

$$= \frac{1}{h_y} \left( c_{ij+1/2}^{n-1/2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij+1/2}^{n-1/2} - c_{ij-1/2}^{n-1/2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij-1/2}^{n-1/2} \right) + d_{ij}^{n-1/2} + e_{ij}^{n-1/2} f_{ij}^{n-1/2}, \quad (12)$$

где

$$f_{ij}^{n-1/2} = s_i f_{ij}^n + (1-s_i) f_{ij}^{n-1}.$$

В расчетах весовые параметры были выбраны  $s_i = 0.5$ . Значения коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  и  $e_i$  вычисляются в узлах вспомогательной сетки в полуцелых узлах ( $n - 1/2, j$ ),  $n, j = 1, 2, 3, \dots$ .

Схема (12) приводится к виду

$$\alpha_{ij} f_{ij}^n + \beta_{ij} f_{ij-1}^n + \gamma_{ij} f_{ij+1}^n = \delta_{ij}. \quad (13)$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y),$$

$$\beta_{ij} = -s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} \frac{h_y^2}{h_x},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y), \\ \delta_{ij} &= (1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij-1}^{n-1} - \\ &\quad - \left[ (1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} \frac{h_y^2}{h_x} \right] f_{ij}^{n-1} + \\ &\quad + (1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij+1}^{n-1} + 2a_{ij}^{n-1/2} h_y^2. \end{aligned}$$

Система разностных уравнений (13) с учетом конечно-разностных аппроксимаций граничных условий имеет трехдиагональную матрицу, обладающую свойством диагонального преобладания, и эффективно решается методом скалярной прогонки. На очередном шаге по маршевой переменной  $x$  вычислялись все значения  $f_{ij}^n$  по толщине пограничного слоя.

Поперечная скорость находилась из разностного уравнения

$$\frac{(\rho u)_j^n - (\rho u)_j^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho u)_{j+1}^n - (\rho u)_{j+1}^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho v)_{j+1}^{n-1/2} - (\rho v)_j^{n-1/2}}{h_y} = 0, \quad (14)$$

аппроксимирующего уравнение неразрывности (1). Входящая в уравнение (14) плотность  $\rho$  зависит только от температуры  $T$  и полагается известной величиной. На основе уравнения (14) строилось рекуррентное соотношение для нахождения  $v_{j+1}^{n-1/2}$  через  $v_j^{n-1/2}$ . Таким образом, определив значение  $v_0^{n-1/2}$  из граничного условия на пластине, определялась поперечная скорость в полуцелых узлах  $(n-1/2, j)$ , где  $j = 1, 2, 3, \dots$ .

Для вычисления коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  и  $e_i$ , зависящих от  $v$  и  $f_{ij}^n$ , в узлах вспомогательной сетки использовались формулы линейной интерполяции для этих величин, определяемых по значениям в узлах основной сетки

$$f_{ij}^{n-1/2} = \frac{f_{ij}^n + f_{ij}^{n-1}}{2}, \quad f_{ij+1/2}^n = \frac{f_{ij+1}^n + f_{ij}^n}{2}.$$

Для вычисления значений  $f_{ij}^n$  на  $n$ -м слое необходимо знать коэффициенты  $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}$  и  $e_{ij}^{n-1/2}$ , которые, согласно приведенным выше формулам, сами зависят от неизвестных величин  $f_{ij}^n$  на  $n$ -м слое. Поэтому использовался алгоритм внутренних итераций, заключающийся в следующем. Для вычисления значений  $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}$  и  $e_{ij}^{n-1/2}$  в первом приближении в качестве значений функций на  $n$ -ом слое брались их значения на  $(n-1)$ -м слое, например  $f_{ij}^{n,1} = f_{ij}^{n-1}$ , а последующие приближения учитывались в итерационном процессе

$$f_{ij}^{n-1/2,k} = \frac{f_{ij}^{n,k} + f_{ij}^{n-1}}{2},$$

где  $k$  – индекс внутренних итераций. На каждом шаге по маршевой переменной итерации выполнялись до сходимости. Сходимость к установившемуся решению

определялась по разности относительных значений сеточной функции в равномерной норме

$$\max_j \left| \frac{f_{ij}^{n,k} - f_{ij}^{n,k-1}}{f_{ij}^{n,k}} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность, которая в численных расчетах была выбрана равной  $10^{-8}$ .

