

УДК 531.391

DOI 10.17223/19988621/72/10

И.П. Попов

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Представлены методы расчета разветвленных механических систем с любым числом степеней свободы, основанные на использовании символического или комплексного представления вынужденных гармонических колебаний. Доказан ряд релевантных теорем, связывающих активные и реактивные параметры систем при последовательном и параллельном соединении потребителей механической мощности. Показана возможность схемного изменения характера реактивной нагрузки.

Ключевые слова: *символический, комплексный метод, параллельное, последовательное соединение, характер нагрузки, векторная диаграмма.*

Расчет динамики механической системы с n степенями свободы, включающей инертные тела и упругие элементы, предполагает составление и интегрирование системы из n дифференциальных уравнений второго порядка, которые сводятся к дифференциальному уравнению $2n$ порядка. Увеличение степени свободы на единицу увеличивает порядок результирующего дифференциального уравнения на два. Решение дифференциальных уравнений высоких порядков является достаточно громоздким и трудоемким [1, 2].

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета механических систем с несколькими степенями свободы для установившихся режимов.

Далее используются следующие обозначения и терминология:

- $\underline{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t$ – инертный реактанс в комплексном представлении;
- $\underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega}$ – упругий реактанс;
- $\underline{r} = r$ – механический резистанс,
- $\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический импеданс;
- $\underline{b}_m = \frac{1}{\omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega t} = \frac{1}{\underline{x}_m}$ – инертный сассептанс;
- $\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}$ – упругий сассептанс;

- $\underline{g} = g = \frac{1}{r}$ – механический кондактанс;
- $\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический адмитанс.

Сила, скорость, импеданс и адмитанс связаны формулами

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = ZV e^{i\varphi}; \quad (1)$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (2)$$

Несколько релевантных теорем

Выше было показано, что $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$, $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$, $g = 1/r$. Соотношение между $\underline{y}$ и $\underline{z}$ устанавливает

Теорема 1. Для механической системы справедлива формула

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Доказательство. В соответствии с (1)

$$\underline{z} = \frac{\dot{F}}{\dot{V}}.$$

В соответствии с (2)

$$\underline{y} = \frac{\dot{V}}{\dot{F}} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Для механической системы без демпфера справедлива формула

$$\underline{b} = 1/\underline{x},$$

поскольку в этом случае $\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{z} = \underline{x}$.

Теорема 2. Эквивалентные величины для механической системы определяются формулами

$$g^* = \frac{r}{r^2 + x^2},$$

$$\underline{b}^* = \frac{x}{r^2 + x^2} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$r^* = \frac{g}{g^2 + b^2},$$

$$\underline{x}^* = \frac{b}{g^2 + b^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство.

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + ix,$$

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r + ix} \frac{r - ix}{r - ix} = \frac{r - ix}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - i \frac{x}{r^2 + x^2} = g^* + \underline{b}^*,$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + ib,$$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} = \frac{1}{g + ib} \frac{g - ib}{g - ib} = \frac{g - ib}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} - i \frac{b}{g^2 + b^2} = r^* + \underline{x}^*.$$

Теорема доказана.

Пусть n объектов с механическими адмитансами $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ соединены последовательно. Эквивалентный адмитанс системы – $\underline{y}$. Имеет место

Теорема 3. При последовательном соединении объектов справедлива формула

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j.$$

Доказательство. При последовательном соединении к объектам приложена единая сила $\dot{F}$. Для произвольного объекта в соответствии с (2) справедлива формула

$$\dot{V}_j = \underline{y}_j \dot{F}.$$

Согласно принципу суперпозиции, скорость штока источника силового гармонического воздействия равна

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \dot{V}_j = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \dot{F} = \dot{F} \sum_{j=1}^n \underline{y}_j = \dot{F} \underline{y}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.

$$\frac{1}{\underline{z}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{z}_j}.$$

Следствие 3.2.

$$\underline{z} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Следствие 3.3. Эквивалентный механический импеданс меньше каждого из составляющих механических импедансов.

