УДК 519.642.4 MSC: 65J10, 65N38, 80M15
DOI 10.17223/19988621/72/2

Д.Ю. Иванов

О СОВМЕСТНОМ ПРИМЕНЕНИИ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ С ГЛАДКИМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ

Исследуется решение задач теплопроводности в прямом цилиндре с нулевыми граничными условиями на основаниях и нулевым начальным условием с помощью совместного использования коллокационного метода граничных элементов и метода Фурье. Благодаря умеренному сгущению сетки, компенсирующему падение точности при больших собственных значениях дифференциального оператора ∂^2_{yy} с соответствующими нулевыми граничными условиями, получены приближенные решения, устойчиво сходящиеся к точным с кубической скоростью равномерно относительно длины образующей и равномерно относительно множеств граничных функций, ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по переменной y. Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи в круглом цилиндре.

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность*, *граничные интегральные уравнения*, *граничный элемент*, *коллокация*, *равномерная сходимость*, *устойчивость*, *некруглый цилиндр*, *метод Фурье*, *диссипация*.

В настоящей работе рассматриваются начально-краевые задачи теплопроводности (НКЗТ) в конечных (по высоте) однородных прямых цилиндрах (КОПЦ) $\Omega_{\pm} \times I_Y$ (Ω_+ – открытая двумерная ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega \in C^5$, $\Omega_- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$); $I_Y \equiv [0, Y]$ – высота цилиндра) на временно́м промежутке $I_T \equiv [0, T]$. Начальные и граничные условия на основаниях цилиндра нулевые, а на боковой поверхности граничные условия задаются функцией $w(x_1, x_2, y, t)$ ($(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $y \in I_Y$, $t \in I_T$). Исследуется приближенное решение НКЗТ в КОПЦ, основанное на совместном применении коллокационного метода граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21] и метода Фурье. Соответствующие точные решения $u(x_1, x_2, y, t)$ имеют вид потенциала с неизвестной функцией плотности, которая находится из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода, причем интегральные операторы потенциала и ГИУ выражаются через C_0-полугруппы операторов $\boldsymbol{U}_T(\tau_t)$ и $\boldsymbol{U}_Y(\tau_y)$, действующих по переменным t и y соответственно.

Вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости приближенных решений задач теплопроводности, полученных на основе КМГЭ и ГИУ второго рода, исследуются в работах [2–5]. Рассматриваются двумерные задачи, соответствующие НКЗТ в бесконечно длинных однородных цилиндрах с однородными вдоль образующих цилиндра граничными условиями [2, 4], общие трехмерные задачи [3], а также n-мерные задачи [5], причем в работе [3] исследуются задачи с кусочно-гладкими по Ляпунову граничными поверхностями, имеющими края и углы. Различные модели на основе двумерных задач теплопроводности и их решение с помощью КМГЭ рассмотрены в работах [6–11], причем в работе [10] решается задача для уравнения теплопроводности с диссипативным членом, определяющая частные решения НКЗТ в КОПЦ. В работе [12] на основе КМГЭ решается внешняя по отношению к бесконечно длинному цилиндру НКЗТ с неоднородными вдоль образующих цилиндра граничными условиями. В работе [13] рассматривается решение на основе КМГЭ задачи теплопроводности в конечном круглом цилиндре, где наряду с преобразованием Лапласа по временно́й переменной используется разложение в ряд Фурье граничных функций. Для решения задач теплопроводности в конечных круглых цилиндрах использовались и другие приближенные методы: метод конечных элементов [14, 15] и метод конечных разностей [16]. Разностные методы используются и для решения задач теплопроводности в конечных некруглых цилиндрах [17]. Однако автору не удалось найти примеры совместного использования КМГЭ и метода Фурье для решения задач теплопроводности в конечных некруглых цилиндрах.

В работах [18–20] на основе КМГЭ получены решения НКЗТ для уравнения с диссипативным членом:

$$\partial^2_{x_1x_1}u+\partial^2_{x_2x_2}u=\partial_t u+k^2u \quad (u=u(x_1,x_2,t)\,,\ (x_1,x_2)\in\Omega_\pm\,,\ t\in I_T\,,\ k>0). \qquad (1)$$

Решения НКЗТ в КОПЦ разлагаются в ряд Фурье по собственным функциям генератора C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau_y)$, и коэффициентами такого ряда являются решения НКЗТ для уравнения (1). С уменьшением гладкости граничных функций w по переменной y возрастает вес решений НКЗТ для уравнений (1), соответствующих большим значениям k, и точность решения НКЗТ в КОПЦ снижается. Для сохранения точности на равномерной сетке требуется увеличение числа шагов дискретизации функций $\exp\left(-k^2\tau_y\right)$ – компонент C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau_y)$ – по параметру τ_y и граничной функции w по переменной y пропорционально k^2 и j соответственно (j – некоторое усредненное значение величины Yk, зависящее от w). Функции $\exp\left(-k^2\tau_y\right)$ при больших k являются быстро меняющимися вблизи $\tau_y=0$. Поэтому измельчать сетку при их интерполяции можно только вблизи $\tau_y=0$ на отрезке, длина которого убывает пропорционально $1/k$, а в остальной области значений τ_y сетку оставлять прежней. Тогда количество шагов по τ_y при не очень больших значениях k возрастает лишь пропорционально k, и точность сохраняется, если число шагов по y также возрастает пропорционально j. При этом шаги дискретизации по остальным переменным остаются неизменными.

Благодаря такому подходу, полученные здесь на основе кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ) аппроксимации решений НКЗТ в КОПЦ устойчиво сходятся в норме $L_2(I_Y\times I_T)$ к точным решениям с кубической скоростью равномерно относительно множеств функций w, ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по переменной y, равномерно по длине образующей Y и равномерно в области $\Omega_\pm$. Последнее также связано с использованием здесь ККИ вдоль кривой $\partial\Omega$ по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$, описанной в работах [19, 20] применительно к задачам для уравнения (1) и осуществляемой при достаточно малых значениях r (r и d – расстояния от наблюдаемой точки области $\Omega_{\pm}$ до текущей точки интегрирования вдоль $\partial\Omega$ и до границы $\partial\Omega$ соответственно). Доказано также, что если число шагов дискретизации по переменной τ_y ограничено относительно роста *k*, то равномерная кубическая сходимость в норме $L_2(I_Y \times I_T)$ во всей области $\Omega_{\pm}$ существует на множествах функций *w*, ограниченных по норме функций с достаточно высокой гладкостью по *y*, а в любой замкнутой подобласти области $\Omega_{\pm}$ имеет место такая же равномерная сходимость на множествах функций *w*, ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по y, к тому же равномерная по длине образующей Y. Приведен пример, показывающий, что если число шагов по τ_y ограничено относительно *k*, то скорость сходимости некоторых приближенных операторов, возникающих при вычислении потенциала, уменьшается вблизи границы области $\Omega_{\pm}$ на функциях с низкой гладкостью по y.

Приведены результаты численного решения такой задачи в круглом цилиндре, подтверждающие теоретические выводы. Зависимость от y граничных функций w здесь задается собственными функциями генератора C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$, варьируемыми в достаточно большом диапазоне значений *k*.

Ранее в работах автора [21, 22] рассматривались решения НКЗТ в КОПЦ, где осуществлялось вычисление приближенных операторов в алгебре полиномов, образованных степенями оператора $\boldsymbol{U}(h_\tau) \equiv \boldsymbol{U}_T(h_\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(h_\tau)$ (h_τ – шаг дискретизации параметра τ_t, $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(h_\tau)$ – аппроксимация оператора $\boldsymbol{U}_Y(h_\tau)$). В настоящей работе приближенные операторы вычисляются в алгебре полиномов, образованных степенями оператора $\boldsymbol{U}_T(h_\tau)$.

Предварительные замечания

Далее считаем, что граница $\partial\Omega$ является кривой класса гладкости C^2, если не оговорено особо. НКЗТ в КОПЦ с неоднородными граничными условиями второго и третьего рода на боковой поверхности цилиндра, с нулевыми граничными условиями первого, второго и третьего рода на основаниях цилиндра и нулевым начальным условием могут рассматриваться как двумерные векторные краевые задачи:

$$\Delta_2 \boldsymbol{u}_{\pm} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_{\pm} \ \ (\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega_{\pm}), \ \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{u}_{\pm} - \eta\,\boldsymbol{u}_{\pm} = \boldsymbol{w} \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega). \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{u}_{\pm}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ – векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T \times I_Y)$, заданные на множествах $\Omega_{\pm}$ и $\partial\Omega$ соответственно (все пространства функций здесь комплексные); $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку $\boldsymbol{x}$ и направленная внутрь области Ω_+; $\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2); $\eta \geq 0$ (коэффициент теплообмена) – постоянная; $\boldsymbol{B}$ – оператор в пространстве L_2, заданный при помощи дифференциального выражения $(\boldsymbol{Bf})(t,y) \equiv (\partial_t - \partial_{yy}^2 + p) f(t,y)$ ($p \in \mathbf{R}$) на множестве $D(\boldsymbol{B})$ классов функций $\boldsymbol{f} \in L_2$, эквивалентных функциям $f(t,y)$, абсолютно непрерывным по $t \in I_T$ при $y \in I_Y$, абсолютно непрерывно дифференцируемым по $y \in I_Y$ при $t \in I_T$ и удовлетворяющим условиям: $f|_{t=0} = 0$ при $y \in I_Y$, $\left(\partial_y f - h_0 f\right)|_{y=0} = \left(\partial_y f + h_Y f\right)|_{y=Y} = 0$ при $t \in I_T$ $(0 \le h_0, h_Y \le \infty)$ и $\partial_t f$, $\partial_{yy}^2 f \in L_2$.