Система уравнений (1), (11) имеет парабола-гиперболический тип и требует задания начальных условий на входной границе пограничного слоя:  $u(x_0, y) = u_0(y)$ ,  $T(x_0, y) = T_0(y)$  и т.д. При этом распределение поперечной скорости  $v(x_0, y)$  находилось из численного решения уравнений (13), (14) с применением внутренних итераций. В качестве начальных данных брались решения уравнений пограничного слоя в локально автомодельных переменных при  $\xi = 1$ . Полученное решение  $v(x_0 + h_x/2, y)$  при достаточно малом  $h_x$  полагалось равным  $v(x_0, y)$ .

Порядок аппроксимации численной схемы исследовался на основе сравнения численных решений на последовательности сеток с изменяемым в два раза шагом. Расчеты показали, что отношение отклонений численных решений в совпадающих узлах сеток составляет величину, близкую к четырем, а схема имеет близкий ко второму порядок аппроксимации.

Исследование точности численного алгоритма проводилось на основе сравнения с известными автомодельными решениями. Относительные отклонения профилей продольной скорости  $\varepsilon_u(\zeta)$ , плотности  $\varepsilon_\rho(\zeta)$  и температур  $\varepsilon_T(\zeta)$ ,  $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$  от автомодельных профилей Блазиуса и Дородницына – Хоуарта [4] в различных сечениях  $\xi = x$  в равномерной норме рассчитывались по формуле

$$\varepsilon_q(\zeta) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, \xi)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 0)} \right| \cdot 100\%, \quad \xi = 5, 10, 40,$$

где вектор  $\mathbf{q} = (u, \rho, T, T_v)$ . Для полностью развитого пограничного слоя полученные отклонения не превышали 1%.

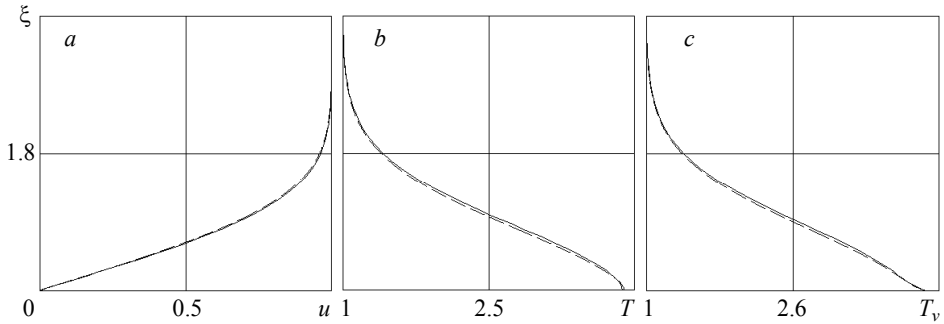
Достигнутое качество численной схемы дало возможность корректного сравнения локально автомодельных профилей гидродинамических параметров с профилями, рассчитанными в полной постановке, для одинаковых граничных и начальных условий. На рис. 8 представлены профили, полученные в обеих постановках, для режима течения I при  $M = 4.5$ .

На рис. 9 для двух значений чисел Маха  $M$  даны относительные отклонения предельных локально автомодельных профилей при  $\xi = 30$  от численных расчетов на продольной координате  $x = 40$ , где пограничный слой можно считать полностью развитым.

