ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 55

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/55/7

Л.А. Нежельская, А.А. Першина

ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Изучается рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий, являющийся распространенной математической моделью информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных сетях, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в стационарном режиме и в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматриваются общий и особый случаи задания параметров рекуррентного обобщенного асинхронного потока событий. Приводятся численные результаты (в общем и особом случаях) по оцениванию параметра T^* методом максимального правдоподобия.

Ключевые слова: рекуррентный обобщенный асинхронный поток; непродлевающееся случайное мертвое время; оценка параметра; метод максимального правдоподобия.

Подавляющее число статей прошлого века посвящено изучению систем и сетей массового обслуживания (СМО, СеМО) с входящими простейшими потоками событий (сообщений, запросов, заявок). Однако в связи с интенсивным развитием (с конца прошлого века) телекоммуникационных сетей, беспроводных и мобильных сетей связи математическая модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам запросов. Требования практики послужили стимулом к использованию дважды стохастических потоков в качестве математической модели реальных потоков запросов в телекоммуникационных системах и сетях. Подчеркнем, что основным свойством дважды стохастических потоков является их коррелированность. Термин «дважды стохастические потоки» связан с тем, что события потока наступают в случайные моменты времени, а интенсивность потока представляет собой случайный процесс. В связи с этим дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Впервые результаты исследований потоков второго класса опубликованы практически одновременно, в 1979 г., в работах [3, 4] и работе [5]. В [3, 4] отмеченные потоки получили название MC(Markov chain)-потоки. В [5] – MVP(Markov versatile processes)-потоки. В работе [6] эти потоки называются также MAP(Markovian Arrival Process)-потоками событий.

Подчеркнем, что MC-потоки событий являются наиболее характерной и подходящей математической моделью потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности в широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [7–11].

Большинством авторов исследования СМО и СеМО осуществляются в условиях, когда все события входящего дважды стохастического потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора [12], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются). В этой связи можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении различного рода задач оценивания по измерениям моментов наступления наблюдаемых сообщений исходного дважды стохастического потока (эффект мертвого времени влечет за собой потери событий исходного потока, что отрицательно сказывается на решении задач оценивания). Все устройства регистрации делятся на две группы [13]. Первую группу составляют устройства с непродевающимся мертвым временем, вторую – устройства с продлевающимся мертвым временем. Период ненаблюдаемости событий потока (период мертвого времени) может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. В настоящей работе в качестве искажающего фактора рассматривается непродлевающееся случайное мертвое время.

В настоящее время в мировой литературе имеется, по-видимому, единственная монография [14], где приведено систематизированное изложение теории очередей с коррелированными (дважды стохастическими) потоками применительно к телекоммуникационным сетям. Подчеркнем, что изложенная в [14] теория и ее применение в телекоммуникационных сетях рассмотрены без искажающих факторов (непродлевающегося либо продлевающегося мертвого времени), воздействующих на входящий дважды стохастический поток событий.

Математические модели дважды стохастических потоков событий с непродлевающимся детерминированным мертвым временем широко использовались и используются при решении задач оценивания состояний и параметров дважды стохастических потоков событий по измерениям моментов наступления событий наблюдаемых потоков [15–21].

Однако достаточно открытым остается вопрос изучения дважды стохастических потоков событий, когда мертвое время является случайной величиной. Здесь отметим работу [22], в которой решается задача оценки параметров асинхронного потока событий в условиях случайного мертвого времени, работу [23], в которой решается задача оценки параметра распределения непродлевающегося случайного мертвого времени в пуассоновском потоке, и работу [24], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдаемости в пуассоновском потоке событий при продлевающемся случайном мертвом времени.

В настоящей статье рассматривается рекуррентный обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий (рекуррентный обобщенный MMPP-поток), являющийся обобщением асинхронного потока событий [25], функционирующий в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени. Случайное мертвое время распределено по равномерному закону. На параметры обобщенного асинхронного потока событий накладываются ограничения, приводящие его к рекуррентному потоку (изучаются общий и особый случаи). Данная статья непосредственно примыкает к исследованиям, проведенным в [26, 27].

