

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/56/8

А.В. Кеба, Л.А. Нежелская

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях частичной наблюдаемости (непродлевающееся мертвое время фиксированной длительности). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Формулируется алгоритм оптимального оценивания состояний. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты расчетов оценок состояний и их анализ.

Ключевые слова: обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний; непродлевающееся мертвое время; оптимальное оценивание состояний; апостериорные вероятности; критерий максимума апостериорной вероятности.

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий (Markovian Arrival Process) с n состояниями, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий [1–3] и представляющий собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий. Интенсивность исследуемого потока есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–6].

При анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат моменты времени наступления событий в потоке: оценивание состояний потока событий [7–9]; оценивание параметров потока [10, 11]. При решении этих задач следует учитывать возможные искажающие факторы, существенно влияющие на качество оценивания. Одним из таких факторов является мертвое время регистрирующих приборов [12–14], порождаемое каждым зарегистрированным событием: последующие события исходного потока, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны для наблюдения. Такой эффект характерен для большинства реальных систем. Предполагается, что этот период ненаблюдаемости потока имеет фиксированную длительность (непродлевающееся мертвое время) [15].

В данной работе осуществляется исследование обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности (события, наступившие в период ненаблюдаемости, не вызывают продления периода мертвого времени). Находится явный вид выражений для апостериорных вероятностей состояний обобщенного МАР-потока событий, представляющих собой наиболее полную характеристику состояний потока, на интервалах ненаблюдаемости потока. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний, согласно которому решение о состоянии выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, что обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения. Приводятся численные результаты оптимального оценивания состояний исследуемого потока. Данная статья является непосредственным развитием работ [16, 17].

1. Постановка задачи

Исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся режиме. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изу-

чаемого потока представляет собой кусочно-постоянный ненаблюдаемый процесс с n состояниями: S_1, \dots, S_n . Полагается, что при $\lambda(t) = \lambda_i$ имеет место i -е состояние (S_i), $i = \overline{1, n}$, процесса $\lambda(t)$. При этом $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$.

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i – является экспоненциальной: $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. В момент окончания состояния S_i процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ с наступлением события потока или с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ без наступления события потока, $i, j = \overline{1, n}$. Отметим, что для введенных вероятностей справедливо $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Введение вероятности $P_0(\lambda_j | \lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

Утверждение. Для обобщенного МАР-потока событий с n состояниями процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [18] процесса $\lambda(t)$ имеет вид $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|$, где

$$\mathbf{D}_0 = \left\| \begin{array}{cccc} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n | \lambda_n)) \end{array} \right\|_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n | \lambda_n) \end{array} \right\|_{n \times n}.$$

Каждое зарегистрированное событие потока создает период ненаблюдаемости фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока не наблюдаются (теряются); кроме того, события, наступившие в течение периода мертвого времени, не вызывают его продления (непродлеваемое мертвое время). Первое наступившее после периода мертвого времени событие потока снова создает период мертвого времени длительности T и т.д.

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и наблюдаемого потока, где λ_i – значение процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i = \overline{1, n}$; штриховкой обозначены периоды мертвого времени; события обобщенного МАР-потока, недоступные наблюдению, отмечены черными кружками; t_1, t_2, \dots – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

Задача исследования состоит в нахождении явного вида апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = w(\lambda_i | t)$ того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, при условии, что известна реализация моментов t_1, \dots, t_m наступления событий наблюдаемого потока на интервале (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдения, t – момент окончания наблюдения, m – количество наблюденных событий на интервале (t_0, t) . Так как рассматривается установившийся режим функционирования потока, то переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) пренебрегаем. Тогда без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$.