Следствие 3.4. При $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \dots = \underline{z}_j = \dots = \underline{z}_n = \underline{z}^*$

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}^*}{n}.$$

Следствие 3.5.

$$\lim_{\underline{z}_1 \rightarrow \infty} \underline{z} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Пусть n объектов с механическими импедансами $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n$ соединены параллельно. Эквивалентный импеданс системы – $\underline{z}$. Имеет место

Теорема 4. При параллельном соединении объектов справедлива формула

$$\underline{z} = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j.$$

Доказательство. При параллельном соединении объекты обладают единой скоростью $\dot{V}$. Для произвольного объекта в соответствии с (1) справедлива формула

$$\dot{F}_j = \underline{z}_j \dot{V}.$$

Согласно принципу суперпозиции, сила, приложенная к системе, равна

$$\dot{F} = \sum_{j=1}^n \dot{F}_j = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j \dot{V} = \dot{V} \sum_{j=1}^n \underline{z}_j = \dot{V} \underline{z}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1.

$$\frac{1}{\underline{y}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{y}_j}.$$

Следствие 4.2.

$$\underline{y} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Следствие 4.3. Эквивалентный механический адмитанс меньше каждого из составляющих механических адмитансов.

Следствие 4.4. При $\underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_j = \dots = \underline{y}_n = \underline{y}^*$

$$\underline{y} = \frac{\underline{y}^*}{n}.$$

Следствие 4.5.

$$\lim_{\underline{y}_1 \rightarrow \infty} \underline{y} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Параллельно-последовательное соединение потребителей механической мощности

Схема соединения показана на рис. 1.

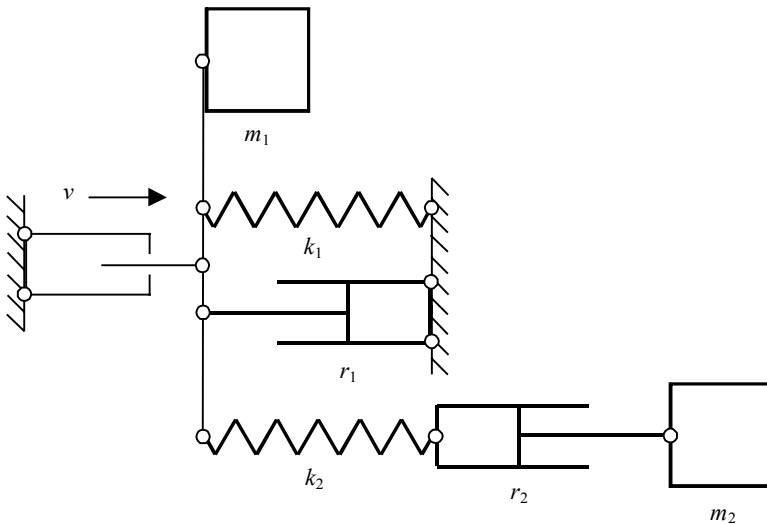


Рис. 1. Параллельно-последовательное соединение
Fig. 1. Parallel-series connection

В соответствии с теоремой 1 $\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2$.

В соответствии с теоремой 4 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$.

В соответствии с (1) $\dot{V} = \dot{F}/\underline{z}$.

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ кг·с⁻², $r = 7$ кг·с⁻¹.
Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2 = 1/(15.135 \cdot 10^{-2} e^{i19.29^\circ}) \approx 6.607 e^{-i19.29^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 12.207 e^{i55^\circ} + 6.607 e^{-i19.29^\circ} = 15.372 e^{i30.57^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V} = \dot{F}/\underline{z} = 100/(15.372 e^{i30.57^\circ}) = 6.505 e^{-i30.57^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 130.1 e^{i59.43^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 10 e^{-i90^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 65.05 e^{-i120.57^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{r1} = r_1 \dot{V} = 7 e^{i0} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 45.535 e^{-i30.57^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_2 = \underline{z}_2 \dot{V} = 6.607 e^{-i19.29^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 42.979 e^{-i49.86^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 2.149 e^{-i139.86^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{k2} = \dot{b}_{k2} \dot{F}_2 = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 4.298 e^{i40.14^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14.286 \cdot 10^{-2} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 6.14 e^{-i49.86^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Классический расчет предполагает составление и решение системы дифференциальных уравнений и поэтому несоизмеримо сложнее и объемнее по сравнению с примером 1.

Векторная диаграмма для величин из примера 1 представлена на рис. 2.

