УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/71/6

Д.А. Иванычев

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ[1]

Представлена математическая модель решения смешанной задачи теории упругости при наличии массовых сил полиномиального характера для трансверсально-изотропного тела вращения. Особенность решения состоит в том, что полученное упругое поле удовлетворяет одновременно заданным условиям на поверхности тела и условиям внутри области (массовым силам), а не представляет собой сумму упругих полей от решения частных задач.

Ключевые слова: *метод граничных состояний*, *трансверсально-изотропные тела*, *массовые силы*, *краевые задачи*, *основная смешанная задача*, *пространство состояний.*

При проектировании деталей из современных материалов особое внимание уделяется расчету их на прочность. С точки зрения теории упругости, эти материалы являются анизотропными в отношении упругих свойств. Усложняет задачу еще и то, что эти детали пребывают в сложных механических условиях: на них действуют массовые силы, а на поверхность наложены условия кинематического и физического характера. Расчет напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий, а также в силу сложной природы материала составляет актуальную научную задачу.

Задачи в теории упругости в смешанной постановке рассматривались реже, чем задачи с однотипными граничными условиями, однако их исследование проводилось в приложении к различным направлениям механики. В работе [1] рассмотрена смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области; предложенный метод является аналитическим. В работе [2] проводился анализ смешанных задач для ограниченных и полуограниченных тел, ослабленных трещинами. Исследовались задачи контакта.

Массовые силы в задачах механики деформируемого тела рассматривались в следующих работах. В [3] использование метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения помогло найти распределение напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В работе [4] метод ортогональных проекций применен для решения задач теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами, а в [5] для несжимаемого материала с помощью уравнения Лагранжа получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил. Автором [6] рассмотрены тяжелые трасверсально-изотропные составные сферы под действием объемных сил и давления внутри полости. Получены точные аналитические решения задач.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "р_а".

Ряд работ посвящен развитиям методов механики. Так, в [7] рассмотрен обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел под действием непрерывных непотенциальных объемных сил. Развитию метода конечных элементов в рамках смешанной постановки, основанной на функционале Рейснера, посвящена работа [8]. В [9] с помощью этой технологии решена смешанная задача теории упругости для тела, имеющего односторонний контакт с упругим полупространством. Авторы [10] решают уравнения Лапласа в осесимметричной постановке с помощью непрямого метода граничных элементов.

Впервые в методе граничных состояний (ГС) объемные силы были рассмотрены в работе [11], а с участием полиномиальных объемных сил для изотропной среды он применен в [12]. Решены смешанные задачи для цилиндра и полушара под действием полиномиальных объемных сил. В [13] приводится решение задачи о линейно-упругом сплюснутом сфероиде, нагруженном самоуравновешенной системой объемных сил. Решение строилось для двух вариантов нагружения: потенциальными и непотенциальными объемными силами. Массовые силы вкупе с краевой задачей термоупругости для трансверсально-изотропных тел рассмотрены в работах [14, 15]. Решение представляло собой сумму упругих полей от краевой задачи, задачи термоупругости и задачи деформирования массовыми силами.

Решению плоских и пространственных задач методом граничных состояний, как для односвязной, так и для многосвязной области посвящены работы [16, 17]. Решение строилось на основе общих представлений плоской задачи и задачи Сен-Венана, полученных С.Г. Лехницким.

В рамках настоящей работы предполагается развитие метода граничных состояний в части решения осесимметричной основной смешанной задачи теории упругости с участием массовых сил для трансверсально-изотропных тел вращения. Спецификой решения является то, что оно одновременно удовлетворяет заданным условиям на поверхности тела и внутри области, т.е. массовым силам, а не представляет собой сумму решения смешанной задачи при отсутствии массовых сил и решения задачи о действии массовых сил на тело со свободной границей.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного конечного и односвязного тела вращения с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Требуется восстановить упругое поле в области V по заданным массовым силам $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ внутри области, поверхностным усилиям $\mathbf{p} = \{p_r, p_z\}$ на части границе S_p и перемещениям $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ на части границе S_u (рис. 1). Естественно, что $S = S_p + S_u$.