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается рекуррентный обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментами наступления событий пуассоновского потока интенсивности λ_i, $i = 1, 2$ (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) дополнительное событие во втором состоянии. Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый (принципиально ненаблюдаемый) марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению (теряются) и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью $p(T)=1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$. В результате формируется наблюдаемый поток событий, отличный от исходного (часть событий исходного потока теряется).

Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий (переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0.– начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем). Необходимо в момент времени t на основании выборки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ($t_n < t$) наблюденных моментов наступления событий оценить методом максимального правдоподобия параметр T^* (МП-оценка).

2. Приближенная МП-оценка параметра T^* в общем случае

Предварительно отметим, что в [28] получены результаты по оценке параметра T^* для коррелированного обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся случайном мертвом времени. Для того чтобы перейти от коррелированного потока к рекуррентному, необходимо установить условия рекуррентности, при которых коррелированный поток становится рекуррентным. В [29] получены условия рекуррентности для наблюдаемого потока: 1) $\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2 = 0$, 2) $\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 = 0$, 3) $\lambda_1 - \lambda_2 + q\alpha_1 - p\alpha_2 = 0$, когда T – детерминированная величина, т.е. при выполнении одного из этих условий коррелированный наблюдаемый поток становится рекуррентным.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, k = 1, 2, …, значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$).Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k-го интервала есть $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k в наблюдаемом потоке событий. В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

В [29] с учетом первого условия рекуррентности получено выражение для условной плотности вероятности $p(\tau \mid T)$, когда длительность мертвого времени является детерминированной величиной:

$$p(\tau|T)=0,\ 0\leq\tau<T;\ p(\tau|T)=\gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)}+[1-\gamma(T)]z_2e^{-z_2(\tau-T)},\tau\geq T;$$
$$\gamma(T)=[z_2-(\lambda_1+p\alpha_1)\pi_1(T)-(\lambda_2+q\alpha_2)\pi_2(T)]/(z_2-z_1);\ z_2-z_1\neq 0; \tag{1}$$
$$\pi_1(T)=\pi_1\left[1+\alpha_1\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_2+(p+q)\alpha_1\alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],\ \pi_2(T)=1-\pi_1(T);$$
$$\pi_1=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2),\ \pi_2=1-\pi_1;$$
$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2)\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right],\ 0<z_1<z_2.$$

Тогда плотность $p(\tau)$ примет вид:

$$p(\tau)=\int\limits_{(T)}p(T)p(\tau|T)dT=\begin{cases}p_1(\tau)=\int\limits_0^{\tau}p(T)p(\tau|T)dT, 0\leq\tau<T^*;\\ p_2(\tau)=\int\limits_0^{T^*}p(T)p(\tau|T)dT,\tau\geq T^*.\end{cases} \tag{2}$$

Подставляя в (2) выражение (1), учитывая, что $p(T)=1/T^*$, находим

$$p_1(\tau)=\frac{1}{T^*}\left[1-e^{-z_1\tau}-e^{-z_2\tau}+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\right],\ 0\leq\tau<T^*; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}p_2(\tau)=\frac{1}{T^*(z_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2)}\Big\{\Big[&-(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)+z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_1)e^{z_1T^*}-z_1(\alpha_1+\alpha_2-z_2)\times\\ &\times e^{-(\alpha_1+\alpha_2-z_1)T^*}\Big]e^{-z_1\tau}-\Big[(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)+z_1(\alpha_1+\alpha_2-z_2)e^{z_2T^*}-\\ &-z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2-z_2)T^*}\Big]e^{-z_2\tau}\Big\},\ \tau\geq T^*.\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, во-первых, что $\int\limits_0^{\infty} p(\tau)d\tau = \int\limits_0^{T^*} p_1(\tau)d\tau + \int\limits_{T^*}^{\infty} p_2(\tau)d\tau = 1$, во-вторых, $\lim p_1(\tau) = p_2(T^*)$ при $\tau \to T^* - 0$, т.е. в точке $\tau = T^*$ плотность $p(\tau)$ является непрерывной функцией переменной τ, в-третьих, $\lim p_1'(\tau) \neq p_2'(T^*)$ при $\tau \to T^* - 0$, т.е. в точке $\tau = T^*$ плотность $p(\tau)$ претерпевает излом.