Зададим операторы $\boldsymbol{B}'_Y$ и $\boldsymbol{B}_Y$ в пространстве $L_2(I_Y)$: $(\boldsymbol{B}'_Y \boldsymbol{f})(y) \equiv -f^{(2)}(y)$, $(\boldsymbol{B}_Y \boldsymbol{f})(y) \equiv -f^{(2)}(y) + p f(y)$, определенные на множестве $D(\boldsymbol{B}_Y) = D(\boldsymbol{B}'_Y)$ абсолютно непрерывно дифференцируемых при (почти всех, далее опускаем) $y \in I_Y$ функций $f(y) \in L_2(I_Y)$, $f^{(1)}(0) - h_0 f(0) = f^{(1)}(Y) + h_Y f(Y) = 0$. Операторы $\boldsymbol{B}'_Y$ и $\boldsymbol{B}_Y$ самосопряжены и имеют чисто точечные спектры $\{\sigma'_j\}$ и $\{\sigma_j\}$, состоящие из изолированных собственных значений кратности 1: $0 \le \sigma'_0 < \sigma'_1 < \ldots$, $\sigma_j = \sigma'_j + p$. Полагаем, что постоянная $p > -\sigma'_0$, тогда $\sigma_0 > 0$, и с помощью рядов Фурье, сходящихся в норме пространства $L_2(I_Y)$, могут быть определены ограниченные отрицательные и неограниченные положительные степени оператора $\boldsymbol{B}_Y$:

$$\boldsymbol{B}_Y^{-\alpha} \boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{-\alpha} \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in L_2(I_Y)), \ \boldsymbol{B}_Y^{\alpha} \boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{\alpha} \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in L_2(I_Y):$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{\alpha} \left\| \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \right\|_{L_2(I_Y)}^2 < \infty), \ \alpha > 0. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{P}_j$ – проекторы: $\boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \equiv \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)} \boldsymbol{\psi}_j$; $\boldsymbol{\psi}_j$ ($j \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0,1,\ldots\}$) – нормированные собственные функции оператора $\boldsymbol{B}_Y$. Заметим, что $\psi_j(y) = \alpha_j \sin\left(\mu_j y + \beta_j\right)$, где $0 < \alpha_j \le \sqrt{2/Y}$, $0 \le \beta_j \le \pi/2$; $\mu_j \equiv \sqrt{\sigma'_j} \sim \pi j / Y$ при $j \to \infty$ [23, с. 227]. Оператор $\boldsymbol{B}_Y$ является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ ($\left\|\boldsymbol{U}_Y(\tau)\right\| \le \exp\left(-\sigma_0 \tau\right)$; $\boldsymbol{B}_Y \mathbf{f} \equiv \lim\limits_{\tau \to +0} \tau^{-1} (\mathbf{f} - \boldsymbol{U}_Y(\tau) \mathbf{f})$, $\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B}_Y)$, допускающей представление с помощью рядов Фурье:

$$\boldsymbol{U}_Y(\tau) \boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\sigma_j \tau\right) \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \ \ (\boldsymbol{f} \in L_2(I_Y)). \tag{4}$$

Оператор $\boldsymbol{B}_T$ в пространстве $L_2(I_T)$: $(\boldsymbol{B}_T \boldsymbol{f})(t) \equiv f^{(1)}(t)$, определенный на множестве $D(\boldsymbol{B}_T)$ абсолютно непрерывных при $t \in I_T$ функций $f(t) \in L_2(I_T)$, $f(0) = 0$, является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_T(\tau)$: $(\boldsymbol{U}_T(\tau) \boldsymbol{f})(t) = f(t - \tau)$ при $\tau \le t$, $(\boldsymbol{U}_T(\tau) \boldsymbol{f})(t) = 0$ при $\tau > t$ ($\left\|\boldsymbol{U}_T(\tau)\right\| = 1$ при $\tau \in [0, T)$; $\boldsymbol{U}_T(\tau) = \boldsymbol{O}$ при $\tau \ge T$, где $\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор). Оператор $\boldsymbol{B}_T$ ограниченно обратим: $\left(\boldsymbol{B}_T^{-1} \boldsymbol{f}\right)(t) = \int_0^t f(t') \, dt'$ ($t \in I_T$, $\boldsymbol{f} \in L_2(I_T)$).

Любые замкнутые операторы $\boldsymbol{A}_T$ и $\boldsymbol{A}_Y$, всюду плотно определенные в пространствах $L_2(I_T)$ и $L_2(I_Y)$ соответственно, могут быть определены в пространстве L_2 с помощью поточечных равенств

$$(\boldsymbol{A}_T \boldsymbol{f}_1)(y) = \boldsymbol{A}_T \boldsymbol{f}_1(y) \ \ (y \in I_Y), \ (\boldsymbol{A}_Y \boldsymbol{f}_2)(t) = \boldsymbol{A}_Y \boldsymbol{f}_2(t) \ \ (t \in I_T)$$

на всех функциях $\boldsymbol{f}_1 \in L_2$ и $\boldsymbol{f}_2 \in L_2$, таких, что $\boldsymbol{f}_1(y) \in D(\boldsymbol{A}_T)$, $\boldsymbol{f}_2(t) \in D(\boldsymbol{A}_Y)$ при фиксированных $y \in I_Y$, $t \in I_T$, и $\boldsymbol{A}_T \boldsymbol{f}_1 \in L_2$, $\boldsymbol{A}_Y \boldsymbol{f}_2 \in L_2$, причем если операторы $\boldsymbol{A}_T$ и $\boldsymbol{A}_Y$ ограничены в $L_2(I_T)$ и $L_2(I_Y)$, то в пространстве L_2 они также всюду определены и имеют ту же норму (теорема 2 [24]). В этом смысле оператор $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_T + \boldsymbol{B}_Y$ определен на множестве $D(\boldsymbol{B}_T) \cap D(\boldsymbol{B}_Y)$ и является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}(\tau) \equiv \boldsymbol{U}_T(\tau)\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ ($\|\boldsymbol{U}(\tau)\| \le \exp(-\sigma_0 \tau)$) (следствие 3 [24]), а операторы $\boldsymbol{B}_T$ и $\boldsymbol{B}_Y$ в пространстве L_2 являются генераторами соответствующих C_0-полугрупп $\boldsymbol{U}_T(\tau)$ и $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ (следствие 2 [24]). Операторы $\boldsymbol{B}_Y^{\alpha}$ и $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ могут быть представлены рядами Фурье вида (3) и (4), сходящимися в норме L_2, где $\boldsymbol{f} \in L_2$, $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j)_{L_2(I_Y)} \in L_2(I_T)$ ($(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j)_{L_2(I_Y)}(t) \equiv \int_{I_Y} f(t,y)dy$) и выполняется «равенство Парсеваля»: $\|\boldsymbol{f}\|_{L_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left\| (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j)_{L_2(I_Y)} \right\|_{L_2(I_T)}^2$ [25, с. 137].

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и *k* раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в L_2. Задачи (2) однозначно разрешимы в классе функций $C(\overline{\Omega_\pm}) \cap C^2(\Omega_\pm)$ при любых $\boldsymbol{w} \in C(\partial\Omega)$ [26, 27]. Решения имеют вид векторных потенциалов:

$$\boldsymbol{u}_\pm(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_\pm \ \ (x \in \Omega_\pm), \tag{5a}$$

где функции плотности $\boldsymbol{v}_\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ ($\boldsymbol{I}$ – тождественный оператор):

$$(\boldsymbol{G}_\pm \boldsymbol{v}_\pm)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \ \boldsymbol{G}_\pm \equiv \mp 2^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_2 - \eta \boldsymbol{G}_0, \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{G}_i \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds' \ \ (\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega), \ i = 0, 2),$$

$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ($\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{x}'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau \ \ (\boldsymbol{f} \in L_2, \ i = 0, 2),$$

$$g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau) \equiv a_0(r,\tau), \ g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau) \equiv a_2(r,\tau)b_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),$$

$$a_0(r,\tau) \equiv a(r,\tau), \ a_2(r,\tau) \equiv -r\,\partial_r a(r,\tau), \ b_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} \ln r^{-1}.$$

Здесь $a(r,\tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1}\exp\left[-r^2/(4\tau)\right]$, $r \equiv |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}$ осуществляется по точке $\boldsymbol{x}$.

Зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, причем $s > 0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s < 0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i = 1,2$, $l = \overline{0,k}$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Обозначим через s, s' значения параметра s, соответствующие точкам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$.

Условимся ограниченный оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как $\boldsymbol{A}$ [$B \to C$], а если $C = B$, то $\boldsymbol{A}$ [B]. Зададим операторы $\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y \equiv Y^2 \boldsymbol{B}'_Y$ ($D(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y) = D(\boldsymbol{B}'_Y)$) и $\breve{\boldsymbol{B}}_Y$: $\breve{\boldsymbol{B}}_Y \boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f}$ ($\sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j^2 \left| (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j)_{L_2(I_Y)} \right|^2 < \infty$, $\breve{\sigma}_j \equiv \pi^2 (j+1)^2$) в соответствующих пространствах $L_2(I_Y)$ ($Y > 0$). Так как $\tilde{\mu}_j \equiv Y\mu_j \sim \pi j$ при $j \to \infty$, то $D(\breve{\boldsymbol{B}}_Y) = D(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y)$. Через $H_Y^{n/2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) обозначим гильбертовы пространства функций $\boldsymbol{f} \in L_2(I_Y)$: $\boldsymbol{f} \in D\left(\breve{\boldsymbol{B}}_Y^{n/2}\right)$, с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{H_Y^{n/2}} \equiv \left[\sum_{m=0}^{n} \left\| \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{m/2} \boldsymbol{f} \right\|_{L_2(I_Y)}^2 \right]^{1/2}$. Пространства $H_Y^{n/2}$ при фиксированном $n \in \mathbf{Z}_+$ и всех $Y > 0$ изоморфны между собой и эквивалентные элементы в них имеют вид $\boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \breve{\sigma}_j^{-n/2} \boldsymbol{\psi}_j$ при одинаковых для всех $Y > 0$ числах $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ ($\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$). В силу неравенств $\tilde{\mu}_j \le \pi(j+1)$ операторы $\left(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y\right)^{n/2}$ [$H_Y^{n/2} \to L_2(I_Y)$] ограничены: $\left\| \left(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y\right)^{n/2} \right\| \le 1$, равномерно по $Y > 0$. В отличие от операторов $\left(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y\right)^{n/2}$ операторы $\left(\boldsymbol{B}'_Y\right)^{n/2}$ [$H_Y^{n/2} \to L_2(I_Y)$] неограниченно возрастают, например, на функциях $(j+1)^{-n} \boldsymbol{\psi}_j$ при $Y \to 0$; равномерно же ограничены они по $Y > 0$ на множествах $\{ \boldsymbol{f} \in H_Y^{n/2}$: $\|\boldsymbol{f}\|_{H_Y^{n/2}} \le Y^n R$, $R > 0 \}$. Зададим также операторы $\tilde{\boldsymbol{B}}_Y \equiv \tilde{\boldsymbol{B}}'_Y + pY^2 \boldsymbol{I}$ ($D(\tilde{\boldsymbol{B}}_Y) = D(\tilde{\boldsymbol{B}}'_Y)$). Операторы $\left(\tilde{\boldsymbol{B}}_Y\right)^{n/2}$ [$H_Y^{n/2} \to L_2(I_Y)$] равномерно ограничены по $Y \in (0, Y_0]$ при любом $Y_0 > 0$: $\left\| \left(\tilde{\boldsymbol{B}}_Y\right)^{n/2} \right\| \le \left(1 + pY_0^2\right)^{n/2}$.

