ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 56

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/56/7

Ж.Н. Зенкова, Н.Р. Цыбульникова

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК ЦЕНОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕТОДА ЦЕНОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ PSM ДЛЯ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ С УЧЕТОМ СИММЕТРИИ

Рассмотрены модификации метода ценообразования PSM на случай линейной зависимости между ценовыми предпочтениями потребителей с учетом симметрии, показана асимптотическая нормальность, состоятельность оценок, найдены асимптотические дисперсии. Показано, что для ряда распределений привлечение информации о линейной зависимости и симметрии позволяет найти более точные ценовые диапазоны при плохой различимости кривых ценовой чувствительности.

Ключевые слова: метод измерения ценовой чувствительности PSM; линейная зависимость; симметрия; медиана.

В экономике существует несколько подходов к ценообразованию [1], однако большинство предприятий при назначении цены ориентировано на затраты, что не всегда позволяет обоснованно установить такую цену, которая была бы привлекательна для потребителя [2]. В [3] при исследовании около 2 500 компаний было показано, что повышение точности в назначении цены на 1% приводит к 11,1% роста прибыли компании, при этом восприятие цены потребителем гораздо важнее, чем сама цена.

Для установления оптимальной с точки зрения спроса цены в зарубежной практике очень активно используются методы ценообразования, ориентированные на спрос [4–6]. Одним из таких методов является метод PSM (Price Sensitivity Meter), предложенный Питером Ван Вестендорпом [7, 8]. Метод PSM основан на анализе потребительских предпочтений относительно цены на товар, которые высказываются представителями целевой аудитории после использования товара в течение некоторого периода времени. Асимптотические свойства классического метода PSM исследовались в работе [9], показано, что в качестве ценовых границ можно использовать медианы попарно объединенных данных о ценовых предпочтениях, доказаны состоятельность, асимптотическая несмещенность и нормальность оценок.

Заметим, что потребители, отвечая на вопросы метода, часто отталкиваются от первоначально названной цены, что приводит к возникновению зависимости в ценовых предпочтениях. Характер зависимости может быть различным. В [10] автором были предложены модификации методов ценовой чувствительности Штоцеля [11], PSM и Ван Вестендорпа на случай линейной зависимости между ценовыми предпочтениями без исследования статистических свойств новых методов. В данной работе этот пробел устраняется для метода PSM. Отдельно рассматривается случай, когда линейно зависимые данные о ценовых предпочтениях обладают свойством симметрии относительно медианы [12], получены точные формулы для искомых цен. Для каждой модификации с использованием результатов [9] показаны состоятельность, асимптотическая несмещенность и нормальность оценок. Доказано, что привлечение дополнительной информации существенно повышает точность оценивания при близком расположении кривых ценовой чувствительности, чего не позволяют достичь классические оценки, рассмотренные в [9]. Для малых выборок свойства метода исследовались с помощью имитационного моделирования, выявлена достаточно медленная сходимость дисперсий к своим асимптотическим значениям, особенно при использовании классических оценок, показано, что в ряде случаев точность модифицированных методов выше по сравнению с классическими.

В настоящей статье предложена модификация метода PSM, которая, в отличие от классического варианта [9], позволяет получить более точные значения ценовых диапазонов в ситуациях, когда участники фокус-группы дают близкие ответы на вопросы о своих ценовых предпочтениях даже при малых объемах выборок, что является большим преимуществом, так как использование метода PSM весьма затратно.

1. Метод измерения ценовой чувствительности Price Sensitivity Meter (PSM)

Согласно алгоритму метода PSM, маркетологом проводится независимый опрос N респондентов – представителей целевой аудитории, которым предлагается на протяжении некоторого периода времени пользоваться исследуемым товаром, после чего они отвечают на четыре вопроса [13]:

1. Ниже какого уровня цены p_1 товар кажется настолько дешевым, что возникают подозрения, что он некачественный или что перед вами подделка?

2. Какая цена p_2 наиболее приемлема для вас?

3. Какая цена p_3 кажется высокой, но вы все еще рассматриваете вопрос о покупке?

4. Какая цена p_4 кажется вам настолько высокой, что вопрос о покупке даже не рассматривается?

Допустим, что каждая из исследуемых цен есть случайная величина с функцией распределения $F_j(x) = P\left(p_j < x\right),\ \ j = \overline{1,4}$. По каждой выборке P_{Nj}, $j = \overline{1,4}$, строится эмпирическая функция распределения [14] по следующей формуле:

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{I}_{[0,x)}\left(P_{kj}\right), \tag{1}$$

где $\mathrm{I}_{[0,x)}(y)$ – индикаторная функция. Для первой и третьей выборок (j = 1, 3) строятся оценки функции выживания [15]

$$\hat{S}_j(x) = 1 - \hat{F}_j(x), \tag{2}$$

при этом функции $\hat{S}_1(x),\ \hat{F}_2(x),\ \hat{S}_3(x),\ \hat{F}_4(x)$ обычно сглаживаются и называются кривыми ценовой чувствительности (в оригинале – Price Sensitivity Curve). Абсциссы их пересечений помогают найти следующие ценовые значения:

$P_{\min} = \hat{x}^{(12)}$ – минимально возможная цена, или точка предельной дешевизны, – абсцисса пересечения первой и второй кривых. Назначать цену ниже $P_{\min}$ нельзя, так как объемы продаж при этом будут слишком малы из-за того, что основная масса целевых потребителей не поверит, что товар достаточно качественный или оригинальный (не является подделкой), и это приведет к прямым убыткам;

$P_{\text{безр}} = \hat{x}^{(23)}$ – ожидаемая цена, или точка безразличия (в англоязычных источниках обозначается как IDP – Indifference Price Point), – абсцисса пересечения второй и третьей кривых. Большинство потребителей не воспринимают такую цену ни слишком дорогой, ни слишком дешевой, она «вызывает безразличие»;

$P_{\text{опт}} = \hat{x}^{(14)}$ – оптимальная цена (OPP – Optimum Price Point, или Penetration Price) – абсцисса пересечения первой и четвертой кривых. В этой точке самое меньшее число потребителей отказываются от покупки товара из-за слишком высокой цены, эту цену считают «ценой проникновения на рынок»;

$P_{\max} = \hat{x}^{(34)}$ – максимально возможная цена, или точка предельной дороговизны, – абсцисса пересечения третьей и четвертой кривых. Если в погоне за прибылью назначить цену выше $P_{\max}$, то можно потерять большинство целевых потребителей, которые просто не в состоянии купить товар по слишком высокой для них цене. Данная стратегия может привести к существенным убыткам.

Заметим, что если в результате опросов цена безразличия $P_{\text{безр}}$ будет меньше, чем оптимальная $P_{\text{опт}}$, то это означает, что в исследовании принимали участие достаточно много представителей нецелевой аудитории, которые не разбираются в данном товаре, не имеют заинтересованности в нем и не могут адекватно воспринимать его ценность, поэтому они дают несправедливые, слишком заниженные или завышенные значения цен с большим разбросом.

В работе [9] были получены следующие формулы для расчета значений цен, определяемых методом PSM для случая, когда метод базируется на эмпирических функциях распределения без сглаживания: для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$:

$$\hat{x}^{(ij)} = \begin{cases} \max\left\{x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x)\right\} \\ x : \hat{S}_i(x+0) \le \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x). \end{cases} \tag{3}$$

Статистические свойства оценок (3) исследовались с использованием функции распределения $G_{ij}(x) = \left(F_i(x) + F_j(x)\right)/2$, так как искомые цены фактически являются решениями уравнений вида

$$F_j(x) = 1 - F_i(x) \tag{4}$$

и являются медианами функции распределения $G_{ij}(x)$. Было показано, что расчет оценок (3) сводится к поиску $\hat{x}^{(ij)}_{(N+1)}$ – $(N + 1)$-й порядковой статистики объединенной выборки $P_{Ni} \cup P_{Nj}$ объема $2N$, оценки являются состоятельными, асимптотически несмещенными и нормально распределенными с асимптотической, нормированной на N дисперсией

$$\nu_{ij}^2 = \lim_{N\to\infty} N \operatorname{var}\left\{\hat{x}^{(ij)}_{(N+1)}\right\} = F_{ij}\left(x_{ij}, x_{ij}\right) \Big/ \left(2 g_{ij}^2\left(x_{ij}\right)\right), \tag{5}$$

где для $j = 2, 4$ и $i = 1, 3$ $F_{ij}(\cdot,\cdot)$ – совместная функция распределения i-й и j-й цены, $g_{ij}(x) = \left(f_i(x) + f_j(x)\right)/2$ – плотность функции распределения $G_{ij}(x)$, при этом предполагалось, что для $m = \overline{1,4}$ существуют $f_m(x)$ – плотности функций распределения $F_m(x)$ и $g_m\left(x_{ij}\right) \neq 0$.

2. Модификация метода PSM на случай линейной зависимости

Рассмотрим случай, когда между ценами имеет место линейная зависимость вида

$$p_i = a_i + b_i p_1, \tag{6}$$

где для $i = \overline{1,4}$ коэффициенты a_i и b_i известны, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. В результате можно получить следующее равенство:

$$F_i(x) = F_1\left(\left(x - a_i\right)/b_i\right), \tag{7}$$

так как $F_i(x) = P\left(p_i < x\right) = P\left(a_i + b_i \cdot p_1 < x\right) = P\left(p_1 < \left(x - a_i\right)/b_i\right) = F_1\left(\left(x - a_i\right)/b_i\right)$, следовательно, для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ (4) можно представить в виде:

$$F_1\left(\left(x - a_j\right)/b_j\right) = 1 - F_1\left(\left(x - a_i\right)/b_i\right),$$

аналогично (3) решение этого уравнения определяется как $\hat{x}^{(ij)*}_{(N+1)}$ – $(N + 1)$-я порядковая статистика, построенная по объединенной выборке объема $2N$, где каждая выборка есть линейная комбинация первой выборки: $\left\{a_i + b_i \cdot P_{11}, a_i + b_i \cdot P_{21}, ..., a_i + b_i \cdot P_{N1}, a_j + b_j \cdot P_{11}, a_j + b_j \cdot P_{21}, ..., a_j + b_j \cdot P_{N1}\right\}$. Здесь, как и для (3), $\hat{x}^{(ij)*}_{(N+1)}$ является состоятельной, асимптотически несмещенной и нормально распределенной оценкой, нормированная асимптотическая дисперсия которой определяется согласно теореме.