В упомянутых выше статьях [26–28] для нахождения оценки параметра T^* был использован метод моментов [30–32]. В настоящей статье для случая рекуррентного обобщенного асинхронного потока событий для оценки параметра T^* воспользуемся методом максимального правдоподобия [31, 32]. Применение последнего оправдано тем, что если параметры потока обеспечивают реализацию одного из условий рекуррентности, например первого, то случайные величины – длительности интервалов между соседними событиями потока – становятся взаимонезависимыми.

Пусть в процессе наблюдения за потоком на полуинтервале времени $(t_0, t]$ измерены n значений: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Тогда функция правдоподобия запишется в виде:

$$L\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right) = \prod_{k=1}^{n} p\left(\tau_k \mid T^*\right),\ T^* > 0. \tag{5}$$

где $p(\tau_k \mid T^*)$ – плотность вероятности, определенная формулами (2), (3), (4) в которых $\tau = \tau_k$ (τ_k – измерения), T^* – переменная величина ($T^* > 0$). С учетом (3), (4) выражение (5) примет вид:

$$L\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right) = L_1\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right) L_2\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right);$$

$$L_1\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right) = \prod_{k:\tau_k < T^*} p_1\left(\tau_k \mid T^*\right),\ L_2\left(T^* \mid \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\right) = \prod_{k:\tau_k \geq T^*} p_2\left(\tau_k \mid T^*\right). \tag{6}$$

Упорядочим величины τ_k, $k = \overline{1,n}$, по возрастанию: $0 < \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \ldots < \tau^{(n)} < \infty$. Тогда (6) перепишется в виде:

$$L\left(T^* \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(n)}\right) = \prod_{k=1}^{n} p_2\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right),\ 0 < T^* < \tau^{(1)};$$

$$L\left(T^* \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(n)}\right) = p_1\left(\tau^{(1)} \mid T^*\right) \prod_{k=2}^{n} p_2\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right),\ \tau^{(1)} \leq T^* < \tau^{(2)};$$

$$L\left(T^* \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(n)}\right) = \prod_{k=1}^{2} p_1\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right) \prod_{k=3}^{n} p_2\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right),\ \tau^{(2)} \leq T^* < \tau^{(3)};$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$L\left(T^* \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(n)}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} p_1\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right) p_2\left(\tau^{(n)} \mid T^*\right),\ \tau^{(n-1)} \leq T^* < \tau^{(n)};$$

$$L\left(T^* \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(n)}\right) = \prod_{k=1}^{n} p_1\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right),\ \tau^{(n)} \leq T^* < \infty. \tag{7}$$

Теорема. Функция $p(\tau^{(k)} \mid T^*)$ переменной T^* ($T^* > 0$) достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$.

Доказательство. Обозначим $p_1(\tau^{(k)} \mid T^*)$ – плотность вероятности, определенную формулой (3) в которой $\tau = \tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$ – измерение), T^*– переменная величина ($T^* > 0$). Тогда очевидно, что $dp_1(\tau^{(k)} \mid T^*)/dT^* < 0$ для $T^* \geq \tau^{(k)}$, т.е. функция $p_1(\tau^{(k)} \mid T^*)$ – убывающая функция переменной T^* и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$.

Рассмотрим функцию $p_2(\tau^{(k)} \mid T^*)$ – плотность вероятности, определенную формулой (4), в которой $\tau = \tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$ – измерение), T^* – переменная величина, $0 < T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$. При этом $p_1(\tau^{(k)} \mid T^* = \tau^{(k)}) = p_2(\tau^{(k)} \mid T^* = \tau^{(k)})$, $k = \overline{1,n}$. Производная по T^* функции $p_2(\tau^{(k)} \mid T^*)$ выпишется в виде:

$$p_2'\left(\tau^{(k)} \mid T^*\right) = \frac{1}{(z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2)\left(T^*\right)^2}\varphi\left(T^*\right),\ 0 < T^* \le \tau^{(k)},\ k = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\varphi\left(T^*\right) = (\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)[e^{-z_1\tau^{(k)}} + e^{-z_2\tau^{(k)}}] + z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_1)\left(z_1T^*-1\right)e^{z_1\left(T^*-\tau^{(k)}\right)} - z_1(\alpha_1+\alpha_2-z_2)\times \\ \times\left(z_2T^*-1\right)e^{z_2\left(T^*-\tau^{(k)}\right)} + z_1(\alpha_1+\alpha_2-z_2)\left[(\alpha_1+\alpha_2-z_1)T^*+1\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2-z_1)T^*}e^{-z_1\tau^{(k)}} - \\ -z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_1)\left[(\alpha_1+\alpha_2-z_2)T^*+1\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2-z_2)T^*}e^{-z_2\tau^{(k)}}.\end{gathered} \tag{9}$$