Пусть $k, i, j, m, n \in \mathbf{Z}_+$. Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ функций $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $\boldsymbol{f}^{(l)}$: $\boldsymbol{f}^{(l)}(s) \equiv d^l \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s)) / ds^l$ ($s \in \overline{I_S}$, $l = \overline{0,k}$), с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)} \equiv$ $\equiv \max\limits_{l=\overline{0,k}} \sup\limits_{s \in I_S} \left\| \boldsymbol{f}^{(l)}(s) \right\|_{L_2}$. Обозначим через $H^{m,n/2}$ гильбертовы пространства функций $\boldsymbol{f} \in L_2$: $\boldsymbol{f} \in D\left(\boldsymbol{B}_T^m \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{n/2}\right)$, с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{m,n/2}} \equiv \left[\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left\|\boldsymbol{B}_T^i \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{j/2} \boldsymbol{f}\right\|_{L_2}^2\right]^{1/2}$. Введем в рассмотрение банаховы пространства $H^{i,j/2;m,n/2} \equiv H^{i,j/2} \cap \cap H^{m+i,0} \cap H^{0,(n+j)/2}$ с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{i,j/2;m,n/2}} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{H^{i,j/2}} + \|\boldsymbol{f}\|_{H^{m+i,0}} + \|\boldsymbol{f}\|_{H^{0,(n+j)/2}}$. Определим банаховы пространства $C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)$ функций $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$: $\boldsymbol{f}(s) \in H^{i,j/2;m,n/2}$ ($s \in I_S$) и $\boldsymbol{B}_T^i \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{j/2} f \in C(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{B}_T^{i+m} f \in C(\partial\Omega)$, $\breve{\boldsymbol{B}}_Y^{(j+n)/2} \boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$, с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)} \equiv \sup_{s \in I_S} \|\boldsymbol{f}(s)\|_{H^{i,j/2;m,n/2}}$. Зададим банаховы пространства $C^k_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega) \cap C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)$ с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)}$.

Операторы $\boldsymbol{B}_t$ и $\boldsymbol{B}_y$ ограниченно обратимы, поэтому в силу следствия 3 [28] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_\pm$ $[C^k_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, i, j, m, n \in \mathbf{Z}_+$).

Операторы $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x})$ допускают представление с помощью рядов Фурье, сходящихся в норме L_2:

$$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}, \sigma_j) \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{f} \in L_2,\ i = 0, 2).$$

Операторы $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}, \sigma_j)$ $[\boldsymbol{P}_j C(\partial\Omega) \to \boldsymbol{P}_j L_2]$ могут быть получены из операторов $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})$ $[C(\partial\Omega) \to L_2]$, если вместо C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ подставить соответствующую C_0-полугруппу $\exp\left(-\sigma_j \tau\right)\boldsymbol{P}_j$. Они определяют решения соответствующих НКЗТ для уравнения (1) на основе формул, аналогичных формулам (5). Аппроксимация операторов $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}, \sigma_j)$ и решение с их помощью НКЗТ для уравнения (1) исследовались в работах [18, 19].

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ ($m = \overline{0,2}$, $z \in [a,b]$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j \neq m)}^{2} \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \overline{z} + q_j h_z \quad (j = \overline{0,2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\overline{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$. Пусть $\boldsymbol{f}(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a,b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B. Тогда для функции $\tilde{\boldsymbol{f}}(z) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(z_m)\Lambda_m(z)$ при $z \in [a,b]$ имеют место оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{f}(z)\right\|_B \le c_\omega \sup_{z \in [a,b]} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}(z)\right\|_B h_z^3 \quad (c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9),$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}(z)\right\|_B \le c_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} \left\|\boldsymbol{f}(z_m)\right\|_B \quad (c_\Lambda \equiv 3). \qquad (6)$$

Интерполяция функций в пространстве L_2

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$. Зададим функции $\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)$ ($\tau \ge 0$), значения которых – операторы в пространствах L_2:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)\boldsymbol{f} \equiv \sum_{m=0}^{2} \Lambda_m(\tau)\boldsymbol{U}_T\left(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau\right)\boldsymbol{f}$$

$$(\tau \in \left[\tau_{2n}, \tau_{2n+2}\right],\ n = \overline{0, N/2-1},\ \boldsymbol{f} \in L_2).$$

Здесь $\tau_n \equiv n h_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$. В силу оценок $\left\|\boldsymbol{U}_T(\tau)\right\| \le 1$ и (6) имеем оценки $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)\right\| \le c_\Lambda$ и

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{U}_T(\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le c_\omega \left\|\boldsymbol{B}_T^3 \boldsymbol{f}\right\|_{L_2} h_\tau^3 \ (\boldsymbol{f} \in H^{3,0}). \tag{7}$$

Пусть $\tilde{N}_j/2 \in \mathbf{N}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$). Зададим функции $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(\tau)$ ($\tau \ge 0$), значения которых – операторы в L_2 ($Y > 0$):

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(\tau)\boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(\tau)\boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \ (\boldsymbol{f} \in L_2), \tag{8}$$

$$e_j(\tau) \equiv \sum_{m=0}^{2} \exp\left[-\sigma_j\left(\tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j+1} + q_m \tilde{h}_{\tau,j}\right)\right]\Lambda_m(\tau)$$

$$(\tau \in \left[\tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j}, \tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j+2}\right],\ \tilde{n}_j = \overline{0, \tilde{N}_j/2-1},\ n = \overline{0, N-1}).$$

Здесь $\tilde{\tau}_{j,n} \equiv n\tilde{h}_{\tau,j}$, $\tilde{h}_{\tau,j} \equiv h_\tau / \tilde{N}_j$. Так как $\left|e_j(\tau)\right| \le c_\Lambda$, то ряды Фурье (8) сходятся в норме L_2 и $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(\tau)\right\| \le c_\Lambda$.

В силу первой оценки (6) имеем оценки:

$$\Delta e_j(Y) \equiv \left|e(\tau) - \exp\left(-\sigma_j \tau\right)\right| \le c_\omega \tilde{N}_j^{-3} \sigma_j^3 \exp\left(-\sigma_j \tau\right) h_\tau^3 \ (j \in \mathbf{Z}_+,\ Y > 0). \tag{9}$$

Так как $\sigma_j \sim \left(\pi j/Y\right)^2$, то погрешности $\Delta e_j(Y)$ не ограничены сверху при $j \to \infty$ или $Y \to 0$.

Допустим, что $\tilde{N}_j = \tilde{N}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N} \equiv \{1, 2, \ldots\}$). Соответствующие операторы $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y(\tau)$ обозначим $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[1]}(\tau)$. С помощью неравенств (9), формулы (3) для $\boldsymbol{B}_Y^3$ и формулы (4) получаем следующие оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[1]}(\tau)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{U}_Y(\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le c_\omega \tilde{N}^{-3} Y^{-6} \left\|\tilde{\boldsymbol{B}}_Y^3 \boldsymbol{f}\right\|_{L_2} h_\tau^3 \le c_\omega \tilde{N}^{-3} Y^{-6} \left(1 + pY_0^2\right)^3 \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{H^{0,3}} h_\tau^3$$

$$(\boldsymbol{f} \in H^{0,3},\ \tau \in I_T,\ Y \in \left(0, Y_0\right]), \tag{10}$$

согласно которым операторы $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[1]}(\tau)$ сходятся в пространстве L_2 с кубической скоростью при $N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ равномерно по $j \in \mathbf{Z}_+$, $\tau \in I_T$, $Y \in \left(0, Y_0\right]$ ($Y_0 > 0$) на функциях $Y^6 (j+1)^{-6} \boldsymbol{\psi}_j$.

Пусть $\tilde N_j = 2\left[\sigma_j/\pi^2\right]+2$, где $[A]$ – целая часть числа $A\in\mathbf{R}$. Соответствующие операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y(\tau)$ обозначим $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)$. Тогда из неравенств (9) вытекают оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)\boldsymbol f-\boldsymbol U_Y(\tau)\boldsymbol f\right\|_{L_2}\le 2^{-3}c_\omega\pi^6\|\boldsymbol f\|_{L_2}h_\tau^3\ \ (\boldsymbol f\in L_2,\ \tau\in I_T,\ Y>0),$$

в силу которых операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)$ сходятся в пространстве L_2 при $N\to\infty$ с кубической скоростью к соответствующим операторам $\boldsymbol U_Y(\tau)$ равномерно по $j\in\mathbf Z_+$, $\tau\in I_T$, $Y>0$ на функциях $\boldsymbol\psi_j$, а не $Y^6(j+1)^{-6}\boldsymbol\psi_j$, как $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[1]}(\tau)$. Но при $p\approx 0$ число точек коллокации у функций $e_j(\tau)$, образующих операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)$, больше, чем у функций $e_j(\tau)$, образующих $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[1]}(\tau)$ при $\tilde N=2$, приблизительно в $(j/Y)^2$ раз. Поэтому введем в рассмотрение операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)$: $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)=\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)$ при $\tau\le T_j$, $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)=\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[1]}(\tau)$ ($\tilde N=2$) при $\tau>T_j$, где $T_j\equiv\pi T\sigma_j^{-1/2}$. Для $\boldsymbol f\in L_2$, $Y>0$ имеем оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)\boldsymbol f-\boldsymbol U_Y(\tau)\boldsymbol f\right\|_{L_2}\le 2^{-3}\pi^6c_\omega\|\boldsymbol f\|_{L_2}h_\tau^3\ \ (0\le\tau\le T_j),$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)\boldsymbol f-\boldsymbol U_Y(\tau)\boldsymbol f\right\|_{L_2}\le 2^{-3}c_\omega c^{[2]}\|\boldsymbol f\|_{L_2}h_\tau^3\ \ (T_j<\tau\le T),\tag{11}$$

где $c^{[2]}\equiv\sup\limits_{\lambda\ge0}\lambda^6\exp(-\pi T\lambda)$. В силу оценок (11) операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)$ так же, как и $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[0]}(\tau)$, сходятся в пространстве L_2 к операторам $\boldsymbol U_Y(\tau)$ на функциях $\boldsymbol\psi_j$, но при $p\approx0$ и $j/Y\le N$ число точек коллокации у функций $e_j(\tau)$, образующих операторы $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)$, больше, чем у функций $e_j(\tau)$, образующих $\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[1]}(\tau)$ при $\tilde N=2$, приблизительно лишь в j/Y раз.

На основании оценок (7), (10), (11) получаем утверждение:

Теорема 2. Пусть $N/2\in\mathbf N$. Операторы $\tilde{\boldsymbol U}^{[1]}(\tau)\equiv\tilde{\boldsymbol U}_T(\tau)\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[1]}(\tau)$ $[H^{0,0;3,3}\to L_2]$ ($\tilde{\boldsymbol U}^{[2]}(\tau)\equiv\tilde{\boldsymbol U}_T(\tau)\tilde{\boldsymbol U}_Y^{[2]}(\tau)$ $[H^{3,0}\to L_2]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N\to\infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol U(\tau)$ $[H^{0,0;3,3}\to L_2]$ ($\boldsymbol U(\tau)$ $[H^{3,0}\to L_2]$) равномерно по $\tau\in I_T$ ($\tau\in I_T$, $Y>0$).