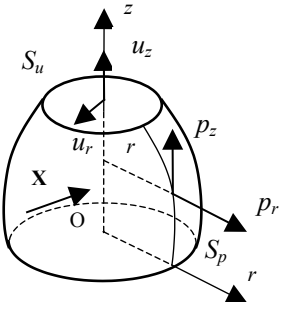

Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

Решение можно провести следующим образом: сначала решить краевую задачу механики от заданных на границе кинематических и физических условий, затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния от действия массовых сил на то же самое тело, только со свободной границей, и полученные поля упругих характеристик сложить.

Однако в этом случае результирующее поле перемещений не будет удовлетворять заданным перемещениям точек границы в условиях смешанной постановки граничных условий и решение будет некорректным.

Целью работы является создание подхода, позволяющего получить упругое поле, удовлетворяющее всем заданным условиям (поверхностным условиям и массовым силам).

2. Общее решение

В работе [18] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным состоянием упругого транстропного тела и двумерными состояниями. В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах бесконечной длины, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости *zy* (деформация происходит в плоскости *zy*; координата *y* плоского состояния соответствует координате *r* пространственного состояния; направление $\eta \perp$ плоскости *zy*):

$$u_y^{pl} = \mathrm{Re}[iq_1\varphi_1(\varsigma_1) + iq_2\varphi_2(\varsigma_2)];\ u_z^{pl} = \mathrm{Re}[p_1\varphi_1(\varsigma_1) + p_2\varphi_2(\varsigma_2)], \qquad (1)$$

где u_y^{pl}, u_z^{pl} – компоненты вектора перемещения плоского вспомогательного состояния; q_1, p_1 – комплексные константы; $\varsigma_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни характеристического уравнения; функции $\varphi_j(\varsigma_j)$ – аналитические по своим переменным.

Пространственное состояние формируется по интегральным формулам перехода от плоского вспомогательного состояния [15]:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy,\ w = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \qquad (2)$$

где *u* и *w* – компоненты вектора перемещения пространственного состояния по оси *r* и *z* соответственно.

Через соотношения Коши и закон Гука вычисляются деформации и перемещения пространственного состояния [18].

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи используем метод граничных состояний (МГС) [19]. Метод оперирует понятиями гильбертовых пространств. Набор компонент тензоров напряжений σ_{ij}^k, деформаций ε_{ij}^k и вектора перемещения u_i^k определен как достаточных набор характеристик упругого поля, описывающих некоторое внутреннее состояние среды. Этот набор имеет вид

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\},\ k = 1, 2, 3, \ldots N, \qquad (3)$$

где *N* – размерность базиса.

Счетная совокупность таких состояний образует конечный базис внутренних состояний

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k, \ldots\}. \qquad (4)$$

Набор компонент вектора перемещения на границе тела вкупе с напряжениями на границе и массовыми силами (условно в силу того, что массовые силы не относятся к поверхности тела) образует граничное состояние:

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\},\ p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \tag{5}$$

где n_j – компонента нормали к границе.

Аналогично образуется счетный базис пространства граничных состояний $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_k, ...\}$.

Рассмотрим уравнение Клапейрона [20]:

$$\int_V \mathbf{X}\mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; $\mathbf{X}$ – вектор массовых сил; $\mathbf{p}_v$, $\mathbf{u}_v$ – поверхностные силы и перемещения точек границы; σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

В силу соотношения (6) пространства сопряжены изоморфизмом, что однозначно определяет взаимосвязь между их наборами. Далее базисы пространств ортонормируются с помощью рекурсивно-матричного алгоритма ортогонализации, построенного на классическом процессе Грама – Шмидта [21]. Алгоритм использует перекрестные скалярные произведения. В пространстве Ξ (в развернутом виде, например, для 1-го и 2-го состояний)

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV, \tag{7}$$

причем в силу тождества Бетти

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

То же в пространстве Γ:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV, \tag{8}$$

причем согласно свойству коммутативности

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

Искомое упругое состояние представляет собой ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k\ ;\ \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k\ ;\ u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k\ ;\ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k\ ;\ \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k\ ;\ X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \tag{9}$$

В случае основной смешанной задачи заданы массовые силы $\mathbf{X} = \{R, Z\}$, перемещения точек границы тела $\mathbf{u}_v = \{u_v, w_v\}$ на участке S_u и усилия $\mathbf{p}_v = \{p_r, p_z\}$ на участке S_p.