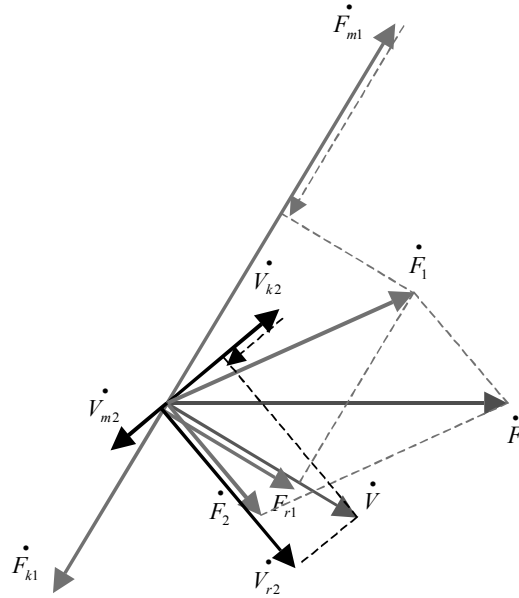


Рис. 2. Векторная диаграмма при параллельно-последовательном соединении

Fig. 2. Vector diagram for a parallel-series connection

Двойной (параллельно-последовательный) резонанс

В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей [3] можно ограничиться численным примером.

Пример 2. $k = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$. Остальные данные – из примера 1. Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = r = 7 e^{i0^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2r = 14 e^{i0^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V} = \dot{F} / \underline{z} = 100 / (14 e^{i0^\circ}) = 7.143 e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 7.143 e^{i0^\circ} = 142.857 e^{i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 7.143 e^{i0^\circ} = 142.857 e^{-i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{r1} = \dot{F}_1 = r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 7.143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} [\text{H}],$$

$$\dot{F}_2 = z_2 \dot{V} = 7e^{i0^\circ} \cdot 7.143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} [\text{H}],$$

$$\dot{V}_{m2} = \dot{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2.5e^{-i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{k2} = \dot{b}_{k2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2.5e^{i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14.286 \cdot 10^{-2} \cdot 50e^{i0^\circ} = 7.143e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рис. 3.

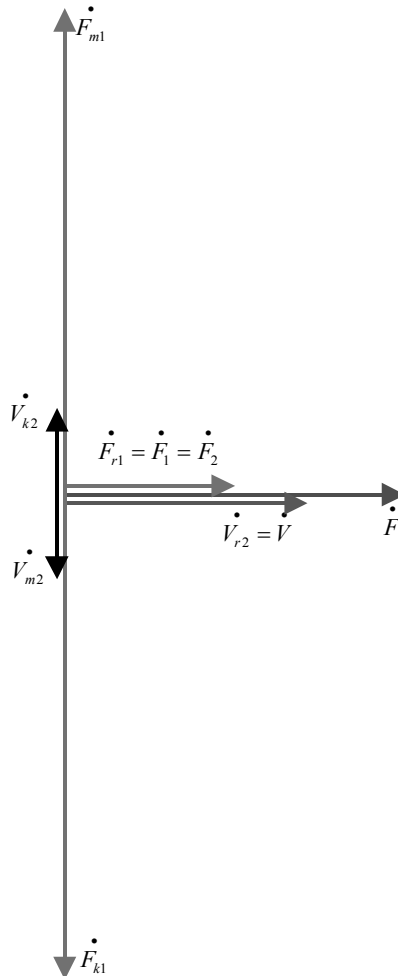


Рис. 3. Векторная диаграмма при двойном (параллельно-последовательном) резонансе
Fig. 3. Vector diagram for double (parallel-series) resonance

Последовательно-параллельное соединение потребителей механической мощности

Схема соединения показана на рис. 4.

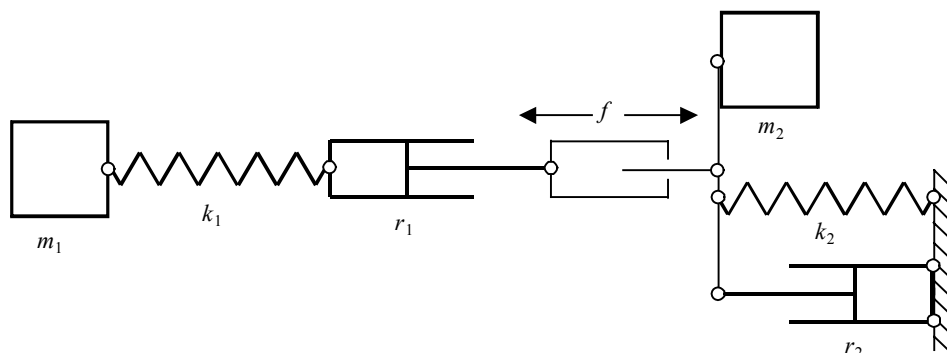


Рис. 4. Последовательно-параллельное соединение
Fig. 4. Series-parallel connection

В соответствии с теоремой 1 $\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2$.

В соответствии с теоремой 3 $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$.