Введем в рассмотрение банаховы пространства C_Y^n ($n\in\mathbf Z_+$) функций $\boldsymbol f\in L_2$, имеющих непрерывные на множестве I_Y производные $\boldsymbol f^{(j)}(y)$ ($j=\overline{0,n}$), с нормами $\|\boldsymbol f\|_{C_Y^n}\equiv\max\limits_{j=\overline{0,n}}\sup\limits_{y\in I_Y}\left\|\boldsymbol f^{(j)}(y)\right\|_{L_2(I_T)}$, а также банаховы пространства C_T^m ($m\in\mathbf Z_+$) функций $\boldsymbol f\in L_2$, имеющих непрерывные на множестве $I_T\times I_Y$ частные производные $\partial_t^i f(t,y)$ ($i=\overline{0,m}$), с нормами $\|\boldsymbol f\|_{C_T^m}\equiv\max\limits_{i=\overline{0,m}}\sup\limits_{(t,y)\in I_T\times I_Y}\left|\partial_t^i f(t,y)\right|$.

Учитывая, что $\left|\mu_j^{-m}\psi_j^{(m)}(y)\right| \le (2/Y)^{1/2}$ ($j \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}_+$), имеем при $\boldsymbol{f} \in H^{0,(n+1)/2}$, $y \in I_Y$, $Y > 0$, $m \le n$ оценки:

$$\left\|\boldsymbol{f}^{(m)}(y)\right\|_{L_2(I_T)} = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j^{-(n+1)/2} \left(\breve{\boldsymbol{B}}_Y^{(n+1)/2} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)} \psi_j^{(m)}(y)\right\|_{L_2(I_T)} \le$$

$$\le 2^{1/2} Y^{-m-1/2} \tilde{c}_{n-m} \|\boldsymbol{f}\|_{H^{0,(n+1)/2}} . \tag{12}$$

Здесь $\tilde{c}_k \equiv \left(\sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j^{-k-1}\right)^{1/2}$. Пусть $\boldsymbol{f} \in H^{1,1/2}$, $\boldsymbol{g} = \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{1/2} \boldsymbol{f}$. Тогда $g(t,y) = \int_0^t \partial_{t'} g(t',y)\,dt'$, и в силу теоремы Фубини

$$\left|\left(\boldsymbol{g}(t), \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}\right| = \left|\int_0^t \left(\boldsymbol{B}_T \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}(t')\,dt'\right| \le \sqrt{T} \left\|\left(\boldsymbol{B}_T \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}\right\|_{L_2(I_T)} .$$

При $(t,y) \in I_T \times I_Y$, $Y > 0$ имеем оценки:

$$|f| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j^{-1/2} \psi_j(y) \int_0^t \left(\boldsymbol{B}_T \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{1/2} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}(t')\,dt'\right| \le$$

$$\le (2T/Y)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \breve{\sigma}_j^{-1/2} \left\|\left(\boldsymbol{B}_T \breve{\boldsymbol{B}}_Y^{1/2} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}\right\|_{L_2(I_T)} \le (2T/Y)^{1/2} \tilde{c}_0 \|\boldsymbol{f}\|_{H^{1,1/2}} .$$

Аналогично получаем оценки:

$$\left|\partial_t^m f(t,y)\right| \le (2T/Y)^{1/2} \tilde{c}_0 \|\boldsymbol{f}\|_{H^{m+1,1/2}}$$

$$\left((t,y) \in I_T \times I_Y,\ Y > 0,\ \boldsymbol{f} \in H^{m+1,1/2},\ m \in \mathbf{Z}_+\right). \tag{13}$$

В силу оценок (13) и (12) имеем включения: $H^{n+1,1/2} \subset C_T^n$, $H^{0,(n+1)/2} \subset C_Y^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$).

Зададим операторы $\boldsymbol{P}_T$ [$H^{1,1/2} \to C_Y^0$] ($n \in \mathbf{Z}_+$):

$$\left(\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{f}\right)(t,y) \equiv \sum_{l=0}^{2} f(\tau_{2k+l}, y) \Lambda_l(t)$$

$$\left(\boldsymbol{f} \in H^{1,1/2},\ t \in [\tau_{2k}, \tau_{2k+2}],\ y \in I_Y,\ k = \overline{0, N/2-1}\right).$$

Используя неравенства $\|\boldsymbol{f}\|_{C_Y^0} \le T^{1/2} \|\boldsymbol{f}\|_{C_T^0}$ ($\boldsymbol{f} \in C_T^0$) и (6), (13), получаем оценки

$$\|\boldsymbol{P}_T\| \le (2/Y)^{1/2} T \tilde{c}_0 c_\Lambda$$

и
$$\|\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\|_{C_Y^0} \le T^{1/2} c_\omega \left\|\boldsymbol{B}_T^3 \boldsymbol{f}\right\|_{C_T^0} h_\tau^3 \le (2/Y)^{1/2} T \tilde{c}_0 c_\omega \|\boldsymbol{f}\|_{H^{4,1/2}} h_\tau^3$$

$$\left(\boldsymbol{f} \in H^{4,1/2}, Y > 0\right). \tag{14}$$

Пусть $M/2 \in \mathbf{N}$, $y_m \equiv mY/M$, $m = \overline{0, M}$. Зададим операторы $\boldsymbol{P}_Y$ [$C_Y^0 \to L_2$]:

$$\left(\boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{f}\right)(y) \equiv \sum_{l=0}^{2} \boldsymbol{f}(y_{2m+l}) \Lambda_l(y)$$

$$\left(\boldsymbol{f} \in C_Y^0,\ y \in [y_{2m}, y_{2m+2}],\ m = \overline{0, M/2-1}\right).$$

Учитывая неравенства $\|\boldsymbol{f}\|_{L_2} \le Y^{1/2}\,\|\boldsymbol{f}\|_{C_Y^0}$ ($\boldsymbol{f} \in C_Y^0$) и (6), (12), получаем оценки

$$\|\boldsymbol{P}_Y\| \le c_\Lambda Y^{1/2}$$

и

$$\|\boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\|_{L_2} \le c_\omega Y^{7/2} \left\| d^3 \boldsymbol{f} / dy^3 \right\|_{C_Y^0} h_y^3 \le 2^{1/2}\tilde{c}_0\, c_\omega \|\boldsymbol{f}\|_{H^{0,2}}\, h_y^3$$

$$(\, \boldsymbol{f} \in H^{0,2}\,,\ Y > 0\,). \tag{15}$$

Здесь $h_y \equiv 1/M$. Пусть $\tilde{M}(\boldsymbol{f}) \equiv M\left(\left[\pi^{-1} Y \left(\left\| d^3 \boldsymbol{f}/dy^3 \right\|_{C_Y^0} \Big/ \|\boldsymbol{f}\|_{C_Y^0}\right)^{1/3}\right] + 1\right)$ ($[A]$ – целая часть $A \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{f} \in H^{0,2}$). Операторы $\boldsymbol{P}_Y$ при $M = \tilde{M}(\boldsymbol{f})$ и $\boldsymbol{f} \in H^{0,2}$ обозначим $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{f})$. В силу неравенств (15) имеем оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le \pi^3 c_\omega Y^{1/2}\,\|\boldsymbol{f}\|_{C_Y^0}\, h_y^3 \le 2^{1/2}\pi^3 \tilde{c}_0\, c_\omega \|\boldsymbol{f}\|_{H^{0,1/2}}\, h_y^3$$

$$(\, \boldsymbol{f} \in H^{0,2}\,,\ Y > 0\,). \tag{16}$$

Согласно первым неравенствам (15) и (16), интерполянты вида $(j+1)^{-3}\boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{\psi}_j$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{\psi}_j)$ сходятся в норме L_2 с кубической скоростью при $M \to \infty$ к соответствующим функциям $(j+1)^{-3}\boldsymbol{\psi}_j$ и $\boldsymbol{\psi}_j$ равномерно по $j \in \mathbf{Z}_+$ и $Y > 0$, при этом число точек коллокации у $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{\psi}_j)$ лишь в $\approx j$ раз больше, чем у $\boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{\psi}_j$.

Доопределим операторы $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{f})$ на функциях $\boldsymbol{f} \in H^{0,1/2} \setminus H^{0,2}$: $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{f}) \equiv \lim\limits_{M\to\infty} \boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$. Тогда оценки (16) выполняются при всех $\boldsymbol{f} \in H^{0,1/2}$. С учетом оценок (14), (16) и $\|\boldsymbol{P}_Y\| \le c_\Lambda Y^{1/2}$ имеем оценки:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\right\|_{L_2} \le 2^{1/2} c_\omega \tilde{c}_0 \left(c_\Lambda T \,\|\boldsymbol{f}\|_{H^{4,1/2}}\, h_\tau^3 + \pi^3 \|\boldsymbol{f}\|_{H^{0,1/2}}\, h_y^3 \right)$$

$$(\, \boldsymbol{f} \in H^{4,1/2}\,,\ Y > 0\,). \tag{17}$$

На основании оценок (17) делаем следующий вывод:

Теорема 3. Пусть $M/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Интерполянты $\tilde{\boldsymbol{P}}_Y(\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{f})$ сходятся в норме L_2 с кубической скоростью при $M, N \to \infty$ к соответствующим функциям $\boldsymbol{f} \in H^{4,1/2;}$ равномерно относительно $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{4,1/2}} \le R$ ($R > 0$) и равномерно по $Y > 0$.

Приближенное решение граничных интегральных уравнений

Так как здесь выполняются оценки $\left|\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)\right| \le c_\Lambda$ и (10), (11) вместо аналогичных оценок для аппроксимации C_0 -полугруппы $\exp(-p\tau)\boldsymbol{I}$ в работах [18, 19] и проводится аналогичное построение аппроксимаций операторов $\boldsymbol{G}_\pm^{-1}$, $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$, то мы опускаем некоторые подробности при обосновании их аппроксимирующих свойств.