Ортонормированность базиса граничных состояний позволяет для его элементов записать

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = 2\delta_{ij}, \tag{10}$$

где индексы i, j – номера элементов в базисах состояний; $\mathbf{u}^{i,j}$ – вектор перемещения в базисе внутренних состояний; $\mathbf{p}_v^{i,j}$, $\mathbf{u}_v^{i,j}$, $\mathbf{X}^{i,j}$ – векторы усилий, перемещений и массовых сил в базисе граничных состояний.

Представим первое слагаемое из (8) в следующем виде:

$$\int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p \ ;$$

$$\int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p \ ,$$

и подставляя последние выражения в (9), получим

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p +$$
$$+ \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p = 2\delta_{ij}.$$

Группируя слагаемые и обозначая

$$\beta_{ij} = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u \ ; \tag{11}$$

$$\lambda_{ij} = \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u \ ,$$

легко убедиться что $\beta_{ij} + \lambda_{ij} = \delta_{ij}$.

Преобразуем λ_{ij} следующим образом: базисные компоненты $\mathbf{X}^j$, $\mathbf{u}_v^j$, $\mathbf{p}_v^j$ заменим заданными $\mathbf{X}$, $\mathbf{u}_v$, $\mathbf{p}_v$ и перебор будем осуществлять по индексу j, образуя тем самым матрицы коэффициентов:

$$\alpha_j = 2\int_V \mathbf{X}\mathbf{u}^j dV + 2\int_{Sp} \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v^j dS_p + 2\int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS_u \ ; \ \mathrm{B} = [\beta_{ij}]_{N\times N} \ ; \ \mathrm{A} = [\alpha_j]_N \ , \tag{12}$$

где $\mathbf{u}^j$ – вектор перемещения в j-м элементе базиса внутренних состояний (3); $\mathbf{p}_v^j$, $\mathbf{u}_v^j$ – векторы усилий и перемещений на границе тела в j-м элементе базиса граничных состояний (5).

Следует отметить, что матрица B является кососимметричной ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$).

Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}, \tag{13}$$

где N – число используемых элементов базиса.

Решение завершается соотношениями (9).

4. Формирование базиса

Особое внимание в методе граничных состояний уделяется построению базиса внутренних состояний, которое осуществляется с помощью общего или фундаментального решения для среды. Также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний воспользуемся методикой, описанной в [8]. Применим фундаментальную систему многочленов $y^{\alpha}z^{\beta}$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y,z)$, образуя некоторое упругое состояние плоской деформации:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{\left\{y^{\alpha}z^{\beta},0,\right\},\left\{0,y^{\alpha}z^{\beta}\right\}\right\}.$$

Генерирование различных вариантов в пределах $\alpha+\beta\le n$, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, позволяет получить множество плоских состояний. Далее по формулам (2) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r,z)$ пространственного осесимметричного состояния и по цепочке: формулы Коши – закон Гука – уравнения равновесия, определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от действия массовых сил:

$$\Xi^{X} = \left\{\xi_1^{X},\xi_2^{X},\xi_3^{X},\ldots,\xi_k^{X},\ldots\right\}. \tag{14}$$

В задаче эластостатики используется общее решение плоской задачи (1). Для формирования множества плоских состояний аналитическим функциям $\varphi_1(\varsigma_1)$ и $\varphi_2(\varsigma_2)$ придаются последовательно значения

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\varsigma_1)\\ \varphi_2(\varsigma_2)\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\varsigma_1^n\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ \varsigma_2^n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\varsigma_1^n\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ i\varsigma_2^n\end{pmatrix},\ldots\right\},n=1,2,3,\ldots.$$

Определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и затем следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (2), образуя конечномерный базис в задаче эластостатики:

$$\Xi^{S} = \left\{\xi_1^{S},\xi_2^{S},\xi_3^{S},\ldots,\xi_k^{S},\ldots\right\}. \tag{15}$$

Результирующий базис (4) представляет собой объединение

$$\Xi = \left\{\xi_1^{S},\xi_2^{X},\xi_3^{S},.\xi_4^{X},\ldots,\xi_{k-1}^{S},\xi_k^{X},\ldots\right\}. \tag{16}$$

Данное объединение необходимо для обеспечения сходимости решения. Так как условия, задаваемые на границе тела, могут вызывать одновременно как «уравновешенные» (удовлетворяющие уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил), так и «неуравновешенные» (удовлетворяющие уравнениям равновесия с массовыми силами) напряжения, то для восстановления последних потребуется наличие элементов с «уравновешенными» напряжениями, в противном случае будет наблюдаться расходимость решения.