Теорема. Асимптотическая нормированная на N дисперсия ценовых значений, полученных методом измерения ценовой чувствительности PSM, в случае линейной зависимости между потребительскими предпочтениями в отношении цен вычисляется по следующей формуле: для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$

$$\nu_{ij}^{*2} = \lim_{N\to\infty} N \cdot \mathrm{var}\left\{\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}\right\} = 2\left(b_i b_j\right)^2 F_1\left(\min\left(\frac{x_{ij}-a_i}{b_i}, \frac{x_{ij}-a_j}{b_j}\right)\right) \Big/ \left(b_j f_1\left(\frac{x_{ij}-a_i}{b_i}\right) + b_i f_1\left(\frac{x_{ij}-a_j}{b_j}\right)\right)^2. \quad (8)$$

Доказательство. Согласно определению совместной функции распределения двух случайных величин $F_{ij}(x,y) = P\left(p_i < x, p_j < y\right)$, воспользуемся свойством (6), получим

$$F_{ij}(x,y) = P\left(a_i + b_i \cdot x_1 < x, a_j + b_j \cdot x_1 < y\right) = P\left(x_1 < \frac{x-a_i}{b_i}, x_1 < \frac{y-a_j}{b_j}\right) = F_1\left(\min\left(\frac{x-a_i}{b_i}, \frac{y-a_j}{b_j}\right)\right),$$

следовательно,

$$F_{ij}(x,y) = F_1\left(\min\left((x-a_i)/b_i, (y-a_j)/b_j\right)\right). \quad (9)$$

Рассмотрим плотность $g_{ij}(x) = \left(f_i(x) + f_j(x)\right)/2$. В силу (7) $f_i(x) = f_1\left((x-a_i)/b_i\right)/b_i$, тогда

$$g_{ij}(x_{ij}) = \left(b_j f_1\left((x_{ij}-a_i)/b_i\right) + b_i f_1\left((x_{ij}-a_j)/b_j\right)\right)/\left(2b_i b_j\right). \quad (10)$$

В заключение, подставив (9) и (10) в формулу (5), получим (8). Что и требовалось доказать.

3. Модификация метода PSM при линейной зависимости и симметрии

Пусть в условиях (6) функция распределения $F_1(x)$ является непрерывной и обладает свойством симметрии относительно медианы α [16]:

$$F_1(x) = 1 - F_1(2\alpha - x),$$

тогда уравнение (4) может быть представлено в следующем виде:

$$F_1\left(\left(x-a_j\right)/b_j\right) = 1 - F_1\left(2\alpha - \left(x-a_j\right)/b_j\right) = 1 - F_1\left((x-a_i)/b_i\right),$$

т.е. $F_1\left((x-a_i)/b_i\right) = F_1\left(2\alpha - \left(x-a_j\right)/b_j\right)$, следовательно, $(x-a_i)/b_i = (F_1)^{-1}\left(F_1\left(2\alpha - \left(x-a_j\right)/b_j\right)\right)$, где i = 1, 3 и j = 2, 4, $(F_1)^{-1}(\cdot)$ – обратная к $F_1(x)$ функция. Тогда $\left(x-a_i\right)/b_i = 2\alpha - \left(x-a_j\right)/b_j$, в итоге решение уравнения (4) можно найти в явном виде по следующей формуле:

$$x_{ij}^{*S} = \frac{2\alpha b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j}{b_i + b_j}.$$

Таким образом, при наличии линейной зависимости и симметрии задача сводится к оцениванию α – медианы функции распределения $F_1(x)$, например с помощью выборочной медианы

$$M_1 = med\left(P_{11}, P_{21}, ..., P_{N1}\right) = \begin{cases} P_{(k)1}, & N = 2k-1, \\ 0{,}5\left(P_{(k)1} + P_{(k+1)1}\right), & N = 2k, \end{cases} \quad (11)$$

и ее линейному преобразованию относительно известных коэффициентов. Здесь $P_{(k)1}$ – k-я порядковая статистика выборки P_{N1}. Свойства выборочной медианы (11) и порядковых статистик хорошо изучены и изложены в [17], их распределения не нормальны и из-за громоздкости формул здесь не приводятся. В качестве альтернативы рассмотрим оценку квантиля уровня 0,5

$$\hat{\alpha} = P_{(N/2)1} = \inf\left\{x : \hat{F}_1(x) \ge 0{,}5\right\},$$

которая является асимптотически несмещенной и нормально распределенной [17] с асимптотической, нормированной на N дисперсией

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \mathrm{var}\left\{\hat{\alpha}\right\} = 1/4 f_1^2\left(F_1^{-1}(0{,}5)\right) = 1/4 f_1^2(\alpha).$$