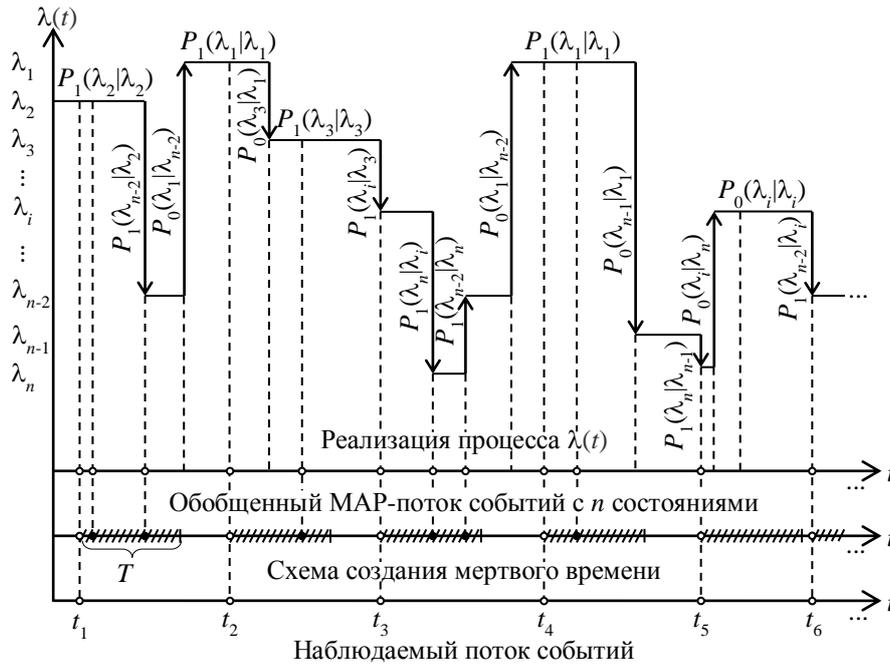


Рис. 1. Реализация обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени длительности T
 Fig. 1. Implementation of Generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time of duration T

Оптимальное оценивание состояния процесса $\lambda(t)$ в смысле минимума полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения [19, 20] осуществляется по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в произвольный момент времени t : если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

2. Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности в условиях непродлевающегося мертвого времени

Рассмотрим интервал времени (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между двумя соседними событиями наблюдаемого потока. Момент вынесения решения t о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , длительность которого является случайной величиной в силу того, что события в наблюдаемом потоке наступают в случайные моменты времени t_1, \dots, t_k, \dots , $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, значение длительности интервала (t_k, t_{k+1}) есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Вместе с тем, так как наблюдаемое в момент t_k событие порождает период мертвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} . Таким образом, интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Отметим, что на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток недоступен наблюдению, а на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем. В этой связи условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ и интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ принципиально разные.

Для нахождения вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, необходимо точно знать значение T либо предварительно осуществить оценку T . В данной работе предполагается, что значение T точно известно.

Найдем явные выражения апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний S_i , $i = \overline{1, n}$, процесса $\lambda(t)$ на интервале ненаблюдаемости потока событий (разд. 4), т.е. на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, а также

на временном интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ (разд. 3), когда исходный обобщенный МАР-поток событий доступен наблюдению.

3. Апостериорные и априорные вероятности на интервалах наблюдаемости потока

В работе [17] получены выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний S_i и формулы априорных финальных вероятностей состояний π_i , $i = \overline{1, n}$, обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний, функционирующего в условиях полной наблюдаемости потока, т.е. в случае отсутствия мертвого времени ($T = 0$).

На интервале времени (t_0, t_1) между началом наблюдения за потоком и первым событием потока, а также на интервалах времени (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями исходного обобщенного МАР-потока поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, определяется формулой

$$w(\lambda_i|t) = \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{i=1}^n w(\lambda_i|t) = 1, \quad (1)$$