5. Решение задачи для полушара

Рассмотрим равновесие трансторопного упругого полушара из темно-серого алевролита (горная порода) [20]. После процесса обезразмеривания, аналогия которого приведена в работе [22], нормированные технические константы материала составили: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$ и геометрия области $V = \{(z,r)\big|\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{1-r^2}\}$ (рис. 2).

На область тела действуют массовые силы $\mathbf{X} = \{r, z\}$; граница S_2 защемлена, $\mathbf{u}_v = 0$; к границе S_1 приложены сжимающие усилия локального характера (рис. 2, слева). Развертка поверхности S_1 с граничными условиями показана на рис. 2, справа.

$$p_r = 0; p_z = \frac{1}{50}\left(\frac{50}{51} - \frac{1}{1/50 + r^2}\right).$$

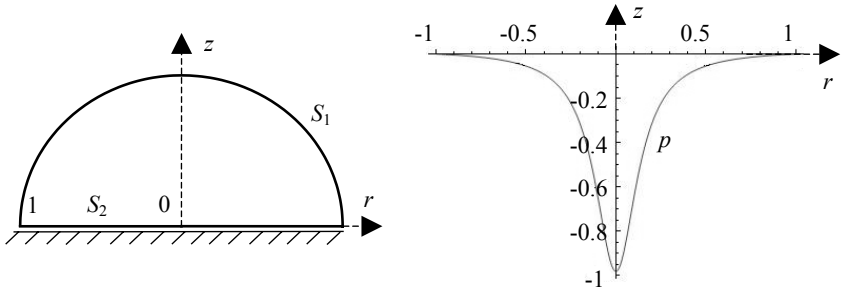

Рис. 2. Меридианное сечение полушара (слева)
и граничные условия на поверхности S_1 (справа)
Fig. 2. A meridian section of a hemisphere (on the left)
and boundary conditions on the surface S_1 (on the right)

После процедуры ортонормирования базиса внутренних состояний (16) и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 5 элементов).

Таблица 1

Перемещения ортонормированного базиса

	u	w
ξ_1	0	$0.45707z$
ξ_2	$0.32092r$	$-0.18063z$
ξ_3	0	$-0.7034z + 0.9378z^2$
ξ_4	$-0.2159r + 0.5757rz$	$0.2574r^2 + 0.1215z - 0.162z^2$
ξ_5	$-0.4442r + 1.1845rz$	$-0.8573r^2 + 0.25z - 0.3333z^2$

Матрица коэффициентов β_{ij} (11), представлена в табл. 2 (i – определяется по строке, j – по столбцу; показано $N = 5$).

Таблица 2

Матрица коэффициентов β_{ij}

1	0	0	–0.4224	1.4067
0	1	0	0.4462	–0.2169
0	0	1	0.6501	–2.1649
0.4224	–0.4462	–0.6501	1	0.7636
–1.4067	0.2169	2.1649	–0.7636	1

Для решения потребовался довольно большой базис в 79 элементов. Это связано с локальностью воздействия нагрузки на поверхность тела. Приведем значения пяти коэффициентов Фурье (13):

$$c_1 = 0.03395\ ;\ c_2 = 0.04312\ ;\ c_3 = -0.02488\ ;\ c_4 = 0.01992\ ;\ c_5 = 0.01036\ .$$

Оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных граничных условий (ГУ) с восстановленными в результате решения (рис. 4), а также сопоставлением полученного поля массовых сил с заданным полем. Здесь заданные (| | | |) и восстановленные (——) ГУ изображены на графиках в масштабе. Например, истинное значение на левом графике рис. 3, *a* равно значению на графике, умноженному на коэффициент к.