Заметим, что $\hat{\alpha}$ есть $\left(\left[N/2\right]+1\right)$-я порядковая статистика выборки P_{N1}. Таким образом, в случае линейной зависимости между ценовыми предпочтениями и симметричности их функций распределения оценку итоговых значений цен рекомендуется рассчитывать по следующей формуле:

$$\hat{x}_{ij}^{*} = \left(2\hat{\alpha} b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j\right) \Big/ \left(b_i + b_j\right), \tag{12}$$

при этом оценка $\hat{x}_{ij}^{*}$ также является асимптотически несмещенной и нормально распределенной с асимптотической, нормированной на N дисперсией, которая определяется формулой

$$\nu_{ij}^{s*2} = \lim_{N\to\infty} N \operatorname{var}\left\{\hat{x}_{ij}^{*}\right\} = b_i^2 b_j^2 \Big/ \left(\left(b_i + b_j\right)^2 f_1^2(\alpha)\right). \tag{13}$$

На рис. 1 приведены графики изменения ν_{ij}^2, ν_{ij}^{*2}, ν_{ij}^{s*2} в зависимости от изменения параметров a_m, $m=\overline{1,4}$. Рассматривались варианты, когда параметры наклона фиксированы при фиксированном a_1 и изменяющихся параметрах сдвига a_2, a_3, a_4 для равномерного случая, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$. Очевидно, что дополнительная информация о симметрии позволила существенно повысить точность оценивания, когда кривые ценовой чувствительности очень близки и плохо различимы. Данный факт наблюдался и для нормальных кривых ценовой чувствительности. При слишком большой удаленности кривых друг от друга пересечения оказываются фактически на границах областей возможных значений цен, что сводит ошибки к минимуму, так как при этом можно сказать, что теряется случайный характер исходных данных, что, скорее всего, вызвано тем, что в исследовании принимали участие представители нецелевой аудитории или данные были сфальсифицированы.

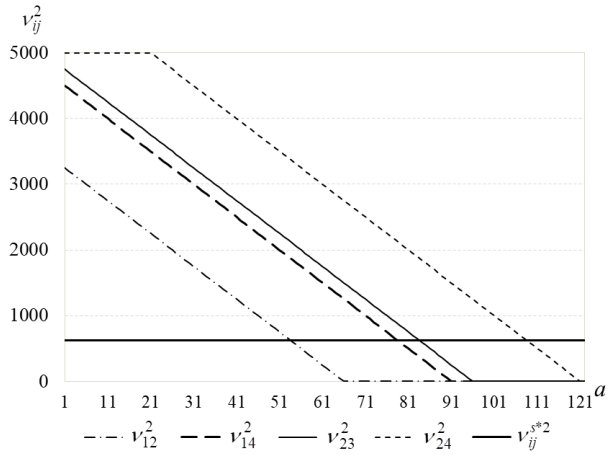

Рис. 1. Зависимость ν_{ij}^2 и ν_{ij}^{s*2} от b_k, $k=\overline{2,4}$, при фиксированных a_m, $m=\overline{1,4}$, для $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

Fig. 1. Dependence of ν_{ij}^2 and ν_{ij}^{s*2} on parameters b_k, $k=\overline{2,4}$, where a_m, $m=\overline{1,4}$, are fixed, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

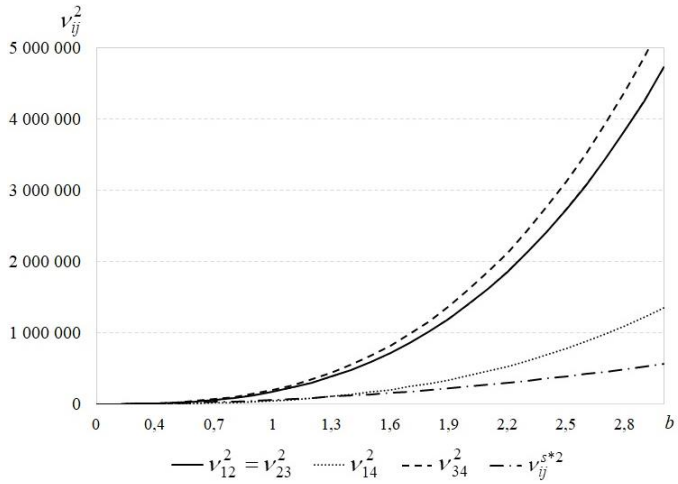

Рис. 2. Зависимость ν_{ij}^2 и ν_{ij}^{s*2} от b_k, $k=\overline{2,4}$, при фиксированных a_m, $m=\overline{1,4}$, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

Fig. 2. Dependence of ν_{ij}^2 and ν_{ij}^{s*2} on parameters b_k, $k=\overline{2,4}$, where a_m, $m=\overline{1,4}$, are fixed, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

На рис. 2 приведены графики изменения ν_{ij}^2, ν_{ij}^{*2}, ν_{ij}^{s*2} в зависимости от изменения параметров b_k, $k = \overline{2,4}$. Рассматривались варианты, когда параметры сдвига фиксированы и $b_1 = 1$, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$. Очевидно, что дополнительная информация позволяет лучше оценить ценовые диапазоны, когда по отношению к первой кривой остальные кривые ценовой чувствительности имеют более высокое значение коэффициента наклона, что соответствует случаю, когда потенциальные потребители дают весьма близкие друг к другу ответы на вопросы анкеты. Аналогично предыдущему случаю, этот факт наблюдался и для нормальных кривых ценовой чувствительности.