Оператор $\boldsymbol{G}_{\pm}$ $[C(\partial\Omega)]$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{G}_{\pm}\boldsymbol{f} = \mp 2^{-1}\boldsymbol{I} + \int_{I_T} \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$). Значения функции $\boldsymbol{A}(\tau)$ ($\tau > 0$) – ограниченные операторы в пространстве $C(\partial\Omega)$: $(\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{f})(s) \equiv$ $\equiv \int_{I_S} [g_2(s,s',\tau) - \eta\, g_0(s,s',\tau)]\,\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))\,ds'$ ($s \in I_S$, $\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$, $g_i(s,s',\tau) \equiv$ $\equiv g_i(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s'), \tau)$). Справедливы оценки $\|\boldsymbol{A}(\tau)\| \le c\tau^{-1/2}$ ($\tau > 0$), где c – константа, зависящая только от параметров кривой $\partial\Omega$ (см. оценки (8) [18]). Зададим операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]}$: $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]}\boldsymbol{f} \equiv \mp 2^{-1}\boldsymbol{I} + \int_{I_T} \boldsymbol{A}(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}^{[j]}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega)$, $j = 1,2$). В силу оценок $\|\boldsymbol{A}(\tau)\| \le c\tau^{-1/2}$, (6), $\|\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)\| \le c_{\Lambda}$ и теоремы 2 операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]}$ $[C(\partial\Omega)]$ ограничены равномерно по N и справедлива теорема:

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[1]}$ $[C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)]$ и $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[2]}$ $[C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_{\pm}$ $[C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)]$ и $\boldsymbol{G}_{\pm}$ $[C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)]$ ($\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[2]}$ – равномерно по $Y > 0$).

Заметим, что операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]}$ ($j = 1,2$) имеют вид полиномов, образованных степенями оператора $\boldsymbol{U}_T(h_\tau)$:

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]} = \tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm,0}^{[j]} + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_n \boldsymbol{U}_T(\tau_n), \tag{18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\pm,0}^{[j]} \equiv \mp 2^{-1}\boldsymbol{I} + \int_{\tau_0}^{\tau_2} \boldsymbol{A}(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau,$$

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_{2n+1}^{[j]} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \boldsymbol{A}(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)\Lambda_1(\tau)\,d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_{2n}^{[j]} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \boldsymbol{A}(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)\Lambda_2(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \boldsymbol{A}(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)\Lambda_0(\tau)\,d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1}).$$

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций $\boldsymbol{f}$ со значениями $\boldsymbol{f}_l \in L_2$, заданными в узлах $\boldsymbol{x}_l \equiv \tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv l h_s$, $l = \overline{-L-1, L}$, $h_s \equiv S/(L+1)$), с нормой: $\|\boldsymbol{f}\|_{H_L} = \max_{-L-1 \le l \le L} \|\boldsymbol{f}_l\|_{L_2}$. Зададим проекционные операторы $\boldsymbol{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to H_L]$: $(\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f})_l = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$, и операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}_{2l+m}\,\Lambda_m(s) \quad (\boldsymbol{f} \in H_L,\ s \in [s_{2l}, s_{2l+2}],\ l = \overline{-L/2, L/2-1}).$$

Очевидно, что $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$. В силу оценок (6) имеем оценки $\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\| \le c_\Lambda$ и

$$\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (\boldsymbol{f} \in C^3(\partial\Omega)). \tag{19}$$

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $\boldsymbol{A}_n$ $[C \to D]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся по операторной норме при $n \to \infty$ к соответствующим ограниченным операторам $\boldsymbol{B}_n$ $[C \to D]$, если $\|\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{f}\|_D \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно в шаре $\|\boldsymbol{f}\|_C \le 1$.

С помощью равенств $\breve{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]} \boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{A}(\tau) \tilde{\boldsymbol{U}}^{[j]}(\tau) \breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{f}\, d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in H_L$, $j = 1,2$) зададим операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]}$ $[H_L]$. В силу оценок (19), $\|\boldsymbol{A}(\tau)\| \le c\tau^{-1/2}$, $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}^{[j]}(\tau)\right\| \le c_\Lambda^2$, $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$ имеет место утверждение:

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]} \boldsymbol{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $j = 1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]}$ $[C^3(\partial\Omega) \to H_L]$ равномерно по N и $Y > 0$ с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Обозначим через $\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]}$ ($i = 0,2$, $j = 1,2$) операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]}$, у которых для вычисления интегралов $\int_{s_l}^{s_{l+1}} g_i(s_k, s, \tau) \breve{\Lambda}_m(s)\, ds$ ($k = \overline{-L, L-1}$, $l = \overline{-L/2, L/2-1}$, $m = \overline{0,2}$) используются ККИ по расстоянию $\tilde{r} \equiv |\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\, \tilde{\boldsymbol{x}}(s')|$ и ПКФГ с γ узлами в соответствии с работой [18]. Тогда имеем аналог теоремы 5 [18]:

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]} \boldsymbol{P}_L$ $[C^2(\partial\Omega) \to H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $j = 1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \to \infty$ к соответствующим операторам $\breve{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]} \boldsymbol{P}_L$ $[C^2(\partial\Omega) \to H_L]$ равномерно по N и $Y > 0$.

С помощью формул (18) по аналогии с теоремой 6 [18] доказывается следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое, что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min}+1, \ldots\}$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $Y > 0$, $j = 1,2$ операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[j]}\right)^{-1}$ $[H_L]$ ограничены в совокупности.

На основании теорем 1, 4–7 делаем следующий вывод:

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[1]}\right)^{-1} \boldsymbol{P}_L$ $[C_{0,0;3,3}^3(\partial\Omega) \to H_L]$, $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[2]}\right)^{-1} \boldsymbol{P}_L$ $[C_{0,0;3,0}^3(\partial\Omega) \to H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{G}_\pm^{-1}$ $[C_{0,0;3,3}^3(\partial\Omega) \to H_L]$, $\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{G}_\pm^{-1}$ $[C_{0,0;3,0}^3(\partial\Omega) \to H_L]$ ($\left(\hat{\boldsymbol{G}}_\pm^{[2]}\right)^{-1} \boldsymbol{P}_L$ – равномерно по $Y > 0$).

Приближенное решение краевых задач

Операторы $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega_{\pm}$) представим в следующем виде: $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}=\int_{I_T}\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$, где $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{f}\equiv\int_{\partial\Omega}a(r,\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,ds'$. Для операторов $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega_{\pm}$, $\tau>0$) выполняются оценки: $\|\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\|\le$ $c_0'\tau^{-1/2}+c_0''$, где c_0', c_0'' – константы, зависящие только от параметров кривой $\partial\Omega$ (см.оценки (9) [19]). Зададим операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$: $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}\equiv\int_{I_T}\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}^{[j]}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega_{\pm}$, $j=1,2$). Имеет место аналог теоремы 6 [19]:

Теорема 8. Пусть $\partial\Omega\in C^2$, $N/2\in\mathbf{N}$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[1]}(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,0;3,3}(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[2]}(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,0;3,0}(\partial\Omega)\to L_2]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N\to\infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,0;3,3}(\partial\Omega)\to L_2]$ ($\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,0;3,0}(\partial\Omega)\to L_2]$) равномерно по $\boldsymbol{x}\in\Omega_{\pm}$ ($\boldsymbol{x}\in\Omega_{\pm}$, $Y>0$).

Пусть $d\in I_D$ ($I_D\equiv(0,D]$), где D – треть радиуса круга Ляпунова. Тогда существует кривая $\partial\Omega_d^{\pm}\subset\Omega_{\pm}$, параллельная кривой $\partial\Omega$, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между точками $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\in\partial\Omega$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\in\partial\Omega_d^{\pm}$ ($s\in I_S$), такое, что $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)$ – нормаль к $\partial\Omega$ и $\left|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\tilde{\boldsymbol{x}}_d^{\pm}(s)\right|=d$ [29, с. 313]. Область, образованную кривыми $\partial\Omega_d^{\pm}$ ($d\in(0,d_0]$, $d_0\in I_D$), обозначим через $\Pi_{d_0}^{\pm}$, $\Omega_{d_0}^{\pm}\equiv\overline{\Omega_{\pm}\setminus\Pi_{d_0}^{\pm}}$. Имеем неравенства: $r\ge d$ при $\boldsymbol{x}\in\Omega_d^{\pm}$ ($d\in I_D$), позволяющие сделать оценки норм операторов $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)$ $[C(\partial\Omega)\to L_2]$:

$$\|\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\|\le c_A\exp\left[-d^2/(8\tau)\right]\ (\boldsymbol{x}\in\Omega_d^{\pm},\ d\in I_D,\ \tau>0;$$

$$c_A\equiv(2\pi)^{-1}S\sup_{\tau\in(0,\infty)}\tau^{-1}\exp\left[-d^2/(8\tau)\right]).$$

Принимая также во внимание оценки (6), (9) и формулу (4), получаем неравенства:

$$\left\|\int_{I_T}\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_T(\tau)\left(\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[j]}(\tau)-\boldsymbol{U}_Y(\tau)\right)\boldsymbol{f}\,d\tau\right\|_{L_2}^2\le$$

$$\le\tilde{N}^{-6}c_\Lambda^2c_\omega^2h_\tau^6\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j^6\left\|\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}\right\|_{L_2(I_T)}^2\exp\left(-2\sigma_j\tau\right)\le$$

$$\tilde{N}^{-6}c_A^2c_\Lambda^2c_\omega^2h_\tau^6\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j^6\exp\left[-d^2/(4\tau)\right]\exp\left(-2\sigma_j\tau\right)\left\|\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}_j\right)_{L_2(I_Y)}\right\|_{L_2(I_T)}^2\le$$

$$\le\tilde{N}^{-6}c_A^2c_\Lambda^2c_\omega^2c_\mu\|\boldsymbol{f}\|_{L_2}^2\,h_\tau^6\ \ (j=1,2),\qquad(20)$$

где $\boldsymbol{f}\in L_2$, $\boldsymbol{x}\in\Omega_d^{\pm}$, $d\in I_D$, $c_\mu\equiv\sup_{\mu\ge0}\mu^{12}\exp\left(-\sqrt{2}\,d\,\mu\right)$. Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$, $j = 1,2$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$ $[\,C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$ сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $Y > 0$.

С помощью равенств: $\breve{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}^{[j]}(\tau)\breve{\boldsymbol{P}}_L\, \boldsymbol{f}\, d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in H_L$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $j = 1,2$), зададим операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$ $[\,H_L\,]$, для которых справедливо утверждение, аналогичное теореме 7 [19]:

Теорема 10. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3(\partial\Omega) \to H_L\,]$ ($j = 1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \to \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$ $[\,C^3(\partial\Omega) \to H_L\,]$ равномерно по N, $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$.

Обозначим через $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$ ($j = 1,2$) операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$, у которых для вычисления интегралов $\int_{s_l}^{s_{l+1}} g_0(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}(s), \tau)\breve{\Lambda}_m(s)\,ds$ ($l = \overline{-L/2, L/2-1}$, $m = \overline{0,2}$) используются ККИ по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$ ($d \in I_D$) и ПКФГ с γ узлами в соответствии с работой [19]. Тогда имеем аналоги теоремы 8 [19] и следствия 3 [19]:

Теорема 11. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^2(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($j = 1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \to \infty$ к соответствующим операторам $\breve{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^2(\partial\Omega) \to L_2\,]$ равномерно по N, $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})$ $[\,H_L \to L_2\,]$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$, $j = 1,2$) ограничены в совокупности.