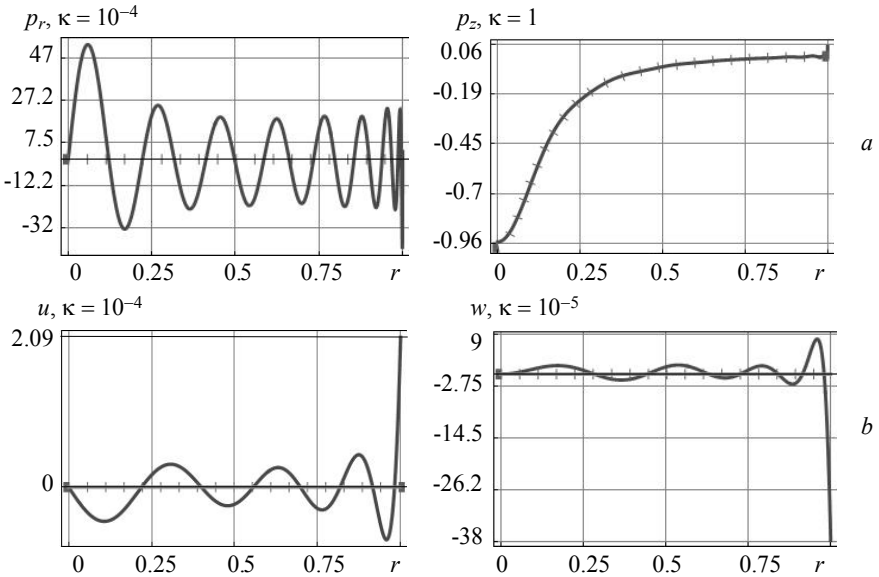

Рис. 3. Верификация граничных условий на участках поверхности тела: *a* – на участке S_1, *b* – на участке S_2

Fig. 3. Verification of boundary conditions on the body surfaces: on the surface (*a*) S_1 and (*b*) S_1

Как видно из графиков, максимальные отклонения восстановленных условий на поверхности тела от заданных составили (по абсолютной величине): 6 % в точке $r = 1$, $z = 0$ и 4 % в точке $r = 0$, $z = 1$.

Восстановленные массовые силы во всей области удобнее показать в виде изолиний (рис. 4). В силу осевой симметрии представлена правая половина меридионального сечения, показанного на рис. 2.

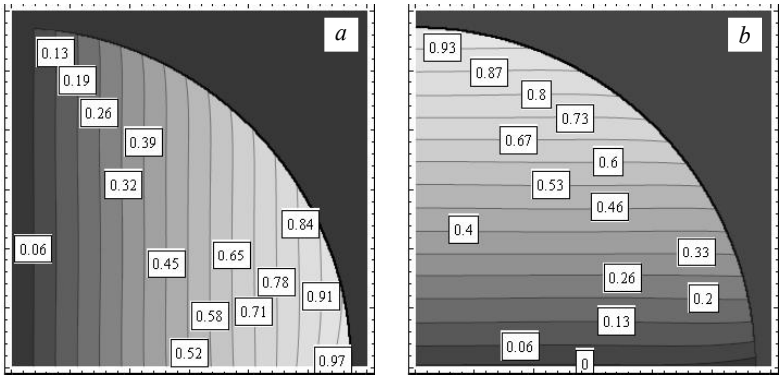

Рис. 4. Изолинии восстановленного вектора массовых сил:
a – компонента *R*, *b* – компонента *Z*
Fig. 4. Contours of the reconstructed mass force vector:
(*a*) *R*-component and (*b*) *Z*-component