4. Исследование с помощью имитационного моделирования статистических свойств модифицированных оценок в случае малых выборок

Для i = 1, 3 и j = 2, 4 статистические свойства оценок $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)}$, $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}$, $\hat{x}_{ij}^{S*}$, $MED_{ij}^{*S} = \left(2M_1 b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j\right) \Big/ \left(b_i + b_j\right)$, а также MED_{ij} – выборочной медианы объединенной выборки $P_{Ni} \cup P_{Nj}$ – на случай малых выборок, изучались и сравнивались с помощью имитационного моделирования [18] с параметром моделирования M = 50 000 (количество значений статистик для каждого способа оценивания, которые позволяют получить различные статистические характеристики оценок, например их математическое ожидание и дисперсию).

Исследовались случаи равномерного и нормального распределений ценовых предпочтений. Для равномерного случая рассматривались различные параметры, притом оценки продемонстрировали схожесть поведения, здесь приведены результаты для $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$, $F_2(x) = R_{(5,105)}(x)$, $F_3(x) = R_{(7,107)}(x)$, $F_4(x) = R_{(15,115)}(x)$. В нормальном случае рассматривались $F_1(x) = N_{(100,25)}(x)$, $F_2(x) = N_{(105,25)}(x)$, $F_3(x) = N_{(107,25)}(x)$, $F_4(x) = N_{(115,25)}(x)$.

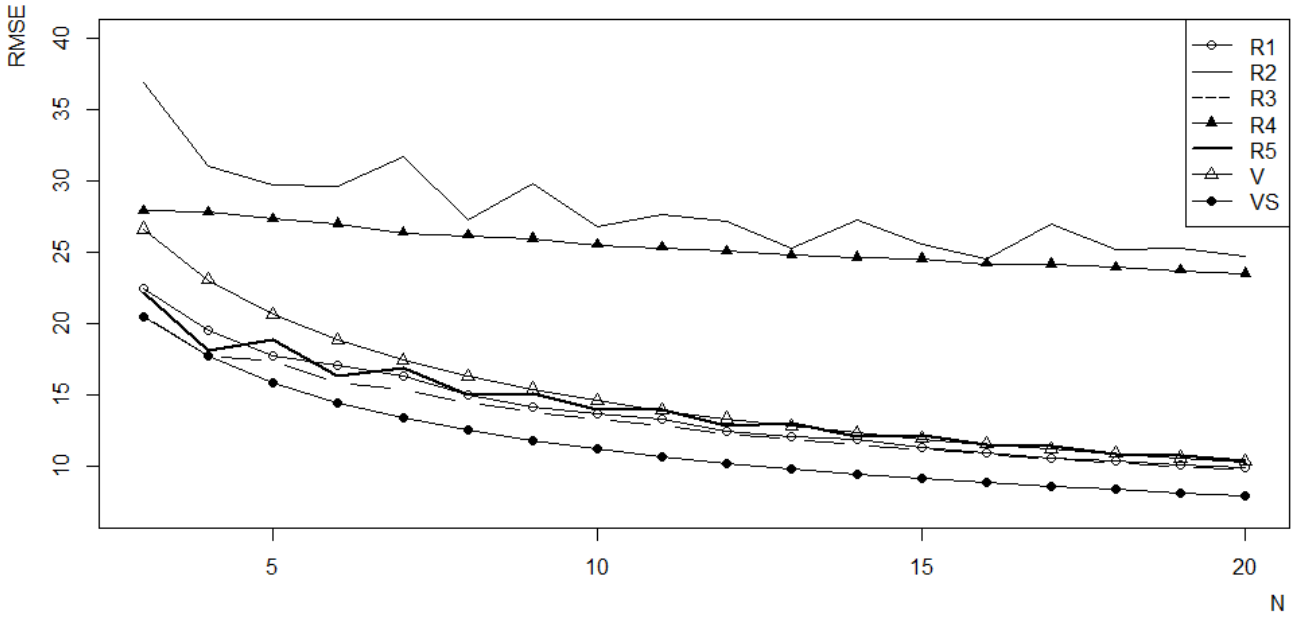

Рис. 3. Рис. 3. Зависимости *RSME* от *N* для равномерного случая (R1 означает $RMSE\left(\hat{x}_{(N+1)}^{(14)*}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R2 – $RMSE\left(\hat{x}^{(14)}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R3 – $RMSE\left(MED_{14}^{*S}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R4 – $RMSE\left(MED_{14}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R5 – $RMSE\left(\hat{x}_{ij}^{S*}\right) \Big/ \sqrt{N}$, V – $\sqrt{\nu_{14}^2} \Big/ \sqrt{N}$, VS – $\sqrt{\nu_{14}^{s*2}} \Big/ \sqrt{N}$)