где величины β_s – корни характеристического уравнения $|\mathbf{A} - \beta\mathbf{E}| = 0$, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) - \lambda_j \delta_{ji}$, δ_{ji} – символ Кронекера, $i, j = \overline{1, n}$; \mathbf{E} – единичная матрица; $\alpha_i^{(s)}$ – компоненты собственного вектора $A^{(s)}$, соответствующего корню β_s и определяемые из уравнения $(\mathbf{A} - \beta\mathbf{E})\tilde{A} = O$, $i, s = \overline{1, n}$; O – нулевой вектор-столбец; $\det \tilde{\mathbf{A}}_1$ – определитель матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \|\tilde{A}^{(1)} \dots \tilde{A}^{(n)}\|$; \tilde{A}_{js} – алгебраические дополнения элементов $\tilde{\alpha}_{js}$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$ ($\tilde{\alpha}_{js} = \alpha_j^{(s)}$), $j, s = \overline{1, n}$; вероятность $w(\lambda_j|t_0) = w(\lambda_j|t_0 + 0) = \pi_j$, $j = \overline{1, n}$.

Апостериорная вероятность $w(\lambda_j|t_k) = w(\lambda_j|t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, в момент времени t_k наступления события потока задается формулой пересчета

$$w(\lambda_j|t_k) = w(\lambda_j|t_k + 0) = \frac{\sum_{d=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_j|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_s|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)},$$

$$j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{j=1}^n w(\lambda_j|t_k + 0) = 1, \quad (2)$$

в которой $w(\lambda_d|t_k - 0)$, $d = \overline{1, n}$, вычисляется по формуле

$$w(\lambda_d|t_k - 0) = \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}},$$

$$d = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{d=1}^n w(\lambda_d|t_k - 0) = 1. \quad (3)$$

Отметим, что априорные финальные вероятности π_j , $j = \overline{1, n}$, того, что процесс $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t находится в состоянии S_j , удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \pi_j = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

и определяются выражениями

$$\pi_j = \frac{P_{nj}}{\det \mathbf{P}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1, \quad (5)$$

где P_{nj} – алгебраическое дополнение элемента p_{nj} матрицы $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i (1 - P_0(\lambda_i | \lambda_i) - P_1(\lambda_i | \lambda_i)), & i = j, i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)), & i \neq j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}; \\ 1, & i = n, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Итак, на интервале наблюдаемости $(t_k + T, t_{k+1})$ значение длительности которого есть η_k , $k = 1, 2, \dots$, и на начальном интервале (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, вычисляется по формуле (1). При этом начальное условие для $w(\lambda_i | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$, т.е. в формуле (1) нужно заменить $w(\lambda_j | t_k) = w(\lambda_j | t_k + 0)$ на $w(\lambda_j | t_k + T)$; $t_k + T < t < t_{k+1}$. Для начального интервала (t_0, t_1) при $k = 0$ формула (1) не меняется.

4. Вывод формул апостериорных вероятностей на интервалах ненаблюдаемости

Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, на котором событие имеет место в граничной точке t_k , а на самом полуинтервале события отсутствуют. Необходимо определить поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний на полуинтервалах ненаблюдаемости $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$w'(\lambda_i | t) = -\lambda_i w(\lambda_i | t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)) w(\lambda_j | t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Система (7) с начальными условиями $(w(\lambda_i | t = t_k) = w(\lambda_i | t_k + 0))$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$, где $w(\lambda_i | t_k + 0)$ вычисляются по формуле (2)) определяет поведение вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$. Ее решение устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с n состояниями, $n = 2, 3, \dots$, на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, после момента времени t_k наступления события имеют вид:

$$w(\lambda_i | t) = \pi_i + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_{js}}{\det \tilde{\Gamma}_1} \gamma_i^{(s)} (w(\lambda_j | t_k + 0) - \pi_j) e^{\mu_s(t-t_k)}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t), \quad t_k < t \leq t_k + T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где π_i , $i = \overline{1, n-1}$, определены в (5); величины $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_{js}$, $\gamma_i^{(s)}$, μ_s определяются в ходе доказательства.

Доказательство. Воспользуемся условием нормировки с тем, чтобы свести задачу интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений (7) к задаче интегрирования системы с меньшим числом неизвестных функций $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$. Выражая, например, $w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t)$ и подставляя в (7), приходим к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$w'(\lambda_i | t) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) w(\lambda_j | t) + p_{in}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (9)$$

$$w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t),$$

$t_k < t \leq t_k + T, k = 1, 2, \dots; p_{ij}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}$, определены в (6).