Относительные отклонения профилей продольной скорости  $\varepsilon_u(\zeta)$ , плотности  $\varepsilon_\rho(\zeta)$  и температур  $\varepsilon_T(\zeta)$ ,  $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$  вычислялись по формуле

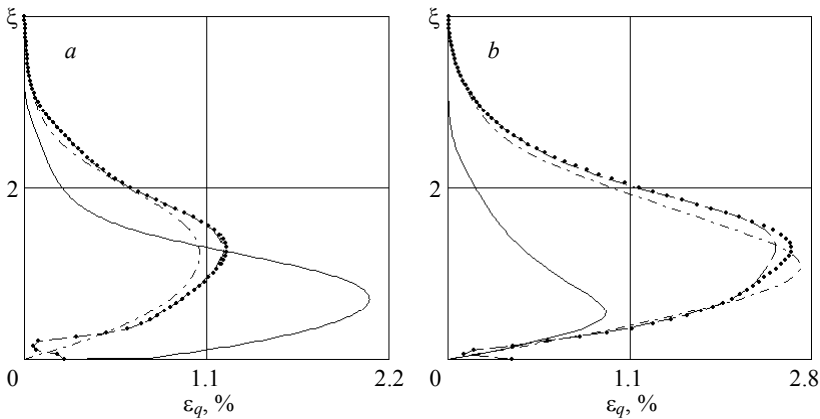
$$\varepsilon_q(\zeta) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, x = 40)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 30)} \right| \cdot 100\%, \quad \mathbf{q} = (u, \rho, T, T_v).$$

Видно, что в данных условиях максимальное отклонение при  $M = 4.5$ , которое не превышает 3 %, проявляют профили температур. В тех же условиях при  $M = 2.2$  максимальное отклонение имеет место для продольной скорости и составляет примерно 2 %, в то время как отклонения температур лежат в пределах 1 %.



**Рис. 8.** Сравнение профилей гидродинамических параметров. Режим течения  $I$ ,  $M = 4.5$ . Сплошные кривые – приближение локальной автомодельности, штриховые кривые – численное решение полной задачи

**Fig. 8.** Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. Flow regime  $I$  is provided at  $M = 4.5$ . The solid lines indicate a local self-similarity approximation, the dashed lines – a numerical solution to a complete problem

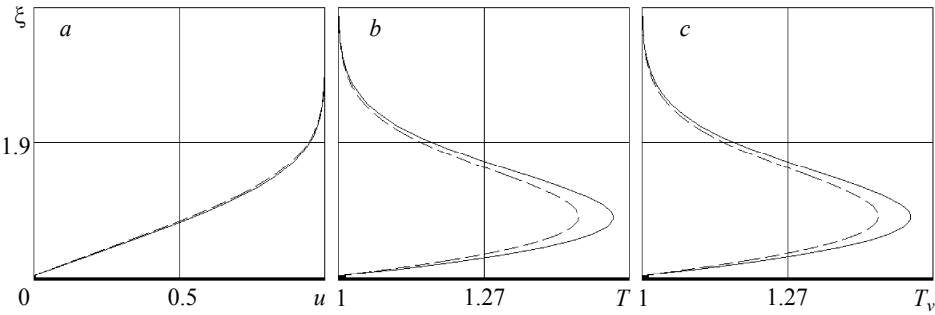


**Рис. 9.** Относительные отклонения гидродинамических параметров. Режим течения  $I$ ,  $M = 2.2$  (a) и  $4.5$  (b). Сплошные кривые –  $\varepsilon_u$ , штриховые кривые –  $\varepsilon_T$ , штрихпунктирные кривые –  $\varepsilon_{T_v}$ , точки –  $\varepsilon_p$

**Fig. 9.** Relative deviations of hydrodynamic parameters. Flow regime  $I$  is provided at  $M = (a) 2.2$  and  $(b) 4.5$ . The solid lines denote  $\varepsilon_u$ , the dashed lines –  $\varepsilon_T$ , the dash-dot lines –  $\varepsilon_{T_v}$ , and the dotted lines –  $\varepsilon_p$