Знак производной (8) определяется знаком функции (9). Рассмотрим функцию $\varphi(T^*)$ как функцию двух переменных T^* и $\tau^{(k)}$, т.е. $\varphi(T^*) = \varphi(T^*, \tau^{(k)})$, $0 \le T^* \le \tau^{(k)}$, $\tau^{(k)} \ge 0$, $k = \overline{1,n}$. Имеем $\varphi(T^* = 0, \tau^{(k)}) = 0$. Производная функции $\varphi(T^*, \tau^{(k)})$ по переменной T^* выпишется в виде:

$$\varphi'\left(T^*, \tau^{(k)}\right) = \varphi_1\left(T^*\right)\varphi_2\left(T^*, \tau^{(k)}\right),\ 0 \le T^* \le \tau^{(k)},\ \tau^{(k)} \ge 0,\ k = \overline{1,n},$$

$$\varphi_1\left(T^*\right) = z_1z_2 - (\alpha_1+\alpha_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2-z_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T^*},$$

$$\varphi_2\left(T^*, \tau^{(k)}\right) = (\alpha_1+\alpha_2-z_1)z_1e^{-z_1\left(\tau^{(k)}-T^*\right)} - (\alpha_1+\alpha_2-z_2)z_2e^{-\left(\tau^{(k)}-T^*\right)}.$$

Нетрудно показать, что $\varphi_1(T^*) > 0$ для $0 \le T^* \le \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$; $\varphi_2(T^*, \tau^{(k)}) > 0$ для $0 \le T^* \le \tau^{(k)}$, $\tau^{(k)} \ge 0$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $\varphi'(T^*, \tau^{(k)}) > 0$ для $0 \le T^* \le \tau^{(k)}$, $\tau^{(k)} \ge 0$, $k = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что $\varphi(T^*)$ – возрастающая функция переменной T^*, $T^* > 0$. Последнее означает, что $p_2'(\tau^{(k)} \mid T^*) > 0$, $0 < T^* \le \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $p_2(\tau^{(k)} \mid T^*)$ – возрастающая функция переменной T^* ($0 < T^* \le \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$) и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$. Объединяя два утверждения относительно глобальных максимумов функций $p_1(\tau^{(k)} \mid T^*)$ и $p_2(\tau^{(k)} \mid T^*)$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Результат теоремы позволяет утверждать, что на отрезке $[0, \tau^{(1)}]$ изменения T^* функция правдоподобия (7) является возрастающей функцией и достигает своего локального максимума в точке $T^* = \tau^{(1)}$. На полуинтервале $[\tau^{(n)}, \infty)$ изменения T^* функция правдоподобия (7) является убывающей функцией и достигает своего локального максимума в точке $T^* = \tau^{(n)}$.

Таким образом, для отыскания глобального максимума функции правдоподобия (7) необходимо исследовать отрезок $[\tau^{(1)}, \tau^{(n)}]$ изменения переменной T^* ($\tau^{(1)} \le T^* \le \tau^{(n)}$).

Так как функция $p(\tau^{(k)} \mid T^*)$ ($T^* > 0$) в точке $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, достигает глобального максимума, то будем считать точку $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, точкой подозрительной на локальный максимум функции правдоподобия (7). Тогда алгоритм нахождения приближенной МП-оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* будет выглядеть следующим образом: 1) вычисляются значения функции правдоподобия (7) в точках $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$; 2) находится максимальное значение функции (7) на множестве этих точек; 3) в качестве приближенной МП-оценки параметра T^* выбирается $\hat{T}^*$, обеспечивающее максимальное значение функции (7) на предыдущем шаге алгоритма.