Fig. 3. Dependences *RSME* on *N* for uniform case (R1 means $RMSE\left(\hat{x}_{(N+1)}^{(14)*}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R2 – $RMSE\left(\hat{x}^{(14)}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R3 – $RMSE\left(MED_{14}^{*S}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R4 – $RMSE\left(MED_{14}\right) \Big/ \sqrt{N}$, R5 – $RMSE\left(\hat{x}_{ij}^{S*}\right) \Big/ \sqrt{N}$, V – $\sqrt{\nu_{14}^2} \Big/ \sqrt{N}$, VS – $\sqrt{\nu_{14}^{s*2}} \Big/ \sqrt{N}$)

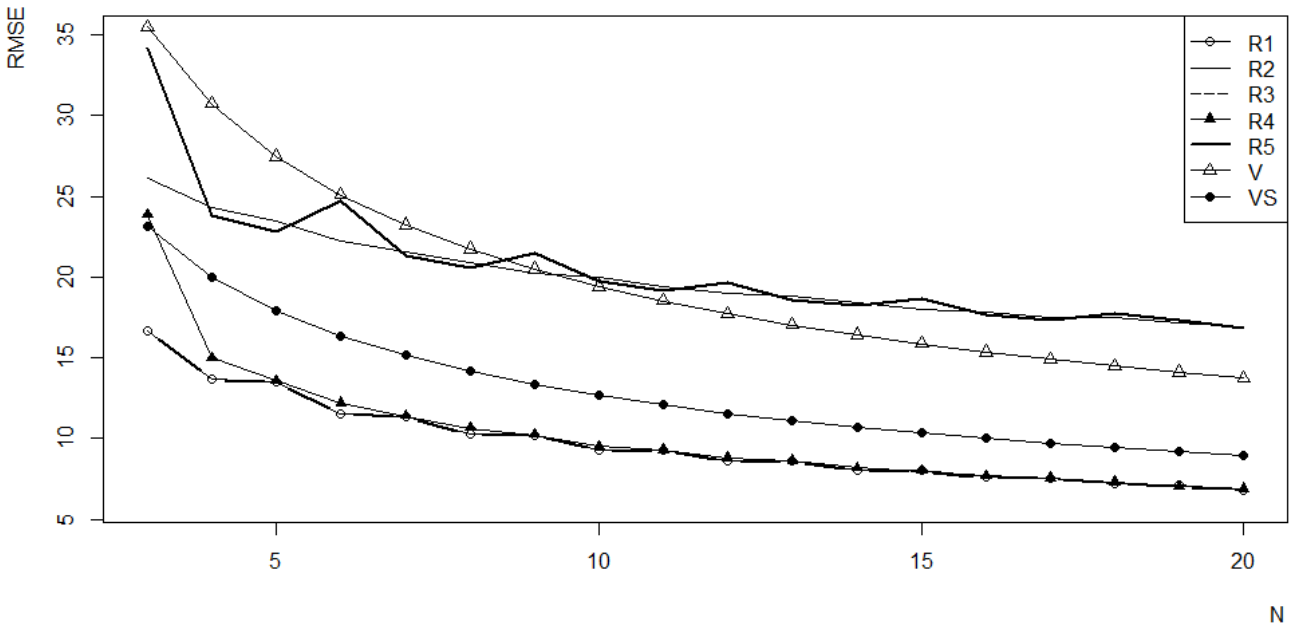

Рис. 4. Зависимости *RSME* от N для нормального случая (R1 означает $RMSE\left(\hat{x}^{(23)*}_{(N+1)}\right)/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE\left(\hat{x}^{(23)}\right)/\sqrt{N}$, R3 – $RMSE\left(MED^{*S}_{23}\right)/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE\left(MED_{23}\right)/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE\left(\hat{x}^{S*}_{ij}\right)/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v^{2}_{23}}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v^{s*2}_{23}}/\sqrt{N}$)

Fig. 4. Dependences *RSME* on *N* for normal case (R1 means $RMSE\left(\hat{x}^{(23)*}_{(N+1)}\right)/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE\left(\hat{x}^{(23)}\right)/\sqrt{N}$, R3 – $RMSE\left(MED^{*S}_{23}\right)/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE\left(MED_{23}\right)/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE\left(\hat{x}^{S*}_{ij}\right)/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v^{2}_{23}}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v^{s*2}_{23}}/\sqrt{N}$)

Исследовалось поведение $RMSE\left(\hat{\theta}\right)/\sqrt{N}$, где *RMSE* – квадратный корень из среднеквадратической ошибки (root mean squared error) $RMSE\left(\hat{\theta}\right)=\sqrt{\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^{2}}$, $\hat{\theta}$ – некоторая оценка истинного значения θ исследуемой статистической характеристики, E – обозначение математического ожидания. Итоговые результаты отображены на рис. 3 и 4. Из рисунков видно, что привлечение дополнительной информации позволило снизить среднеквадратическую ошибку оценок ценовых значений методом PSM для малых объемов наблюдений, несмотря на недостаточно большую скорость сходимости к теоретическим значениям асимптотической, нормированной на *N* дисперсии.