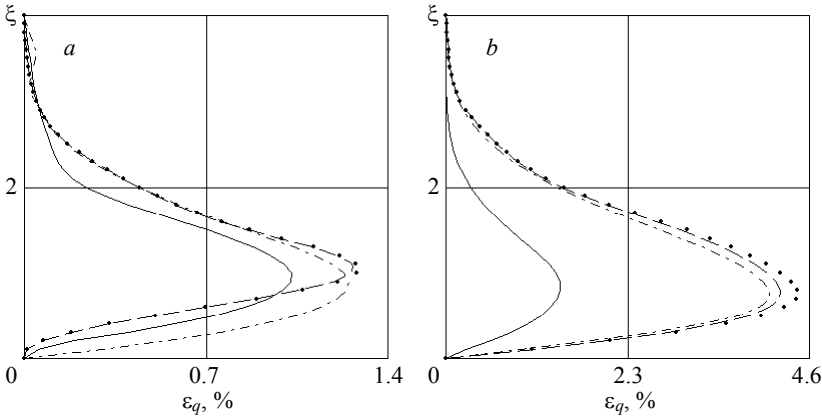
На рис. 10 и 11 приведены аналогичные сравнения при  $M = 4.5$ , но для случая охлаждаемой изотермической стенки. Все отклонения в этом случае возрастают приблизительно в полтора раза, но не превышают 4.5 %. Отметим, что для аналогичных условий при  $M = 2.2$  все отклонения остаются в пределах примерно 1.5 %.

Полученные результаты позволяют заключить, что для рассмотренных граничных и начальных условий локально автомодельные решения настолько близки к численным решениям полной задачи, что могут обоснованно использоваться в расчетах линейной устойчивости соответствующих пограничных слоев.



**Рис. 10.** Сравнение профилей гидродинамических параметров. Режим течения 2,  $M = 4.5$ . Сплошные кривые – приближение локальной автомодельности, штриховые линии – численной решение полной задачи

**Fig. 10.** Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. Flow regime 2 is provided at  $M = 4.5$ . The solid lines indicate a local self-similarity approximation, the dashed lines – a numerical solution to a complete problem



**Рис. 11.** Относительные отклонения гидродинамических параметров. Режим течения 2,  $M = 2.2$  (a) и  $4.5$  (b). Сплошные кривые –  $\varepsilon_u$ , штриховые кривые –  $\varepsilon_T$ , штрихпунктирные кривые –  $\varepsilon_{T_v}$ , точки –  $\varepsilon_p$

**Fig. 11.** Relative deviations of hydrodynamic parameters. Flow regime 2 is provided at  $M =$  (a) 2.2 and (b) 4.5. The solid lines denote  $\varepsilon_u$ , the dashed lines –  $\varepsilon_T$ , the dash-dot lines –  $\varepsilon_{T_v}$ , and the dotted lines –  $\varepsilon_p$

**Заключение**

1. Рассчитаны локально автомодельные решения для сверхзвукового пограничного слоя на пластине для распространенных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что для всех рассмотренных случаев имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям при  $x = \xi \geq 8-15$ .
2. На основе конечно-разностной аппроксимации системы уравнений плоского пограничного слоя, имеющей порядок  $O(h^2)$ , получены численные решения в полной постановке для тех же условий внешнего потока и теплообмена на границе.
3. Проведено сравнение профилей гидродинамических переменных, рассчитанных в локально автомодельной и полной постановках. Показано, что для всех

рассмотренных граничных и начальных условий предельные локально автомодельные профили приближают профили полностью развитого пограничного слоя, рассчитанные в полной постановке в пределах 3–5 %. Это позволяет обоснованно использовать легко рассчитываемые предельные локально автомодельные профили в расчетах по линейной теории устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wang X. Non-equilibrium effects on the stability of a Mach 10 flat-plate boundary layer // AIAA Paper 2017-3162. June 2017. P. 1–24. DOI: 10.2514/6.2017-3162.
2. Kunova O.V., Shoev G.V., Kudryavtsev A.N. Numerical simulation of nonequilibrium flows by using the state-to-state approach in commercial software // Thermophysics and Aeromechanics. 2017. V. 24. No. 1. P. 7–17. DOI: 10.1134/S0869864317010024.
3. Chen X., Fu S. Research of hypersonic boundary layer instability with thermal-chemical non-equilibrium effects // Proc. 8th European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS 2019), 1–4 July, Madrid. 2019. P. 1–7. DOI: 10.13009/EUCASS2019-674.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 676 с.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. No. 3. P. 295–307. DOI: 10.1134/S0015462819030054.
6. Гапонов С.А., Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
7. Blottner F.G. Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer // AIAA Journal. 1963. V. 1. No. 9. P. 2156–2157.
8. Bertolotti F.B. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // Journal of Fluid Mechanics. 1998. V. 372. P. 93–118.
9. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Cham: Springer Intern. Publishing, 2017. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3.
10. Браиловская И.Ю., Чудов Л.А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом // Вычислительные методы и программирование: сб. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1962. С. 167–182.
11. Пасконов В.М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя // Численные методы в газовой динамике: сборник. Часть 2. Москва: Изд-во МГУ, 1963. С. 110–116.