С учетом второго условия рекуррентности в [29] получено выражение для условной плотности вероятности $p(\tau \mid T)$, когда T – детерминированная величина:

$$p(\tau \mid T) = 0,\ 0 \le \tau < T;\ p(\tau \mid T) = z_1e^{-z_1(\tau - T)},\ \tau > T,\ z_1 = \lambda_1 + p\alpha_1. \tag{10}$$

Тогда аналогично предыдущему случаю, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*}\left(1 - e^{-z_1\tau}\right),\ 0 \le \tau < T^*;\ p_2(\tau) = \frac{1}{T^*}e^{-z_1\tau}\left(e^{z_1T^*} - 1\right),\ \tau \ge T^*. \tag{11}$$

Дальнейший ход изложения повторяет рассмотренный выше.

Наконец, для третьего условия рекуррентности в [29] получено выражение для $p(\tau\,|\,T)$ в виде (10), где $z_1 = \lambda_1 + q\alpha_1$. Тогда $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$ сохраняют вид (11), и ход изложения сохраняется аналогично рассмотренному для первого условия рекуррентности.

С целью установления качества получаемых методом максимального правдоподобия оценок параметра T^* поставлены статистические эксперименты. Статистические эксперименты поставлены для рекуррентного наблюдаемого потока, для которого справедливо первое условие рекуррентности: $\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2 = 0$.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Отдельный j-й эксперимент ($j = 1, \ldots, N$) заключается в следующем: 1) при заданных значениях параметров потока λ_i, $i = 1, 2$, α_1, $\alpha_2 = \lambda_1 \lambda_2 / (p\ q\ \alpha_1)$, p, q, T^* и заданном времени моделирования Tm единиц времени (Tm – время наблюдения за потоком) осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока [33]; выходом имитационной модели в отдельном j-м эксперименте является последовательность значений $\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(n)}$; 2) численно реализуется процедура поиска глобального максимума функции правдоподобия (7) в точках, подозрительных на экстремум [34], т.е. находится значение оценки $\hat{T}_j^*$; 3) осуществляется повторение N раз шагов 1, 2. Результатом работы алгоритма является выборка ($\hat{T}_1^*,\ldots,\hat{T}_N^*$), на основании которой вычисляются

$$\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*) = (1/N)\sum\nolimits_{j=1}^{N}\hat{T}_j^*,\ \hat{V}(\hat{\boldsymbol{T}}^*) = (1/N)\sum\nolimits_{j=1}^{N}[\hat{T}_j^* - T^*]^2, \tag{12}$$

где T^* – известное из имитационной модели значение параметра. После этого время моделирования Tm увеличивается на ΔTm, и алгоритм переходит на выполнение первого шага отдельного j-го эксперимента. При проведении первого статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 48$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $T^* = 1$. Ниже приведены результаты первого статистического эксперимента ($N = 100$; $Tm = 100, 200, \ldots, 1\,000$) (табл. 1).

Таблица 1

Первый статистический эксперимент

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	1,0043	1,0012	1,0028	1,0004	0,9989	1,0013	0,9978	1,0003	0,9973	1,0003
$\hat{V}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	0,0036	0,0021	0,0008	0,0006	0,0007	0,0006	0,0006	0,0004	0,0003	0,0003

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\hat{\boldsymbol{T}}^*$) стационарный режим устанавливается при $Tm \geq 400$ ед. времени. При этом отклонение значений $\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$ от истинного значения параметра $T^* = 1$ вполне удовлетворительное.

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^* на качество оценок). Второй статистический эксперимент организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования $Tm = 500$ ед. времени, что соответствует времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров потока, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^*. Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2$, …, затем для $T^* = 5$. Ниже приведены результаты второго статистического эксперимента ($N = 100$, $Tm = 500$) (табл. 2).

Таблица 2

Результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	0,9989	2,0005	3,0002	3,9825	5,0059
$\hat{V}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	0,0007	0,0028	0,0046	0,0079	0,0116

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введенного критерия $\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$ увеличение параметра T^* отрицательно сказывается на качестве оценок $\hat{\boldsymbol{T}}^*$, что является вполне естественным: увеличение параметра T^* приводит к увеличению числа потерянных событий исходного потока. Отклонение значений $\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$ от истинных значений параметра T^* вполне удовлетворительное.