Заключение

В работе показана асимптотическая нормальность и состоятельность оценок ценовых значений метода PSM, модифицированных с учетом линейной зависимости между ценовыми предпочтениями потребителей, а также симметрии их функций распределения относительно медианы. Статистические свойства модифицированных оценок на случай малых выборок исследованы с помощью имитационного моделирования, выявлена слабая скорость сходимости дисперсии к ее асимптотическому значению. Показано, что учет линейной зависимости и симметрии позволяет получить максимальный выигрыш в точности оценивания при слишком близких значениях индивидуальных ценовых предпочтений потребителей, а также при схожести ответов на вопросы разных респондентов, что является весьма ценным с практической точки зрения.

В дальнейшем планируется более глубокое исследование точности оценок на случай, когда коэффициенты линейной зависимости неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bouter E.-J. Pricing: The Third Business Skill: Principles of Price Management. First Price BV. 2013. 226 p.
2. Yang J.Y. The Pricing Puzzle: How to Understand and Create Impactful Pricing for Your Products Paperback. Springer, 2020. 188 p.

3. Marn M.V., Rosiello R.L. Managing Price, Gaining Profit // Harvard Business Review. 1992. V. 5. P. 84–94.
4. Haugom E. Essentials of Pricing Analytics. Routledge, 2020. 290 p. DOI: 10.4324/9780429345319
5. Paczkowski W.R. Pricing Analytics: Models and Advanced Quantitative Techniques for Product Pricing. Routledge, 2018. 338 p. DOI: 10.4324/9781315178349
6. Коржов М.М., Кузин Д.А. Сравнительный анализ и практическое применение методов ценообразования с ориентацией на спрос // Новости маркетинга. 2007. № 4. С. 9–17.
7. Westendorp P.H. NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices // Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR). Amsterdam, 1976. P. 139–167.
8. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 64–69.
9. Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н., Зенков А.Г. Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 30–40. DOI: 10.17223/19988605/47/4
10. Цыбульникова Н.Р. Расчет цены спроса на программный продукт методом PSM для зависимых наблюдений // Материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 23–25 мая 2019 г. Томск, 2019. С. 136–142.
11. Stoetzel J. Psychological / Sociological Aspects of Price / B. Taylor, G. Wills (eds.). Pricing Research, Princeton, NJ : Brandon Systems Press, 1970. P. 70–74.
12. Зенкова Ж.Н. Об $S_P^{\vec{C}}$ -неравноплечно *k*-го порядка симметричных функциях распределения // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. Минск, 15–19 сентября 2008 г. С. 108–115.
13. Зенкова Ж.Н., Бараксанов Д.Н. Применение метода PSM при определении рыночной цены нового программного продукта // Высокие технологии, исследования, образование, финансы : сб. ст. XVI междунар. науч.-практ. конф. «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике». 5–6 декабря 2013 г. Санкт-Петербург, Россия. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. С. 17–21.
14. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск : Наука, 1997. 772 с.
15. Kleinbaum D.G., Klein M. Survival analysis: A Self-learning text. 3rd ed. Springer, 2012. 715 p.
16. Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н. Критерии согласия Колмогорова для симметричных распределений // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 265–269.
17. Шуленин В.П. Математическая статистика : учебник. Томск : НТЛ, 2012. Ч. 2: Непараметрическая статистика. 388 с.
18. Metropolis N. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. V. 44 (247). P. 335–341. DOI: 10.2307/2280232

Поступила в редакцию 10 февраля 2021 г.

Zenkova Z.N., Tsybulnikova N.R. (2021) STATISTICAL PROPERTIES OF PRICE SENSITIVITY METER RESULTS FOR LINEAR RELATIONSHIP BETWEEN OBSERVATIONS WITH SYMMETRY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 59–67

DOI: 10.17223/19988605/56/7

Price Sensitivity Meter (PSM) algorithm is applied in marketing to estimate target audience preferred prices, especially for new goods. It is based on marketing survey of *N* consumers' price preferences. The survey forms independent sample $\left(P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, P_{k4}\right)$, $k=\overline{1,N}$, where for the *k*-th consumer P_{k1} is minimal acceptable, P_{k2} is bargain, P_{k3} is high but yet acceptable, P_{k4} is too high prices. For $j=\overline{1,4}$ the empirical distribution functions (edf) $\hat{F}_j(x)=\sum_{k=1}^{N} \mathrm{I}_{[0,x)}\left(X_{kj}\right)\big/N$ are considered, for $i=1,3$: $\hat{S}_i(x)=1-\hat{F}_i(x)$. The final prices are found as the abscissas of $\hat{F}_j(x)$, $j=2,4$ and $\hat{S}_i(x)$, $i=1,3$, intersections as $\hat{x}^{(ij)}$ is the medians' estimators of cdf $G_{ij}(x)=\left(F_i(x)+F_j(x)\right)\big/2$. In the paper the case of linear relationships between consumers' price preferences $p_i=a_i+b_i p_1$, $i=\overline{1,4}$, a_i and b_i are known, $a_1=0$, $b_1=1$, are considered. The final prices estimators $\hat{x}^{(ij)*}_{(N+1)}$ are $(N+1)$-th ordered statistics of united samples $\left\{a_i+b_i\cdot P_{11},..,a_i+b_i\cdot P_{N1}, a_j+b_j\cdot P_{11},...,a_j+b_j\cdot P_{N1}\right\}$, $i=1,3$, $j=2,4$, they are consistent, asymptotically unbiased and normally distributed with variance

$$\nu_{ij}^2=2F_1\left(\min\left(\frac{x_{ij}-a_i}{b_i},\frac{x_{ij}-a_j}{b_j}\right)\right)\Bigg/\left(f_1\left(\frac{x_{ij}-a_i}{b_i}\right)+f_1\left(\frac{x_{ij}-a_j}{b_j}\right)\right)^2,$$

where $f_1(x)$ is the density function of cdf $F_1(x)$, $f_1\left(\frac{x_{ij}-a_i}{b_i}\right)\neq 0$, $f_1\left(\frac{x_{ij}-a_j}{b_j}\right)\neq 0$.