На основании теорем 8–11 делаем вывод:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[2]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$, $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C^3_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to L_2\,]$ ($\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$, $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})$ $[\,C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2\,]$) равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\boldsymbol{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $Y > 0$).

Введем в рассмотрение операторы $\boldsymbol{R}_{\pm}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_{\pm}^{-1}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_0^{[j]}(\boldsymbol{x})\left(\hat{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[j]}\right)^{-1}$. Операторы $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x})$ экономно вычисляются в алгебре полиномов, образованных N степенями полугруппового оператора $\boldsymbol{U}_T(h_\tau)$. В силу теоремы 1 и следствий 1–3 получаем утверждение:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$, $d \in I_D$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C^3_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to L_2]$ ($\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[2]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2]$, $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ $[C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \to \infty$ к соответствующим операторам $\boldsymbol{R}_{\pm}(\boldsymbol{x})$ $[C^3_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \to L_2]$ ($\boldsymbol{R}_{\pm}(\boldsymbol{x})$ $[C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2]$, $\boldsymbol{R}_{\pm}(\boldsymbol{x})$ $[C^3_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \to L_2]$) равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}_d$, $Y > 0$).

На основании теоремы 7, следствия 2 и оценки $\|\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{P}_T\| \le 2^{1/2} T \tilde{c}_0 c_\Lambda^2$ для операторов $\boldsymbol{P}_T$ $[H^{1,1/2} \to C^0_Y]$, $\boldsymbol{P}_Y$ $[C^0_Y \to L_2]$, $\boldsymbol{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to H_L]$ можно сделать вывод об ограниченности операторов $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{P}_Y \boldsymbol{P}_T$ $[C_{1,1/2;0,0}(\partial\Omega) \to H_L]$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$, $j = 1,2$) в совокупности. С учетом теоремы 3 сформулируем утверждение о сходимости и устойчивости сеточных решений краевых задач (2) $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{P}}_Y (\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{w})$:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $M/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$, $d \in I_D$, $R > 0$, $j = 1,2$. Тогда $\left\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_{\pm}(\boldsymbol{x})\right\|_{L_2} \to 0$ с кубической скоростью при $L, M, N \to \infty$ равномерно относительно функций $\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,5/2}(\partial\Omega)$ ($\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)$), удовлетворяющих условиям $\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,5/2}(\partial\Omega)} \le R$ ($\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)} \le R$, $\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)} \le R$), и равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}_d$, $Y > 0$). Кроме того, значения функций $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\pm}^{[j][\delta]}(\boldsymbol{x}) \equiv \hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[j]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{P}}_Y (\boldsymbol{P}_T \boldsymbol{w}^{[\delta]})$ сходятся при $L, M, N \to \infty$, $\delta \to 0$ в норме L_2 к соответствующим $\boldsymbol{u}_{\pm}(\boldsymbol{x})$ равномерно по $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\pm}_d$, $Y > 0$) и равномерно относительно функций $\boldsymbol{w}^{[\delta]} \in C_{1,1/2;0,0}(\partial\Omega)$ и $\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,5/2}(\partial\Omega)$ ($\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{w} \in C_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)$), удовлетворяющих условиям $\left\|\boldsymbol{w}^{[\delta]} - \boldsymbol{w}\right\|_{C_{1,1/2;0,0}(\partial\Omega)} \le \delta$ и $\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,5/2}(\partial\Omega)} \le R$ ($\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)} \le R$, $\|\boldsymbol{w}\|_{C^3_{4,1/2;0,0}(\partial\Omega)} \le R$).

Операторы $\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[i]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L$ ($i = 1,2$) могут быть вычислены с помощью рядов Фурье:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\pm}^{[i]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{G}}_0^{[i]}(\boldsymbol{x}, \sigma_j)\left[\hat{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[i]}(\sigma_j)\right]^{-1} \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega),\ \boldsymbol{x} \in \Omega_{\pm}), \tag{21}$$

сходящихся в норме пространства L_2. Здесь операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[i]}(\boldsymbol{x}, \sigma_j)$ $[\boldsymbol{P}_j H_L \to \boldsymbol{P}_j L_2]$, $\hat{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[i]}(\sigma_j)$ $[\boldsymbol{P}_j H_L]$ аппроксимируют операторы $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x}, \sigma_j)$ $[\boldsymbol{P}_j C(\partial\Omega) \to \boldsymbol{P}_j L_2]$ и $\boldsymbol{G}_{\pm}(\sigma_j) \equiv \mp 2^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_2(\sigma_j) - \eta \boldsymbol{G}_0(\sigma_j)$ $[\boldsymbol{P}_j C(\partial\Omega)]$ в соответствии со следствием 4 [19] и следствием 2 [18]. Они могут быть получены из операторов $\hat{\boldsymbol{G}}_0^{[i]}(\boldsymbol{x})$ и $\hat{\boldsymbol{G}}_{\pm}^{[i]}$, если вместо функций $\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[i]}(\tau)$ подставить соответствующие функции $e_j(\tau)\boldsymbol{P}_j$.

В заключение продемонстрируем, как уменьшение гладкости функций по y уменьшает скорость сходимости вблизи границы $\partial\Omega$ операторов $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}^{[1]}(\boldsymbol{x})$: $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_0^{h_\tau} \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}_Y^{[1]}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$, возникающих при вычислении операторов $\tilde{\boldsymbol{G}}_0^{[1]}(\boldsymbol{x})$. С целью упрощения будем рассматривать случай кусочно-линейной интерполяции (КЛИ) C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ и полагать $\tilde{N}=1$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}^{[1]}(x)$ [$C_{0,2;0,0}(\partial\Omega) \to L_2$] сходятся по операторной норме с квадратичной скоростью при $N \to \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}(x)$ [$C_{0,2;0,0}(\partial\Omega) \to L_2$]: $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} \equiv \int_0^{h_\tau} \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{U}_Y(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau$, равномерно по $\boldsymbol{x}\in\Omega_\pm$. Покажем, что порядок аппроксимации равномерной по $\boldsymbol{x}\in\Omega_\pm$ сходимости операторов $\tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}^{[1]}(\boldsymbol{x})$ [$C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega) \to L_2$] к операторам $\boldsymbol{G}_{0,0}(\boldsymbol{x})$ [$C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega) \to L_2$] не более, чем $O(h_\tau)$.

В случае КЛИ C_0-полугруппы $\boldsymbol{U}_Y(\tau)$ остаточные члены аппроксимаций $e_j(\tau)$ знакопостоянны [30, с. 43]:

$$e_j(\tau) - \exp\left(-\sigma_j\tau\right) = 2^{-1}\sigma_j^2\exp\left(-\sigma_j\tau\right)\tau\left(h_\tau - \tau\right) > 0 \quad (\tau\in[0,h_\tau]).$$

Введем в рассмотрение последовательность функций $f_n(\boldsymbol{x},t,y) = \breve{\sigma}_n^{-1/2}\psi_n(y)$ ($n\in\mathbf{N}$), для которых

$$\boldsymbol{\delta}_n \equiv \tilde{\boldsymbol{G}}_{0,0}^{[1]}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{G}_{0,0}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_n =$$
$$= (8\pi)^{-1}\sigma_n^2\breve{\sigma}_n^{-1/2}\boldsymbol{\psi}_n\int_0^{h_\tau}\exp(-\sigma_n\tau)(h_\tau-\tau)\int_{\partial\Omega}\exp\left[-r^2/(4\tau)\right]ds'\,d\tau.$$

Пусть $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}_d^\pm(s)$ и $z \equiv s'-s$ ($s,s'\in I_S$, $d\in I_D$). Тогда $r^2 = \rho^2 + d^2$ и $\rho^2 \le c_\rho z^2$ при некотором $c_\rho > 0$ (см. теорему 5 [19]). Введем в рассмотрение последовательности $h_{\tau,n} = \breve{\sigma}_n^{-1}$, $d_n = \left(4h_{\tau,n}\right)^{1/2}$. Полагая $h_\tau = h_{\tau,n}$, $d = d_n$ и $c_\sigma \equiv \left(8\sqrt{2}\,\pi\right)^{-1}\min_{n\in\mathbf{N}}\left(\sigma_n^2/\breve{\sigma}_n^2\right)$, имеем оценки:

$$\left\|\boldsymbol{\delta}_n\right\|_{L_2}\Big/\left\|\boldsymbol{f}_n\right\|_{C_{0,1/2;0,0}} \ge T^{1/2}c_\sigma\breve{\sigma}_n^{3/2}\exp\left(-\sigma_n h_{\tau,n}\right)\times$$
$$\times\int_0^{h_{\tau,n}}\left(h_{\tau,n}-\tau\right)\exp\left[-d_n^2/(4\tau)\right]\int_{-d_n}^{d_n}\exp\left[-c_\rho z^2/(4\tau)\right]dz\,d\tau \ge$$
$$\ge e^{-1}T^{1/2}c_\sigma h_{\tau,n}^{1/2}d_n\int_0^1(1-\gamma)\exp(-1/\gamma)\int_{-1}^{1}\exp\left[-c_\rho\lambda^2/\gamma\right]d\lambda\,d\gamma \ge$$
$$\ge 4e^{-1}T^{1/2}c_\sigma h_{\tau,n}\int_0^1(1-\gamma)\exp\left[-\left(c_\rho+1\right)/\gamma\right]d\gamma,$$

согласно которым скорость равномерной по $\boldsymbol{x}\in\Omega_\pm$ сходимости операторов