3. Приближенная МП-оценка параметра T^* в особом случае

Рассматриваемый в настоящем разделе особый случай соответствует ситуации, когда $z_1 = z_2$, т.е. в (1) реализуется деление на ноль. Этот особый случай возможен тогда, когда для параметров потока выполняется соотношение: $(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)=0$. В свою очередь, выполнение последнего соотношения возможно в трех вариантах: 1) $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, p = 1, 2) $\lambda_1+\alpha_1=$ $=\lambda_2+\alpha_2$, q = 1, 3) $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, $p = q = 1$.

Рассмотрим первый вариант. В [29] при $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, p = 1, $\delta = 0$ ($\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2=0$) приведена формула для $p(\tau\,|\,T)$:

$$p(\tau\,|\,T)=0,\ 0\le\tau<T,$$

$$p(\tau\,|\,T)=\left\{\lambda_1+\alpha_1-\frac{\alpha_1\alpha_2(1-q)}{\alpha_1+\alpha_2}\left[1-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{\lambda_1+\alpha_1}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]\left[1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)\right]\right\}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)},\ \tau\ge T. \quad (13)$$

Тогда, используя (2), находим

$$p_1(\tau)=\frac{1}{T^*}\left\{1-2e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau}+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\right\},\ 0\le\tau<T^*; \quad (14)$$

$$p_2(\tau)=\frac{1}{T^*}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau}\left\{-2+e^{(\lambda_1+\alpha_1)T^*}+e^{(\lambda_1-\alpha_2)T^*}+\frac{(\lambda_1+\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\tau-T^*\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[e^{(\lambda_1-\alpha_2)T^*}-e^{(\lambda_1+\alpha_1)T^*}\right]\right\},\ \tau\ge T^*. \quad (15)$$

В точке $\tau=T^*$ имеем: 1) $p_1(T^*)=p_2(T^*)$, 2) $p_1'(T^*)\ne p_2'(T^*)$, т.е. плотность $p(\tau)$ в точке $\tau = T^*$ непрерывна, но имеет излом. Дальнейшее изложение идентично изложению раздела 2.

По-прежнему обозначим $p(\tau^{(k)}\,|\,T^*)$ – плотность вероятности, определенная формулами (2), (14), (15), в которых $\tau=\tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$– измерения), T^* – переменная величина ($T^* > 0$). Для введенной функции $p(\tau^{(k)}\,|\,T^*)$ переменной T^* справедлива теорема раздела 2 и вытекающая из теоремы процедура нахождения приближенной МП-оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* по методу максимального правдоподобия.

Второй вариант соотношения параметров $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, q = 1 симметричен рассмотренному: нужно только в формуле (13) заменить q на p, что в конечном итоге приводит к формулам (14), (15).

Третий вариант соотношения параметров $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, $p = q = 1$, при котором $\lambda_1-\alpha_2=0$, приводит к формулам

$$p_1(\tau)=\frac{1}{T^*}\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\right],\ 0\le\tau<T^*,$$

$$p_2(\tau)=\frac{1}{T^*}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\left[-1+e^{(\alpha_1+\alpha_2)T^*}\right],\ \tau\ge T^*.$$

Для второго и третьего вариантов алгоритмы нахождения приближенной МП-оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* по методу максимального правдоподобия идентичны алгоритму раздела 2.

С целью установления качества получаемых методом максимального правдоподобия (в особом случае) оценок параметра T^* поставлены статистические эксперименты. Статистические эксперименты поставлены для первого варианта соотношения параметров $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$, p = 1.

Первый и второй статистические эксперименты описаны в разделе 2. В табл. 3, 4 приведены численные результаты для величин $\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$, $\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$, вычисленные по формулам (12). При проведении первого статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 = 4$, $p = 1$, $q = \lambda_1\lambda_2 / \alpha_1\alpha_2 = 0{,}5$, $T^* = 1$ ($N = 100$; $Tm = 100, 200, \ldots, 1\,000$).

Таблица 3

Результаты первого статистического эксперимента

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$	0,9947	1,0000	1,0017	1,0025	0,9986	0,9978	0,9985	0,9971	1,0004	1,0004
$\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$	0,0019	0,0007	0,0006	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

Анализ численных результатов (как и в общем случае) показывает, что в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\boldsymbol{T}^*$) стационарный режим устанавливается при $Tm \geq 500$ ед. времени. Отклонение выборочного среднего $\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$ от истинного значения параметра $T^* = 1$ вполне удовлетворительное.