Полученную систему дифференциальных уравнений (9) представим в матричном виде:

$$\dot{W} = \tilde{\mathbf{P}}W + F, \quad (10)$$

где вектор-столбцы $W = \|w(\lambda_i | t)\|$, $\frac{dW}{dt} = \left\| \frac{dw(\lambda_i | t)}{dt} \right\|$, $F = \|p_{in}\|$, $i = \overline{1, n-1}$; элементы матрицы коэффициентов $\tilde{\mathbf{P}} = \|\tilde{p}_{ij}\| = \|p_{ij} - p_{in}\|$ выписываются в виде:

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i (1 - P_0(\lambda_i | \lambda_i) - P_1(\lambda_i | \lambda_i)) - \lambda_n (P_0(\lambda_i | \lambda_n) + P_1(\lambda_i | \lambda_n)), & i = j, i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)) - \lambda_n (P_0(\lambda_i | \lambda_n) + P_1(\lambda_i | \lambda_n)), & i \neq j, i, j = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Получили линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (10), общее решение которой есть сумма общего решения W соответствующей однородной системы и частного решения \tilde{W} исходной неоднородной системы (10).

Найдем прежде всего решение однородной системы дифференциальных уравнений, представленной в матричном виде:

$$\dot{W} = \tilde{\mathbf{P}}W. \quad (11)$$

Решение системы (11) будем искать в виде $W = \tilde{\Gamma} e^{\mu t}$, где вектор-столбец $\tilde{\Gamma} = \|\gamma_i\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, подставляя W в (11), получим систему линейных однородных уравнений относительно γ_i :

$$(\tilde{\mathbf{P}} - \mu \mathbf{E})\tilde{\Gamma} = O, \quad (12)$$

где O – нулевой вектор-столбец, \mathbf{E} – единичная матрица.

Для того чтобы уравнению (12) удовлетворял нетривиальный вектор $\tilde{\Gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (12) был равен нулю, т.е.

$$|\tilde{\mathbf{P}} - \mu \mathbf{E}| = 0. \quad (13)$$

Для каждого корня μ_s , $s = \overline{1, n-1}$, характеристического уравнения (13) из (12) определяется собственный вектор $\tilde{\Gamma}^{(s)} \neq 0$. Будем рассматривать только случай, когда все корни μ_s характеристического уравнения (13) действительны и различны. Получаем $(n-1)$ линейно независимых решений $W_s = \tilde{\Gamma}^{(s)} e^{\mu_s t}$, где $\tilde{\Gamma}^{(s)} = \|\gamma_i^{(s)}\|$, $i, s = \overline{1, n-1}$. Постоянные $\gamma_i^{(s)}$, $i, s = \overline{1, n-1}$, определяются из (12) неоднозначно. Общее решение системы (11) имеет вид:

$$W = \sum_{s=1}^{n-1} C_s \tilde{\Gamma}^{(s)} e^{\mu_s t}; \quad w(\lambda_i | t) = \sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (14)$$

где C_s – произвольные постоянные, которые будут определены после нахождения решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (10).

Частное решение \tilde{W} неоднородной системы (10) будем искать по виду вектора $F = \|p_{in}\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Покажем непосредственной подстановкой, что частное решение системы (10) может иметь вид $\tilde{W} = \|\pi_i\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $\tilde{w}(\lambda_i | t) = \pi_i$, $i = \overline{1, n-1}$, в систему (10), находим

$$\sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) \pi_j + p_{in} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Покажем, что левая часть последнего равенства тождественно равна нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) \pi_j + p_{in} &= \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j - \sum_{j=1}^{n-1} p_{in} \pi_j + p_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j - p_{in} \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j + p_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j + p_{in} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \right) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j + p_{in} \pi_n = \sum_{j=1}^n p_{ij} \pi_j \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

так как π_j , $j = \overline{1, n}$, – решение системы (4).