В соответствии с (2) скорость штока $\dot{V} = \underline{y} \dot{F}$.

Пример 3. Для данных примера 1 найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = 1/(12.207e^{i55^\circ}) = 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}],$$

$$\begin{aligned} \underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 &= 15.135 \cdot 10^{-2} e^{i19.29^\circ} + 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = \\ &= 19.061 \cdot 10^{-2} e^{-i5.126^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}], \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 19.061 \cdot 10^{-2} e^{-i5.126^\circ} = 19.061 e^{-i5.126^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 8.192 e^{-i55^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 15.135 e^{i19.29^\circ} + 8.192 e^{-i55^\circ} = 19.061 e^{-i5.126^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}] = \dot{V}.$$

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рис. 5.

Двойной (последовательно-параллельный) резонанс

В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей можно ограничиться численным примером.

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рис. 6.

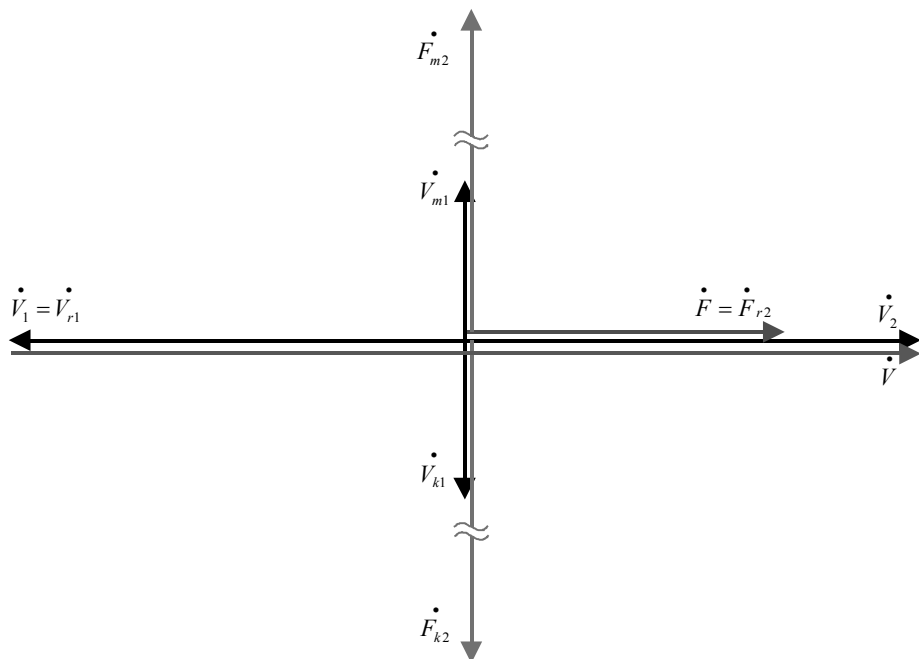


Рис. 6. Векторная диаграмма при двойном (последовательно-параллельном) резонансе
Fig. 6. Vector diagram for double (series-parallel) resonance

О характере механического импеданса

Пусть $\dot{F} = F e^{i0}$,

$$\underline{z} = r + \underline{x}_m = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = z e^{i\varphi}.$$

Тогда

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F e^{i0}}{z e^{i\varphi}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi}.$$

Пример 5. Для данных предыдущих примеров

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = \sqrt{7^2 + 20^2} e^{i \arctg \frac{20}{7}} \approx \\ &\approx 21.19 e^{i 70.71^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}], \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{21.19 e^{i 70.71^\circ}} \approx 4.719 e^{-i 70.71^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 5 представлена на рис. 7.



Рис. 7. Инертный характер

Fig. 7. Inert nature

Пусть $\underline{z} = r + \underline{x}_k = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = z e^{i\varphi}$.

Пример 6. Для данных предыдущих примеров

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = \sqrt{7^2 + 10^2} e^{i \arctg \frac{-10}{7}} \approx, \\ \approx 12.207 e^{-i55^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}]$$

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12.207 e^{-i55^\circ}} \approx 8.192 e^{i55^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 6 представлена на рис. 8.

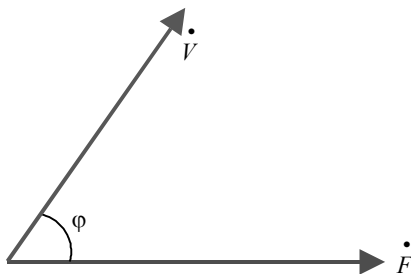


Рис. 8. Упругий характер

Fig. 8. Elastic nature

Представленные выше рассуждения можно принять в качестве иллюстрации справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. При инертном характере нагрузки скорость отстает по фазе от приложенной силы. При упругом – опережает. При резистивном – совпадает.