Второй статистический эксперимент поставлен при фиксированном времени моделирования $Tm = 500$ ед. времени, что соответствует времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров потока, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^*. Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2$, …, затем для $T^* = 5$ ($N = 100$).

Таблица 4

Результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$	1,0018	1,9927	2,9974	3,9916	4,9965
$\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$	0,0003	0,0009	0,0029	0,0044	0,0085

Анализ численных результатов показывает (как и в общем случае), что в смысле введенного критерия $\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$ увеличение параметра T^* отрицательно сказывается на качестве оценок $\hat{T}^*$: увеличение параметра T^* приводит к увеличению числа потерянных событий исходного потока. Отклонение же значений $\hat{M}\left(\hat{\boldsymbol{T}}^*\right)$ от истинных значений параметра T^* вполне удовлетворительное.

Заключение

По результатам проведенного исследования (для общего и особого случаев) можно сделать следующие выводы:

1) получен явный вид (7) функции правдоподобия для оценивания параметра T^* равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени;

2) показано, что точка глобального максимума функции правдоподобия (7) принадлежит отрезку $[\tau^{(1)}, \tau^{(n)}]$;

3) предложена процедура отыскания точки, подозрительной на глобальный максимум функции правдоподобия (7); эта точка выбирается в качестве значения оценки параметра T^*;

4) результаты имитационного моделирования показывают, что качество оценок в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\hat{\boldsymbol{T}}^*$) вполне удовлетворительное; при этом смещение оценок относительно истинного значения параметра T^* невелико.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, is. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, № 4. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on single server with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
7. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова Н.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 16–28.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, № 2. P. 62–69.
9. Вишневский В.М., Ляхов А.И. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах // Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 81–96.
10. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // Distributed Computer and Communications Networks: Control, Computation, Communications : proc. of the 18th Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, 19–22 October 2015). M. : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
11. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. Катунь, 12–16 сентября 2016. Томск : Изд-во ТГУ, 2016. Ч. 1. С. 36–50.
12. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
13. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969. 512 с.
14. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
15. Леонова М.А., Нежельская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
16. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
17. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
18. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Sciences. 2015. V. 564. P. 141–151.
19. Nezhel'skaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Sciences. 2018. V. 912. P. 93–105.
20. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. Joint probability density of interarrival interval of a flow of a physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, is. 7. P. 973–983.
21. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of event for conditions under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
22. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
23. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
24. Глухова Е.В., Терпугов А.Ф. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мёртвого времени // Известия вузов. Физика. 1995. Т. 38, № 3. С. 22–31.
25. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
26. Nezhel'skaya L.A., Pershina A.A. Estimate of the parameter of unextendable random dead time in a recurrent generalized asynchronous flow of physical events // Russian Physics Journal. 2020. V. 63, is. 1. P. 99–104.

27. Нежельская Л.А., Першина А.А. Процедура оценивания параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мёртвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий в особом случае // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 65–73.
28. Нежельская Л.А., Першина А.А. Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в обобщенном асинхронном потоке событий // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Междунар. конф., 26–30 июня 2019 г. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. С. 352–357.
29. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
30. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
31. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
32. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГТУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
33. Лифшиц А.Л., Мальц. Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1978. 248 с.
34. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 6 февраля 2021 г.

Nezhel'skaya L.A, Pershina A.A. (2021) ESTIMATION OF THE UNIFORM DISTRIBUTION PARAMETER OF UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN A GENERALIZED RECURRENT ASYNCHRONOUS FLOW OF EVENTS BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 55. pp. 53–64

DOI: 10.17223/19988605/55/7

A generalized recurrent asynchronous flow of events (a generalized MMPP flow) is considered, which is a common mathematical model of a flow of elementary particles, information flows of applications operating in telecommunication and information-computer communication networks, and belongs to the class of doubly stochastic flows of events. The functioning of the flow is considered under the conditions of a random unextendable dead time distributed according to the uniform law on the interval $[0, T^*]$. A special and common case are considered. The dead time parameter T^* is estimated using the likelihood method. The results of statistical experiments are presented (in special and common cases). An analysis of the numerical results shows that, in the sense of the introduced criterion, an increase in the parameter T^* negatively affects the quality of the estimates, which is quite natural: an increase in the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events in the initial stream.