Таким образом, общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (9) (или (10) в матричном виде) есть сумма общего решения (14) соответствующей однородной системы (11) и частного решения \tilde{W} исходной неоднородной системы (10) и имеет вид:

$$w(\lambda_i|t) = \pi_i + \sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $\tilde{\Gamma}^{(s)} = \|\gamma_i^{(s)}\|$, C_s – произвольные постоянные, $i, s = \overline{1, n-1}$.

Значения C_s определим из начальных условий вероятностей $w(\lambda_i|t)$ в момент времени $t = t_k$ наступления события: $w(\lambda_i|t = t_k) = w(\lambda_i|t_k + 0)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k = 1, 2, \dots$, где $w(\lambda_i|t_k + 0)$ определяются формулой пересчета (2). Подставляя вышеприведенные начальные условия в (15), выпишем систему $(n-1)$ линейных неоднородных уравнений для нахождения произвольных постоянных C_s , $i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t_k} = w(\lambda_i|t_k + 0) - \pi_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

с отличным от нуля определителем для $(n-1)$ линейно независимого решения системы уравнений. Решая полученную систему с использованием правила Крамера, находим

$$C_s = e^{-\mu_s t_k} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_{js}}{\det \tilde{\Gamma}_1} (w(\lambda_j|t_k + 0) - \pi_j), \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (16)$$

где $\det \tilde{\Gamma}_1$ – определитель матрицы $\tilde{\Gamma}_1 = \|\tilde{\Gamma}^{(1)} \dots \tilde{\Gamma}^{(n-1)}\|$; $\tilde{\Gamma}_{js}$ – алгебраические дополнения элементов $\tilde{\gamma}_{js}$ матрицы $\tilde{\Gamma}_1$ ($\tilde{\gamma}_{js} = \gamma_j^{(s)}$), $j, s = \overline{1, n-1}$.

Подставляя (16) в (15), приходим к (8). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Так как процесс $\lambda(t)$ – марковский, то при $t \rightarrow \infty$ апостериорные вероятности $w(\lambda_i|t)$ стремятся к пределам $w(\lambda_i)$, $i = \overline{1, n}$, не зависящим от начальных условий. Тогда система (9) при $t \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) w(\lambda_j) = p_{in}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad w(\lambda_n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i).$$

Полученные аналитические формулы (1), (2), (3), (5) и (8) позволяют сформулировать следующий алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t :

1) в момент начала наблюдения за потоком $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_i|t_0 + 0)$, $i = \overline{1, n}$, выбирается априорная стационарная вероятность π_i , вычисляемая по формуле (5), т.е. $w(\lambda_i|t_0 + 0) = w(\lambda_i|t_0 = 0) = \pi_i$;

2) по формуле (1) для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в любой момент времени t , $t_0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, при этом начальное условие $w(\lambda_i|t_0 + 0)$ для $w(\lambda_i|t)$ определено на первом шаге;

3) по формуле (3) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в момент времени t_1 для $k = 1$, т.е. $w(\lambda_i|t_1) = w(\lambda_i|t_1 - 0)$;

4) по формуле (2) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_k наблюдения k -го события потока, т.е. вычисляется величина $w(\lambda_i|t_k + 0)$, $i = \overline{1, n}$, – начальное условие для $w(\lambda_i|t)$ на временном полуинтервале $(t_k, t_k + T]$;

5) по формуле (8) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого момента времени t , $t_k < t < t_k + T$;

6) по формуле (8) рассчитывается $w(\lambda_i|t = t_k + T)$, $i = \overline{1, n}$, – начальное условие для $w(\lambda_i|t)$ на временном интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, где t_{k+1} – момент наблюдения $(k+1)$ -го события потока;

7) по формуле (1) вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого момента времени t , $t_k + T < t < t_{k+1}$;

8) по формуле (3) рассчитывается $w(\lambda_i|t_{k+1}) = w(\lambda_i|t_{k+1} - 0)$, $i = \overline{1, n}$;

9) k увеличивается на единицу; алгоритм переходит на шаг 4, шаги 4–8 повторяются последовательно.