If $F_1(x) = 1 - F_1(2\alpha - x)$ is symmetric about known median α, then prices can be estimated as $\hat{x}_{ij}^* = \left(2\hat{\alpha}b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j\right) \Big/ \left(b_i + b_j\right)$, where $i = 1,3$, $j = 2,4$, $\hat{\alpha}$ is $\left(\left[N/2\right]+1\right)$-th ordered statistic of the sample P_{N1}, $\hat{x}_{ij}^*$, $i = 1,3$, $j = 2,4$, are consistent, asymptotically unbiased and normally distributed with variance

$$\nu_{ij}^{s*2} = b_i^2 b_j^2 \Big/ \left(\left(b_i + b_j\right)^2 f_1^2(\alpha)\right).$$

It was found that use of all this additional information more valuable in the case when the price sensitivity curves are very close to each other or when the participants give very close answers on the same questions. Involving symmetry and linear dependence between prices' preferences help to find more precise estimators of PSM-prices.

Keywords: price sensitivity meter (PSM); linear relationship; symmetry; median.

ZENKOVA Zhanna Nikolaevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Department of System Analysis and Mathematical Modeling, Tomsk, Russia; Senior Researcher, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russian Federation).
E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

TSYBULNIKOVA Nina Romanovna (Post-graduate Student, Tomsk State University, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Department of System Analysis and Mathematical Modeling, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tsybulnikova94@gmail.com

REFERENCES

1. Bouter, E.-J. (2013) *Pricing: The Third Business Skill: Principles of Price Management.* First Price BV.
2. Yang, J.Y. (2020) *The Pricing Puzzle: How to Understand and Create Impactful Pricing for Your Products Paperback.* Springer.
3. Marn, M.V. & Rosiello, R.L. (1992) Managing Price, Gaining Profit. *Harvard Business Review.* 5. pp. 84–94.
4. Haugom, E. (2020) *Essentials of Pricing Analytics.* Routledge. DOI: 10.4324/9780429345319
5. Paczkowski, W.R. (2018) *Pricing Analytics: Models and Advanced Quantitative Techniques for Product Pricing.* Routledge. DOI: 10.4324/9781315178349.
6. Korzhov, M.M. & Kuzin, D.A. (2007) Sravnitel'nyy analiz i prakticheskoe primenenie metodov tsenoobrazovaniya s orientatsiey na spros [Comparative analysis and practical application of demand-driven pricing methods]. *Novosti marketinga*. 4. pp. 9–17.
7. Westendorp, P.H. (1976) NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices. *Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR*), Amsterdam. pp. 139–167.
8. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaia, I.V. (2013) Nonparametric Turnbull estimator for interval-censored data in the marketing research of the demand of bio-energy drinks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 64–69.
9. Dmitriev, Yu.G., Zenkova, Z.N., & Zenkov, A.G. (2019) Statistical properties of price sensitivity meter results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988605/47/4
10. Tsybulnikova, N.R. (2019) [Calculation of the demand price for a software product using the PSM method for dependent observations]. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support of Information, Technical, and Economic Systems]. Proc. of the Seventh International Youth Conference. Tomsk, May 23–25, 2019. pp. 136–142.
11. Stoetzel, J. (1970) Psychological/Sociological Aspects of Price. In: Taylor, B. & Wills, G. (eds) *Pricing Research*. Princeton, NJ: Brandon Systems Press. pp. 70–74.
12. Zenkova, Z.N. (2008) [About $S_P^{\vec{C}}$-unequal-shoulder *k*-th order symmetry of cumulative distribution]. *Teoriya veroyatnostey, slu-chaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Theory of probability, random processes, mathematical statistics and applications]. Proc. of the International Conference. Minsk, September 15–19, 2008. pp. 108–115.
13. Zenkova, Z.N. & Baraksanov, D.N. (2013) [Method PSM in the new software pricing]. In: Kudinov, A.P. (ed.) *Vysokie tekhnologii, issledovaniya, obrazovanie, finansy* [High technologies, research, education, finance]. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic. University. pp. 17–21.
14. Brovkov, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Novosibirsk: Nauka.
15. Kleinbaum, D.G. & Klein, M. (2012) *Survival Analysis: A Self-learning Text.* 3rd ed. Springer.
16. Dmitriev, Yu.G. & Zenkova, Z.N. (2003) Kolmogorov goodness-of-fit test for symmetric distributions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 6. pp. 265–269.
17. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Tomsk: NTL.
18. Metropolis, N. (1949) The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*. 44(247). pp. 335–341. DOI: 10.2307/2280232