Статья поступила 17.01.2020

Grigoriev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V. (2021) CONVERGENCE OF LOCALLY SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO EXACT NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS FOR A PLATE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 49–62

DOI 10.17223/19988621/71/5

Keywords: boundary layer, stability, vibrationally excited gas, locally self-similar solutions, finite-difference calculations.

This paper considers a possibility of using locally self-similar solutions for a stationary boundary layer in linear stability problems. The solutions, obtained at various boundary conditions for a vibrationally excited gas, are compared with finite-difference calculations of the corresponding flows. An initial system of equations for a plane boundary layer of the vibrationally excited gas is derived from complete equations of two-temperature relaxation aerodynamics. Relaxation of vibrational modes of gas molecules is described in the framework of the Landau – Teller equation. Transfer coefficients depend on the static flow temperature. In a complete problem statement, the flows are calculated using the Crank – Nicolson finite-difference scheme. In all the considered cases, it is shown that the locally self-similar velocity and

temperature profiles converge to the corresponding profiles for a fully developed boundary-layer flow calculated in a finite-difference formulation. The obtained results justify the use of locally self-similar solutions in problems of the linear stability theory for boundary-layer flows of a vibrationally excited gas.

**Financial support:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-01-00168).

*Yuriy N. GRIGORIEV* (Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: grigor@ict.nsc.ru

*Aleksey G. GOROBCHUK* (Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: alg@eml.ru

*Igor V. ERSHOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: i\_ershov@ngs.ru

#### REFERENCES

1. Wang X. (2017) Non-equilibrium effects on the stability of a Mach 10 flat-plate boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 3162. pp. 1–24. DOI: 10.2514/6.2017-3162.
2. Kunova O.V., Shoev G.V., Kudryavtsev A.N. (2017) Numerical simulation of nonequilibrium flows by using the state-to-state approach in commercial software. *Thermophysics and Aeromechanics*. 24(1). pp. 7–17. DOI: 10.1134/S0869864317010024.
3. Chen X, Fu S. (2019) Research of hypersonic boundary layer instability with thermal-chemical non-equilibrium effects. *Proceedings of the 8th European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences*. pp. 1–7. DOI: 10.13009/EUCASS2019-674.
4. Loitsyanskii L.G. (1966) *Mechanics of Liquids and Gases*. New York: Pergamon.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2019) Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate. *Fluid Dynamics*. 54(3). pp. 295–307. DOI: 10.1134/S0015462819030054.
6. Gaponov S.A., Petrov G.V. (2013) *Ustoychivost' pogranichnogo sloya neravnovesno dissociiruyushchego gaza* [Boundary layer stability in a nonequilibrium dissociating gas]. Novosibirsk: Nauka.
7. Blottner F.G. (1963) Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 1(9). pp. 2156–2157. DOI: 10.2514/3.2015.
8. Bertolotti F.B. (1998) The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability. *Journal of Fluid Mechanics*. 372. pp. 93–118. DOI: 10.1017/S002112098002353.
9. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. (2017) Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. *Fluid Mechanics and Its Applications, Springer*. 117. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3.
10. Brailovskaya I.Yu., Chudov L.A. (1962) Reshenie uravneniy pogranichnogo sloya raznostnym metodom [Solving of boundary layer equations by a difference method]. *Sbornik "Vychislitel'nye metody i programmirovaniye"*. 1. Moscow: Izdatel'stvo MGU. pp. 167–182.
11. Paskonov V.M. (1963) Standartnaya programma dlya resheniya zadach pogranichnogo sloya [A routine program for solving boundary layer problems]. *Sbornik "Chislennyye metody v gazovoy dinamike"*. 2. Moscow: Izdatel'stvo MGU. pp. 110–116.

Received: January 17, 2020