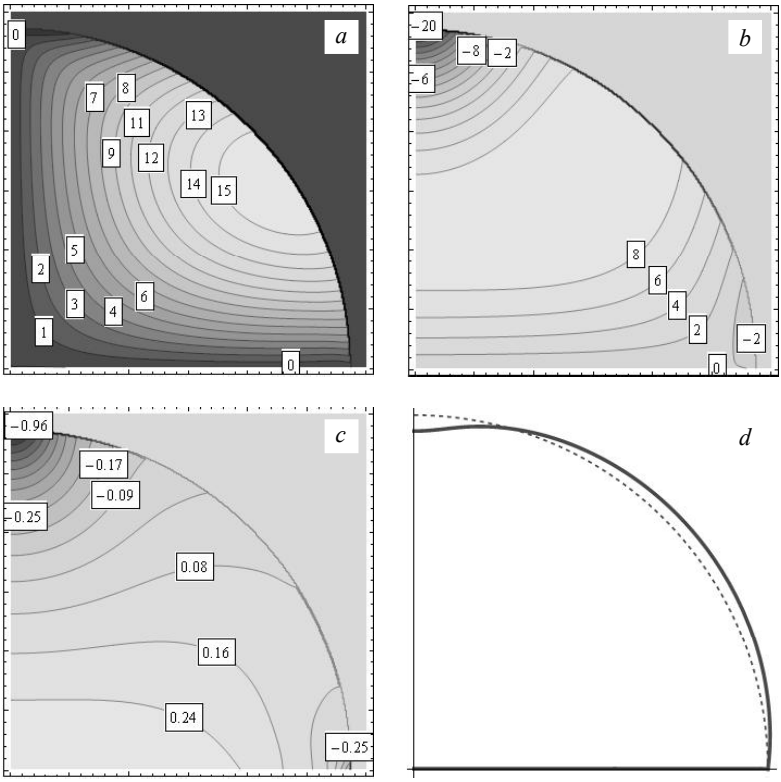

Рис. 5. Характеристики упругого поля: *a* – компонента вектора перемещения *u* ($\kappa = 10^{-3}$), *b* – компонента вектора перемещения *w* ($\kappa = 10^{-3}$), *c* – компонента тензора напряжений σ_{zz} ($\kappa = 1$), *d* – контур деформированного тела (в увеличенном виде)
Fig. 5. Elastic field characteristics: (*a*) a component of the displacement vector *u* ($\kappa = 10^{-3}$), (*b*) a component of the displacement vector *w* ($\kappa = 10^{-3}$), (*c*) a component of the stress tensor σ_{zz} ($\kappa = 1$), and (*d*) a deformed body contour (enlarged view)

В области восстановления массовых сил наибольшие отклонения находятся в ключевых точках $(r,z)=(1,0)$, $(0,1)$ и соответственно составляют: для R – 5.5 и 0 %, для Z – 5 и 3.7 %.

Остальные характеристики НДС представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 5.

Точность решения повышается при увеличении числа используемых элементов базиса.

При тестировании предложенного метода решения смешанных задач на различных видах функций заданных массовых сил, наблюдалась аналогичная особенность, что и во второй основной задаче [23]. Если область интегрирования V симметрична относительно плоскости $z=0$, то задачи с несимметричной и не кососимметричной относительно этой плоскости компонентой Z, например $Z=z+1$, сходимостью решения в области восстановления этой компоненты не обладают. В этом случае необходимо задать несимметричную относительно плоскости $z=0$ область тела V, например с координатой $0\le z\le 1$.

Описанный прием позволяет решить осесимметричную основную смешанную задачу для трансторопных тел вращения при отсутствии объемных сил. До настоящего момента задачи этого класса средствами метода граничных состояний не были реализованы. Однако здесь необходимо использовать базис вида (15) с заранее отсутствующими массовыми силами, в противном случае в решение заведомо вносится погрешность, что приводит к неудовлетворительному результату.

По идентичной теории для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием массовых сил, решены контактные задачи без трения [24].

Заключение

Сформулирована методика решения осесимметричной смешанной задачи для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся одновременно под действием стационарных массовых сил. Методика представляет собой развитие метода граничных состояний, а именно, представлен новый способ формирования базиса внутренних состояний, основанный не только на общем решении, но и на приеме использования фундаментальных многочленов, а также встраивании последних в общий базис. Поэтому изложенный подход является более широким, чем подход, основанный только на общих или фундаментальных решениях. В данном случае используется процедура ортогонализации, определяемая соотношениями (7) и (8), позволяющая сразу строить решение задачи с заданными массовыми и поверхностными силами, а не строить полное решение как сумму частного решения задачи при действии только массовых сил и общего решения смешанной задачи, как сделано, например, в работе [7]. Новизна заключается и во включении массовых сил в граничное состояние. В традиционном методе граничных состояний внутреннее состояние состояло из усилий и перемещений.

Были проанализированы три способа формирования базиса внутренних состояний: в виде (14), в виде (17) и в виде (16):

$$\Xi=\left\{\xi_1^S+\xi_1^X,\xi_2^S+\xi_2^X,...,\xi_k^S+\xi_k^X,...\right\}. \qquad (17)$$

Ряды, построенные на базисе (14), сходимостью не обладают. Увеличение числа использованных элементов базиса не приводит к уменьшению погрешности, которая закладывается на первых элементах.