Замечание 5.1. Если $\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k$ и $\underline{x}_m > \underline{x}_k$, то нагрузка имеет инертный характер. Если и $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ – то упругий.

Схемное изменение характера нагрузки

Пусть нагрузка состоит из инертного тела и упругого элемента. Пусть $\sqrt{k/m} \neq \omega$. Для этих условий имеет место

Теорема 6. При изменении схемы соединения инертного тела и упругого элемента с параллельного на последовательное или наоборот характер нагрузки меняется.

Доказательство. Пусть $\underline{x}_m > \underline{x}_k$. При параллельном соединении

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

и в соответствии с замечанием 5.1. нагрузка имеет инертный характер. Фаза $i\pi/2 > 0$.

При изменении схемы соединения на последовательное

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega m - k/\omega}{km} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

В соответствии со следствием теоремы 1

$$\underline{x} = \frac{1}{\underline{b}} = \frac{km}{\omega m - k/\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Фаза $-i\pi/2 < 0$, т.е. нагрузка приобрела упругий характер.

Аналогичным образом рассматривается условие $\underline{x}_m < \underline{x}_k$.

Теорема доказана.

Заключение

Доказан ряд релевантных теорем, связывающих активные и реактивные параметры систем при последовательном и параллельном соединении потребителей механической мощности. На примере параллельно-последовательного и последовательно-параллельного соединения показаны методы расчета разветвленных механических систем с любым числом степеней свободы, основанные на использовании символического или комплексного представления вынужденных гармонических колебаний. Рассмотрены фазовые соотношения, определяющие характер нагрузки и возможность его искусственного изменения. Представлены векторные диаграммы амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени, которые дают исчерпывающее представление о взаимосвязи между этими величинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L-L-типа в режиме вынужденных колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 53–61. DOI: 10.17223/19988621/57/4.
2. Боталов А.Ю., Родионов С.П. Численное исследование влияния жидкого наполнителя на свободные колебания тела, имеющего одну степень свободы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 75–85. DOI: 10.17223/19988621/51/7.
3. Попов И.П. Антирезонанс – резонанс скоростей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т 20. № 6. С. 362–366. DOI: 10.17587/mau.20.362-366.

Popov I.P. (2021) SYMBOLIC REPRESENTATION OF FORCED OSCILLATIONS OF BRANCHED MECHANICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 118–130

DOI 10.17223/19988621/72/10

Keywords: symbolic, complex method, parallel connection, series connection, loading conditions, vector diagram.

A calculation of dynamics of a mechanical system with n degrees of freedom, including inert bodies and elastic and damping elements, involves the derivation and integration of a system of n second-order differential equations, which are reduced to a differential equation of $2n$ order. An increase in the degree of freedom of the mechanical system by one increases the order of the resulting differential equation by two. The solution of higher-order differential equations is rather cumbersome and time-consuming. Integration of equations is proposed to be replaced with rather simpler algebraic methods. A number of relevant theorems that relate both active and reactive parameters of mechanical systems in the series and parallel connection of mechanical power consumers are proved. Using parallel-series and series-parallel connections as an example, the calculation methods for branched mechanical systems with any number of degrees of freedom, based on the use of symbolic or complex representation of forced harmonic oscillations, are shown. The phase relationships determining loading conditions and a possibility of its artificial change are considered. The vector diagrams of the amplitudes of forces, velocities and their components in a complex plane at a zero time instant are presented, which give a complete and clear idea of the relationship between these quantities.

Igor' P. POPOV (High Tech Center, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popow@yandex.ru

REFERENCES

1. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyanie nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L–L-tipa v rezhime vyznuzhennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. DOI: 10.17223/19988621/57/4.
2. Botalov A.Yu., Rodionov S.P. (2018) Chislennoe issledovanie vliyaniya zhidkogo napolnitelya na svobodnye kolebaniya tela, imeyushchego odnu stepen' svobody [Numerical investigation of the effect of liquid filling on free oscillations of one-degree-of-freedom body]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 75–85. DOI: 10.17223/19988621/51/7.
3. Popov I.P. (2019) Antirezonans – rezonans skorostey [Antiresonance – velocity resonance]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 20(6). pp. 362–366. DOI: 10.17587/mau.20.362-366.

Received: June 18, 2019