Based on the results of the study, the following conclusions can be drawn the results of simulation modeling show that the quality of the assessments in the sense of the introduced criterion (selective variation of the assessment) is quite satisfactory; in this case, the bias of the estimates relative to the true value of the parameter T^* does not exceed hundredth values.

Keywords: recurrent generalized asynchronous flow of events; unextendable random dead time; parameter estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Applied Mathematics Department of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.tsu.ru

PERSHINA Anna Alexandrovna (Post-graduate Student of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ann.shitina@gmail.com

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Ch. 1]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Ch.2]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.

5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16(4). pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7(1). pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Basharin, G.P., Samouylov, K.E., Yarkina, N.V. & Gudkova N.A. (2009) A new stage in the development of the mathematical theory of teletraffic. *Automation and Telemechanics*. 12. pp. 16–28. DOI: 10.1134/S0005117909120030
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M & Lyakhov A.I. (2001) A Wireless LAN under High Load and in Noise: Throughput Evaluation. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 81–96. DOI: 10.1023/A:1010257612786
10. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications.* Proc. of the 18th International Conference (DCCN–2015). Moscow, October 19–22. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
11. Vishnevsky, V.M. & Larionov, A.A. (2016) Otkrytaya set' massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi vkhodnymi potokami dlya otsenki proizvoditel'nosti shirokopolosnykh besprovodnykh setey [Open queueing network with correlated input flows for estimating the performance of broadband wireless networks]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM–2016)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference. September 12–16. Tomsk. pp. 36–50.
12. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
13. Barucha-Rid, A.T. (1969) *Elementy teorii markovskikh protsessov i ikh prilozheniya* [Elements of the theory of Markov processes and their applications]. Translated from English by V.V. Kalashnikov. Moscow: Nauka.
14. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
15. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Error probability when evaluating states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
16. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of ML- and MM- estimates of the duration of dead time in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
17. Gortsev, A.M., Kalyagina, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Estimation of the maximum likelihood of the duration of dead time in a generalized semisynchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(30). pp. 27–37.
18. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 141–151.
19. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Sciences*. 912. pp. 93–105.
20. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) Joint probability density of interarrival interval of a flow of a physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973–983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
21. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of event for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering.* 47(1). pp. 33–38.
22. Vasilieva, L.A (2002) Otsenivanie parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The abstract of clause estimation of parameters twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. s1-1. pp. 9–13.
23. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
24. Glukhova, E.V. & Terpugov, A.F. (1995) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy pri nalichii prodlevayushchegosya mertvogo vremeni [Estimation of the intensity of the Poisson flow of events in the presence of prolonged dead time]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 38(3). pp. 22–31.
25. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of parameters of an asynchronous doubly stochastic flow of events with an arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
26. Nezhelskaya, L.A. & Pershina, A.A. (2020) Estimation of the parameter of unextendable random dead time in a recurrent generalized asynchronous flow of physical events. *Russian Physics Journal*. 63(1). pp. 99–104.
27. Nezhelskaya, L.A & Pershina, A.A. (2021) Estimation procedure of the uniform distribution parameter of unextendable dead time duration in a generalized recurrent asynchronous flow of events in special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 54. pp 65–73. DOI: 10.17223/19988605/54/8

28. Nezhelskaya, L.A & Pershina, A.A. (2019) Otsenivanie parametra neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni sluchaynoy dlitel'nosti v obobshchennom asinkhronnom potoke sobytiy [Estimation of the unextendable dead time random duration parameter in a generalized asynchronous flow of events]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2019)]. Proc. of the 18th International Conference. Tomsk, June 26–30. Tomsk: NTL. pp. 352–357.
29. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density of the durations of the intervals of the generalized asynchronous flow of events with non-prolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25.
30. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of parameters of a synchronous doubly stochastic flow of events by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
31. Shulenin, V.P. (2011) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL Publ.
32. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
33. Lifshits, A.L. & Maltz, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical modeling of system queuing]. Moscow: Sovetskoe radio.
34. Sobol, I.M. (1973) *Chislennye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.