При построении базиса нужно стремиться к наибольшей простоте вида функций в базисных элементах, чем базис (17) не обладает, так как каждый элемент представляет собой сумму двух элементов. К тому же при решении задач он показал худшую сходимость по сравнению с базисом вида (16). Последний продемонстрировал наибольшую эффективность.

Наиболее трудоемким процессом при формировании решения является построение ортонормированного базиса и матрицы коэффициентов β_{ij}, однако эти процедуры производятся для тела один раз и могут быть использованы при решении задач с различными краевыми условиями и массовыми силами. Здесь, однако, нужно указать, что положение участков S_u и S_p на поверхности тела не может быть изменено.

В краевых задачах механики известно, что увеличение размерности ведет к ее значительному усложнению. Здесь данный эффект проявляется в интегральных выражениях для коэффициентов β_{ij} (11) и α_j (12), где требуется вычисление трех интегралов. Например, во второй основной задаче [23] таких интеграла два, а в контактной [24] уже четыре.

Решение имеет аналитический вид и вполне пригодно для дальнейшего анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Божкова Л.В.*, *Рябов В.Г.*, *Норицина Г.И.* Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2011. № 1 (11). С. 217–221.
2. *Соболь Б.В.* Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1778–1780.
3. *Голоскоков Д.П.*, *Данилюк В.А.* Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
4. *Стружанов В.В.* О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
5. *Агаханов Э.К.*, *Магомедэминов Н.С.* Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. № 12. С. 27–28.
6. *Фукалов А.А.* Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 2015. С. 3951–3953.
7. *Левина Л.В*, *Кузьменко Н.В.* Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. Казань, 2015. С. 2276–2278.
8. *Станкевич И.В.* Математическое моделирование задач теории упругости с использованием МКЭ на основе функционала Рейсснера // Символ науки. 2017. № 4 (2). С. 21–25.
9. *Станкевич И.В.* Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и математической моделирование. 2017. № 5. С. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.
10. *Пономарева М.А.*, *Собко Е.А.*, *Якутенок В.А.* Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 84–96.

11. *Пеньков В.Б.*, *Пеньков В.В.* Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума // Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6. № 2. С. 124–127.
12. *Кузьменко В.И.*, *Кузьменко Н.В.*, *Левина Л.В.*, *Пеньков В.Б.* Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 84–94. DOI: 10.3103/S0025654419050108.
13. *Пеньков В.Б.*, *Левина Л.В.*, *Новикова О.С.* Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. Вып. 1. С. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
14. *Ivanychev D.A.*, *Levina E.Yu.* Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. No. 012058. 15 p. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
15. *Ivanychev D.A.* The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2019. 2019. P. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
16. *Ivanychev D.A.*, *Levin M.Yu.*, *Levina E.Yu.* The boundary state method in solving the anisotropic elasticity theory problems for a multi-connected flat region // TEST Engineering & Management. 2019. V. 81. P. 4421–4426.
17. *Ivanychev D.A.*, *Levina E.Yu.*, *Abdullakh L.S.*, *Glazkova Yu.A.* The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. P. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
18. *Александров А.Я.*, *Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.
19. *Пеньков В.Б.*, *Пеньков В.В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
20. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
21. *Саталкина Л.В.* Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
22. *Левина Л.В.*, *Новикова О.С.*, *Пеньков В.Б.* Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
23. *Иванычев Д.А.* Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
24. *Иванычев Д.А.* Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

Статья поступила 16.05.2020

Ivanychev D.A. (2021) A BOUNDARY STATE METHOD FOR SOLVING A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY WITH MASS FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 63–77

DOI 10.17223/19988621/71/6

Keywords: boundary state method, transversely isotropic bodies, mass forces, boundary value problems, main mixed problem, state space.

The paper presents a methodology for determining a stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under conditions of a mixed problem of the elasticity theory, i.e. displacements of the boundary points are specified on the one part of the surface, and forces are assigned on the other part. At the same time, the body is exposed to mass forces. The problem solving involves the development of the boundary state method. A theory is created to construct the bases of spaces for internal and boundary states. The basis of the internal states includes displacements, strains, and stresses. The basis of the boundary states includes forces at the boundary, displacements of the boundary points, and mass forces. Spaces are conjugated by an isomorphism. It allows one to reduce the determination of the internal state to a study of the boundary state. Characteristics of the stress-strain state are presented in terms of the Fourier series. Finally, the determination of the elastic state is reduced to the solving of an infinite system of algebraic equations.