$\tilde{\boldsymbol{G}}^{[1]}_{0,0}(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega)\to L_2]$ к операторам $\boldsymbol{G}_{0,0}(\boldsymbol{x})$ $[C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega)\to L_2]$ при $N\to\infty$ не более линейной.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение краевой задачи (2) в круглом цилиндре с радиусом основания $R=1$, значениями параметров $\eta=h_0=h_Y=1$, $p=0$, $T=1$ и граничными условиями вида $w_2(R'=1,\varphi,t,y)=$ $150\pi^{-1}\psi_j(y)t^2\cos\varphi$ ($j\in\mathbf{Z}_+$; R',φ – полярные радиус и угол). Точные решения $\bar{u}_+(R',\varphi,t,y)$ имеют вид:

$$\bar{u}_+=150\pi^{-1}\psi_j(y)\cos\varphi\times$$
$$\times\left\{R't^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_kR')}{J_1(\mu_k)}\left[\frac{\sigma_jt^2}{\mu_k^2-\sigma_j}-2\mu_k^2\left(\frac{t}{\left(\mu_k^2-\sigma_j\right)^2}+\frac{\exp\left[-\left(\mu_k^2-\sigma_j\right)t\right]-1}{\left(\mu_k^2-\sigma_j\right)^3}\right)\right]\right\},$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $zJ_1'(z)+J_1(z)=0$. Приближенные решения $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[i]}_+$ ($i=1,2$) вычисляем согласно следствию 5, используя ПКФГ с $\gamma=12$ узлами. Но функцию $\tilde{\boldsymbol{U}}^{[1]}_Y(\tau)$ вычисляем более точно: полагаем $N_j=2j+6$, с той целью, чтобы точек коллокации у функции $\tilde{\boldsymbol{U}}^{[1]}_Y(\tau)$ было не меньше, чем точек коллокации у функции $\tilde{\boldsymbol{U}}^{[2]}_Y(\tau)$. Кроме того, вычисляем приближенные решения вида $\hat{\boldsymbol{u}}^{[i]}_+\equiv\boldsymbol{P}_j\tilde{\boldsymbol{u}}^{[i]}_+$. Все решения вычисляем с помощью рядов Фурье (21) с тридцатью первыми членами при $Y=1$ и тремя первыми членами при $Y=0.1$ в узлах $(\boldsymbol{x}'_l,\tau_n,y_m)$ ($l=\overline{-L-1,L}$, $n=\overline{1,N}$, $m=\overline{0,M}$), где $\boldsymbol{x}'_l$ – точки, получающиеся из точек $\tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ в результате сжимающего отображения окружности $\partial\Omega$ на окружность $\partial\Omega'$ радиуса $R'<R$. Длины дуг, на которых осуществляется ККИ по переменной ρ, выбираем так, чтобы значения выражений $z_j\equiv\rho^2\big/\left(4\tilde{h}_{\tau,j}\right)$ на этих дугах не превосходили единицу, и тогда интегральные показательные функции $\mathrm{Ei}\left(-z_j\right)$ мы заменяем первыми десятью членами ряда Маклорена и осуществляем аналитическое интегрирование по переменной ρ. В следующей таблице в каждой основной ячейке в соответствующем порядке сверху вниз приведены пять значений среднеквадратичных отклонений приближенных решений от точного решения $\bar{\boldsymbol{u}}_+$: относительное отклонение $\delta\hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$ функции $\hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$ и абсолютные отклонения $\Delta\hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$, $\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$, $\Delta\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$, $\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$ функций $\hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$, $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$, $\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$, $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$.

Результаты вычислительных экспериментов в основном подтверждают теоретические выводы и демонстрируют существенно более равномерную сходимость относительно j, Y, d сеточных решений $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$ по сравнению с $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$. А именно: скорость сходимости решений $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[1]}_+$ становится существенно меньше кубической при больших j и малых Y и d, тогда как кубическая скорость сходимости $\tilde{\boldsymbol{u}}^{[2]}_+$

Погрешности численных решений

		$Y=1$				$Y=0.1$			
		$j=0$	$j=10$	$j=20$	$j=30$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$R'=0.999999$	$N=16$, $L=6$, $M=4$	$1.9\cdot10^{-3}$	$6.8\cdot10^{-3}$	$6.9\cdot10^{-3}$	$6.9\cdot10^{-3}$	$3.8\cdot10^{-3}$	$6.8\cdot10^{-3}$	$6.9\cdot10^{-3}$	$6.9\cdot10^{-3}$
		$3.2\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-4}$	$5.2\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-4}$	$5.2\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$
		$3.2\cdot10^{-4}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$5.2\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-4}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$5.2\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$
		$3.2\cdot10^{-4}$	$5.9\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$	$2.9\cdot10^{-4}$	$6.1\cdot10^{-3}$	$8.1\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$
		$3.2\cdot10^{-4}$	$5.9\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$	$2.9\cdot10^{-4}$	$6.1\cdot10^{-3}$	$8.1\cdot10^{-3}$	$8.0\cdot10^{-3}$
	$N=32$, $L=14$, $M=6$	$9.3\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$3.3\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-3}$
		$1.5\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$8.1\cdot10^{-6}$	$5.4\cdot10^{-6}$	$2.9\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$8.1\cdot10^{-6}$	$5.4\cdot10^{-6}$
		$1.6\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$8.1\cdot10^{-6}$	$5.5\cdot10^{-6}$	$2.9\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$8.2\cdot10^{-6}$	$5.4\cdot10^{-6}$
		$1.5\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$3.5\cdot10^{-3}$	$4.1\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$1.7\cdot10^{-3}$	$3.6\cdot10^{-3}$	$4.1\cdot10^{-3}$
		$1.6\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$3.5\cdot10^{-3}$	$4.1\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$1.7\cdot10^{-3}$	$3.6\cdot10^{-3}$	$4.1\cdot10^{-3}$
	$N=64$, $L=30$, $M=12$	$5.6\cdot10^{-6}$	$6.9\cdot10^{-5}$	$7.7\cdot10^{-5}$	$8.0\cdot10^{-5}$	$3.0\cdot10^{-5}$	$7.0\cdot10^{-5}$	$7.8\cdot10^{-5}$	$8.0\cdot10^{-5}$
		$8.6\cdot10^{-7}$	$9.8\cdot10^{-7}$	$5.5\cdot10^{-7}$	$3.8\cdot10^{-7}$	$2.6\cdot10^{-6}$	$9.9\cdot10^{-7}$	$5.6\cdot10^{-7}$	$3.8\cdot10^{-7}$
		$9.7\cdot10^{-7}$	$9.9\cdot10^{-7}$	$5.6\cdot10^{-7}$	$3.9\cdot10^{-7}$	$2.6\cdot10^{-6}$	$9.9\cdot10^{-7}$	$5.6\cdot10^{-7}$	$3.8\cdot10^{-7}$
		$8.7\cdot10^{-7}$	$2.7\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$8.8\cdot10^{-7}$	$2.9\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$
		$9.8\cdot10^{-7}$	$2.7\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$8.8\cdot10^{-7}$	$2.9\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$
$R'=0.9$	$N=16$, $L=6$, $M=4$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.6\cdot10^{-2}$	$3.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.6\cdot10^{-2}$
		$1.6\cdot10^{-4}$	$7.6\cdot10^{-6}$	$1.7\cdot10^{-7}$	$6.8\cdot10^{-9}$	$1.8\cdot10^{-4}$	$7.0\cdot10^{-6}$	$1.7\cdot10^{-7}$	$6.6\cdot10^{-9}$
		$1.6\cdot10^{-4}$	$8.3\cdot10^{-6}$	$8.7\cdot10^{-7}$	$3.7\cdot10^{-7}$	$1.8\cdot10^{-4}$	$7.0\cdot10^{-6}$	$4.0\cdot10^{-6}$	$2.8\cdot10^{-8}$
		$1.6\cdot10^{-4}$	$6.2\cdot10^{-4}$	$8.8\cdot10^{-5}$	$9.8\cdot10^{-5}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$6.5\cdot10^{-4}$	$8.8\cdot10^{-5}$	$9.8\cdot10^{-5}$
		$1.7\cdot10^{-4}$	$6.2\cdot10^{-4}$	$8.8\cdot10^{-5}$	$9.8\cdot10^{-5}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$6.5\cdot10^{-4}$	$8.8\cdot10^{-5}$	$9.8\cdot10^{-5}$
	$N=32$, $L=14$, $M=6$	$3.1\cdot10^{-5}$	$1.4\cdot10^{-3}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$1.7\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$1.5\cdot10^{-3}$
		$3.9\cdot10^{-6}$	$9.5\cdot10^{-7}$	$2.1\cdot10^{-8}$	$6.2\cdot10^{-10}$	$9.9\cdot10^{-6}$	$8.9\cdot10^{-7}$	$2.1\cdot10^{-8}$	$6.1\cdot10^{-10}$
		$4.9\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.5\cdot10^{-7}$	$7.3\cdot10^{-8}$	$9.9\cdot10^{-6}$	$8.9\cdot10^{-7}$	$7.1\cdot10^{-7}$	$6.7\cdot10^{-9}$
		$4.0\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$7.8\cdot10^{-5}$	$3.4\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$7.8\cdot10^{-5}$
		$5.0\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$7.8\cdot10^{-5}$	$3.4\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$7.8\cdot10^{-5}$
	$N=64$, $L=30$, $M=12$	$2.1\cdot10^{-6}$	$9.1\cdot10^{-5}$	$9.1\cdot10^{-5}$	$9.3\cdot10^{-5}$	$3.0\cdot10^{-6}$	$9.3\cdot10^{-5}$	$9.4\cdot10^{-5}$	$9.6\cdot10^{-5}$
		$2.7\cdot10^{-7}$	$5.8\cdot10^{-8}$	$1.3\cdot10^{-9}$	$3.8\cdot10^{-11}$	$1.7\cdot10^{-7}$	$5.5\cdot10^{-8}$	$1.3\cdot10^{-9}$	$3.8\cdot10^{-11}$
		$3.1\cdot10^{-7}$	$7.5\cdot10^{-8}$	$1.7\cdot10^{-8}$	$1.2\cdot10^{-8}$	$1.7\cdot10^{-7}$	$5.5\cdot10^{-8}$	$4.7\cdot10^{-8}$	$4.1\cdot10^{-9}$
		$2.7\cdot10^{-7}$	$2.9\cdot10^{-5}$	$2.7\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$2.2\cdot10^{-7}$	$3.1\cdot10^{-5}$	$2.8\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$
		$3.2\cdot10^{-7}$	$2.9\cdot10^{-5}$	$2.7\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$2.2\cdot10^{-7}$	$3.1\cdot10^{-5}$	$2.8\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$

при этом сохраняется, причем погрешности $\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}_{+}^{[1]}$ значительно превосходят погрешности $\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}_{+}^{[2]}$. Однако скорость сходимости решений $\tilde{\boldsymbol{u}}_{+}^{[2]}$ при больших j и малых Y снижается при увеличении d, погрешности $\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}_{+}^{[2]}$ значительно возрастают по сравнению с $\Delta\hat{\boldsymbol{u}}_{+}^{[2]}$, при этом решения $\hat{\boldsymbol{u}}_{+}^{[2]}$ сходятся с кубической скоростью равномерно по j, Y, d. Дело в том, что при больших значениях d вклад в погрешность высокочастотных гармоник ($j \gg 1$, $Y \ll 1$) от низкочастотных гармоник ($j \approx 1$, $Y \sim 1$) значительно больше, чем при малых значениях d, так как правая часть оценки (20) при больших d стремится к нулю при $j \to \infty$ и $Y \to 0$ значительно быстрее, чем при малых d.

Здесь рассматривались краевые задачи (2) с граничными условиями второго и третьего рода. Аналогичные сеточные решения могут быть построены для такой же первой краевой задачи в соответствии с работой [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К.*, *Теллес Ж.*, *Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Onishi K.* Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. *Costabel M.*, *Onishi K.*, *Wendland W.L.* A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W.Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. *Iso Y.*, *Takahashi S.*, *Onishi K.* Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.). V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. l–24.
5. *Hongtao Y.* On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
6. *Majchrzak E.*, *Ładyga E.*, *Mendakiewicz J.*, *Belkhayat A.P.* Different variants of the boundary element method for parabolic equations // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2004. V. 3. No. 1. P. 127–132.
7. *Werner-Juszczuk A.J.*, *Sorko S.A.* Application of boundary element method to solution of transient heat conduction // Acta Mechanica et Automatica. 2012. V. 6. No. 4. P. 67–74.
8. *Kukla S.*, *Siedlecka U.* Heat conduction problem in a two-layered hollow cylinder by using the green's function method // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. V. 12. No. 2. P. 45–50. DOI: 10.17512/jamcm.2013.2.06.
9. *Kukla S.*, *Siedlecka U.* Green's function for heat conduction problems in a multi-layered hollow cylinder // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2014. V. 13. No. 3. P. 115–122. DOI: 10.17512/jamcm.2014.3.12.
10. *Pettres R.*, *Lacerda L.A.*, *Carrer J.A.M.* A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. V. 51. February. P. 191–198. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.11.005.
11. *Yang D.-S.*, *Ling J.* A new boundary-type mesh-free method for solving the multi-domain heat conduction problem // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2016. V. 69. No. 2. P. 167–178. DOI: 10.1080/10407790.2015.1092823.
12. *Godinho L.*, *Tadeu A.*, *Simões N.* Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2004. V. 28. P. 593–606. DOI: 10.1016/j.enganabound.2003.09.002.
13. *Lu X.*, *Tervola P.*, *Viljanen M.* Transient analytical solution to heat conduction in composite-circular cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49. P. 341–348. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019.

14. *Asgari M., Akhlaghi M.* Transient heat conduction in two-dimensional functionally graded hollow cylinder with finite length // Heat Mass Transfer. 2009. V. 45. P. 1383–1392. DOI: 10.1007/s00231-009-0515-8.
15. *González-Durán J.E.E., Rodríguez-Reséndiz J., Ramirez J.M.O., Zamora-Antuñano M.A., Lira-Cortes L.* Finite-Element Simulation for Thermal Modeling of a Cell in an Adiabatic Calorimeter // Energies. 2020. V. 13. No. 9: 2300. 12 p. DOI: 10.3390/en13092300.
16. *Nolasco C., Jácome N.J., Hurtado-Lugo N.A.* Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1388: 012034. 7 p. DOI: 10.1088/1742-6596/1388/1/012034.
17. *Marchesse Y., Changenet C.* Forced convective heat transfer over a non-circular slender cylinder // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2008. V. 223. No. 2. P. 427–437. DOI: 10.1243/09544062jmes1182.
18. *Иванов Д.Ю.* О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
19. *Иванов Д.Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
20. *Иванов Д.Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
21. *Иванов Д.Ю.* Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цидиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.
22. *Иванов Д.Ю.* Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4 (22). С. 26–38.
23. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979. 685 с.
24. *Иванов Д.Ю.* Замкнутость сумм неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 35–48. DOI: 10.17223/19988621/45/3.
25. *Лянцэ В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. Киев: Наукова думка, 1983. 212 с.
26. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
27. *Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
28. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 38. С. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
29. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.
30. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.

Статья поступила 08.09.2020 г.

Ivanov D.Y. (2021) ON THE JOINT APPLICATION OF THE COLLOCATION BOUNDARY ELEMENT METHOD AND THE FOURIER METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION IN FINITE CYLINDERS WITH SMOOTH DIRECTRICES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 15–38

DOI 10.17223/19988621/72/2

Keywords: unsteady heat conduction, boundary integral equations, boundary element, collocation, uniform convergence, stability, non-circular cylinder, Fourier method, dissipation.

Here we consider the initial-boundary value problems in a homogeneous cylindrical domain $\Omega_+ \times I_Y$ (Ω_+ is an open two-dimensional bounded simply connected domain with a boundary $\partial\Omega \in C^5$, $\Omega_- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$ is the open exterior of the domain Ω_+, $I_Y \equiv [0,Y]$ is the height of the cylinder) on a time interval $I_T \equiv [0,T]$. The initial conditions and the boundary conditions on the bases of the cylinder are zero, and the boundary conditions on the lateral surface of the cylinder are given by the function $w(x_1,x_2,y,t)$ ($(x_1,x_2) \in \partial\Omega$, $y \in I_Y$, $t \in I_T$). An approximate solution of such problems is obtained through the combined use of the Fourier method and the collocation boundary element method based on piecewise quadratic interpolation (PQI). The solution to the problem in the cylinder is expanded in a Fourier series in terms of eigenfunctions of the operator $\boldsymbol{B}_y \equiv \partial^2_{yy}$ with the corresponding zero boundary conditions. The coefficients of such a Fourier series are solutions of problems for two-dimensional heat equations $\nabla^2 u = \partial_t u + k^2 u$. With a low smoothness of the functions *w* in the variable *y*, the weight of solutions at large values of *k* increases and the accuracy of solving the problem in the cylinder decreases. To maintain accuracy on a uniform grid, the step of discretization of the boundary function *w* with respect to the variable *y* is decreased by a factor of *j*. Here *j* is an averaged value of the quantity Yk/π depending on the function *w*. In addition, the steps of discretization of functions $\exp\left(-k^2\tau\right)$ with respect to the variable τ in domains $\tau \le \pi T/k$ are reduced by a factor of k^2/π^2. The steps in the remaining ranges of values τ and the steps by the other variables remain unchanged.

The approximate solutions obtained on the basis of this procedure converge stably to exact solutions in the $L_2(I_Y \times I_T)$-norm with a cubic velocity uniformly with respect to sets of functions *w*, bounded by norm of functions with low smoothness in the variable *y*, uniformly along the length of the generatrix of the cylinder Y, and uniformly in the domain Ω. The latter is also associated with the use of PQI along the curve $\partial\Omega$ over the variable $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$, which is carried out at small values of r (d and r are the distances from the observed point of the domain Ω to the boundary $\partial\Omega$ and to the current point of integration along $\partial\Omega$, respectively).

The theoretical conclusions are confirmed by the results of the numerical solution of the problem in a circular cylinder, where the dependence of the boundary functions *w* on *y* is given by the normalized eigenfunctions of the differential operator $\boldsymbol{B}_y$ which vary in a sufficiently large range of values of k.

AMS Mathematical Subject Classification: 65J10, 65N38, 80M15

Dmitry Y. IVANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engeneering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag.
2. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems* (H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds.). Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research* (C.A. Brebbia, ed.), Vol. 3. Berlin: Springer. pp. l–24.
5. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
6. Majchrzak E., Ładyga E., Mendakiewicz J., Belkhayat A.P. (2004) Different variants of the boundary element method for parabolic equations. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 3(1). pp. 127–132.
7. Werner-Juszczuk A.J., Sorko S.A. (2012) Application of boundary element method to solution of transient heat conduction. *Acta Mechanica et Automatica*. 6 (4). pp. 67–74.
8. Kukla S., Siedlecka U. (2013) Heat conduction problem in a two-layered hollow cylinder by using the green's function method. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 12(2). pp. 45–50. DOI: 10.17512/jamcm.2013.2.06.
9. Kukla S., Siedlecka U. (2014) Green's function for heat conduction problems in a multilayered hollow cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 13(3). pp. 115–122. DOI: 10.17512/jamcm.2014.3.12.
10. Pettres R., Lacerda L.A., Carrer J.A.M. (2015) A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 51 (February). pp. 191–198. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.11.005.
11. Yang D.-S., Ling J. (2016) A new boundary-type mesh-free method for solving the multidomain heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer*, *Part B: Fundamentals*. 69(2). pp. 167–178. DOI: 10.1080/10407790.2015.1092823.
12. Godinho L., Tadeu A., Simões N. (2004) Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 28. pp. 593–606. DOI: 10.1016/j.enganabound.2003.09.002.
13. Lu X., Tervola P., Viljanen M. (2006) Transient analytical solution to heat conduction in compositecircular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49. pp. 341–348. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019.
14. Asgari M., Akhlaghi M. (2009) Transient heat conduction in two-dimensional functionally graded hollow cylinder with finite length. *Heat Mass Transfer*. 45. pp. 1383–1392. DOI: 10.1007/s00231-009-0515-8.
15. González-Durán J.E.E., Rodríguez-Reséndiz J., Ramirez J.M.O., Zamora-Antuñano M.A., Lira-Cortes L. (2020) Finite-element simulation for thermal modeling of a cell in an adiabatic calorimeter. *Energies*. 13(9), 2300. DOI: 10.3390/en13092300.
16. Nolasco C., Jácome N.J., Hurtado-Lugo N.A. (2019). Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity. *Journal of Physics: Conference Series*. 1388, 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1388/1/012034.
17. Marchesse Y., Changenet C. (2008) Forced convective heat transfer over a non-circular slender cylinder. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 223(2). pp. 427–437. DOI: 10.1243/09544062jmes1182.
18. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of nonstationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.

19. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchaye dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
20. Ivanov D.Yu. (2020) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy dvumernoy oblasti s pomoshch'yu poluanaliticheskoy approksimatsii teplovogo potentsiala dvoynogo sloya [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
21. Ivanov D.Yu. (2014) Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsidindrakh [An economical method for calculating operators that solve some heat conduction problems in direct cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*. 9. pp. 16–32.
22. Ivanov D.Yu. (2014) Vychisleniye operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniyem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators, which solve problems of heat conduction in straight cylinders using semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4 (22). pp. 26–38.
23. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. (1979) *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of problems in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
24. Ivanov D.Yu. (2017) Zamknutost' summ neogranichennykh operatorov, deystvuyushchikh po raznym peremennym v prostranstvakh kvadratichno summiruyemykh funktsiy neskol'kikh peremennykh [Closedness of sums of unbounded operators acting on different variables in the spaces of square-integrable functions of several variables]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 35–48. DOI: 10.17223/19988621/45/3.
25. Lyantse V.E., Storozh O.G. (1983) *Metody teorii neogranichennykh operatorov* [Methods of the Theory of Unbounded Operators]. Kyiv: Naukova dumka.
26. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
27. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* 1. pp. 15–17.
28. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruyemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integral'nykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 38. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
29. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
30. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2008) *Chislennyye metody*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.

Received: September 8, 2020