A result of the study is presented as a solution to the main mixed problem for a hemisphere clamped on a plane surface and exposed to a concentrated compressive force and mass forces.

Financial support. The reported study was funded by RFBR and the Lipetsk Region according to the research project No. 19-41-480003 "r_a".

Dmitriy A. IVANYCHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdmal@mail.ru

REFERENCES

1. Bozhkova L.V., Ryabov V.G., Noritsina G.I. (2011) Smeshannaya ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya dvukhsloynoy kol'tsevoy oblasti [A mixed type plane problem of the elasticity theory for a two-layer annular domain]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*. 1(11). pp. 217–221.
2. Sobol' B.V. (2011) Ob asimptoticheskikh resheniyakh trekhmernykh staticheskikh zadach teorii uprugosti so smeshannymi granichnymi usloviyami [About asymptomatic solutions to three-dimensional static problems of the elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1778–1780.
3. Goloskokov D.P., Danilyuk V.A. (2013) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov [Modeling of a stress-strain state of elastic bodies by means of polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 1. pp. 8–14.
4. Struzhanov V.V. (2004) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solving of edge problems of the elasticity theory using the orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
5. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. (2007) Usloviya ekvivalentnosti vozdeystviy dlya peremeshcheniy [Conditions of the equivalence of impacts for displacements]. *Vestnik DGTU. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 12. pp. 27–28.
6. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravnovesii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on the elastic equilibrium of composite thick-walled transversally isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their

applications]. *XI Vserossiiskiy s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 3951–3953.
7. Levina L.V., Kuzmenko N.V. (2015) Obratnyy metod effektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [An inverse method of effective analysis of an elastic body state from mass forces of a continuous type]. *XI Vserossiiskiy s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 2276–2278.
8. Stankevich I.V. (2017) Matematicheskoe modelirovanie zadach teorii uprugosti s ispol'zovaniem MKE na osnove funktsionala Reyssnera [Mathematical simulation of elasticity theory problems using the ICE based on Reissner's functionality]. *Simvol nauki*. 4(2). pp. 21–25.
9. Stankevich I.V. (2017) Chislennoe reshenie smeshannykh zadach teorii uprugosti s odnostoronnimi svyazyami [Numerical solution of mixed problems of the theory of elasticity with one-sided constraints]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie – Mathematics and Mathematical Modeling*. 5. pp. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.
10. Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. (2015) Reshenie osesimmetrichnykh zadach teorii potentsiala nepryamym metodom granichnykh elementov [Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 84–96. DOI: 10.17223/19988621/37/8.
11. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal.* 2(2). pp. 115–137.
12. Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., Pen'kov V.B. (2019) A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation. *Mechanics of Solids.* 54(5). pp. 741–749. DOI: 10.1134/S0032823519010053.
13. Pen'kov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. (2020) Analiticheskoe reshenie zadach elastostatiki odnosvyaznogo tela, nagruzhennogo nekonservativnymi ob"emnymi silami. Teoreticheskoe i algoritmicheskoe obespechenie [Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces: theoretical and algorithmic support]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya*: *Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University*, *Series*: *Physical and Mathematical Sciences.* 24(1). pp. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. (2019) Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics*: *Conference Series*. 1348. Article 012058. pp. 1–15. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
15. Ivanychev D.A. (2019) The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces. *Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems*, *Mathematical Modelling*, *Automation and Energy Efficiency*, *SUMMA 2019*. pp. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
16. Ivanychev D.A., Levin M.Yu., Levina E.Yu. (2019) The boundary state method in solving the anisotropic elasticity theory problems for a multi-connected flat region. *TEST Engineering & Management*. 81. pp. 4421–4426.
17. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S, Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering*, *Management*, *& Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
18. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* (*primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo*) [Three-dimensional problems of the elasticity theory (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
19. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [A method of boundary states for solving the problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal.* 2(2). pp. 115–137.

20. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The elasticity theory for an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
21. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of a state space basis under strong limitations for energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
22. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the elasticity theory problem of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU – Bulletin of LSTU*. 2(28). pp. 16–24.
23. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
24. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi salami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

Received: March 16, 2020