При расчете апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в произвольный момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

5. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T . Основой имитационной модели являются датчики псевдослучайных чисел и метод обратных функций [21]. Первый этап заключается в имитационном моделировании исследуемого потока с целью получения выборки моментов времени наблюдаемых событий; второй этап – оценивание состояний потока методом максимума апостериорной вероятности на основе полученной на первом этапе выборки моментов наступления событий t_1, \dots, t_m в наблюдаемом потоке.

Для числа состояний $n = 3$, времени моделирования $T_m = 10$ ед. времени, длительности мертвого времени $T = 0,27$, значений $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 5$ процесса $\lambda(t)$ и переходных вероятностей, приведенных в табл. 1, проведены расчеты нахождения траектории оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$.

Таблица 1

Значения переходных вероятностей обобщенного МАР-потока событий с тремя состояниями

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,19$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,21$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,21$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,13$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,17$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,24$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,16$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,11$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,09$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,27$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,23$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,17$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,17$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,12$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,26$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,08$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,16$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,03$

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория поведения стационарного случайного процесса $\lambda(t)$ (истинная реализация процесса), полученная путем имитационного моделирования, и траектория поведения оценки $\hat{\lambda}(t)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – состояния процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты времени наступления событий потока. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. Жирной линией на оси времени отмечены области принятия ошибочного решения, когда значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

На рис. 3 продемонстрированы траектории поведения апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний λ_i процесса $\lambda(t)$, $i = \overline{1, 3}$, графические реализации которых получены с помощью имитационного моделирования последовательности наблюдаемых моментов времени наступления событий t_1, t_2, \dots . При этом в любой момент времени t , $t_0 \leq t \leq T_m$, выполняется условие нормировки $w(\lambda_1|t) + w(\lambda_2|t) + w(\lambda_3|t) = 1$.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров λ_i , $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$, осуществляется моделирование обобщенного МАР-потока с n состояниями на заданном отрезке времени моделирования $[0, T_m]$ (отдельный v -й эксперимент);

- 2) осуществляется расчет апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке моделирования $[0, T_m]$ по формулам (1), (2), (3), (5) и (8);
- 3) осуществляется оценивание траектории процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t , удовлетворяющий отрезку $[0, T_m]$, по методу максимума апостериорной вероятности;
- 4) определяется (для отдельного v -го эксперимента) d_v – суммарная протяженность интервалов, на которых истинное значение процесса $\lambda(t)$ не совпало с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;
- 5) вычисляются значения $p_v^{\hat{}} = d_v/T_m$ – доли ошибочных решений;
- 6) шаги 1–5 повторяются N раз ($v = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки оценивания состояний случайного процесса $\lambda(t)$ на рассматриваемом отрезке $[0, T_m]$.

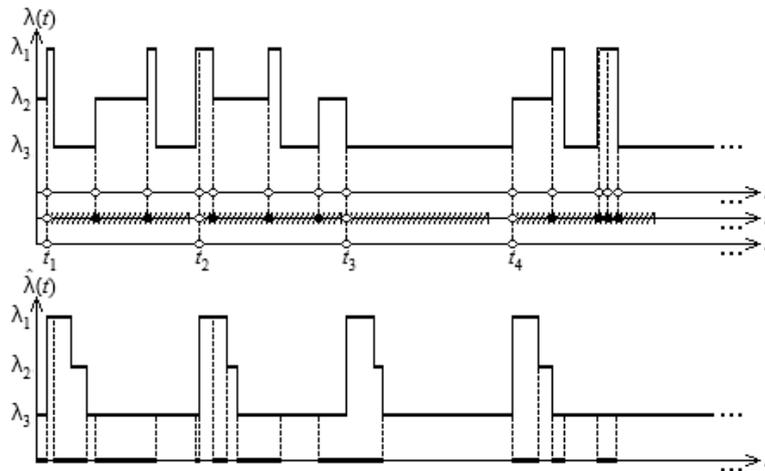


Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ и траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$

Fig. 2. The trajectory of the process $\lambda(t)$ and the trajectory of the estimate $\hat{\lambda}(t)$

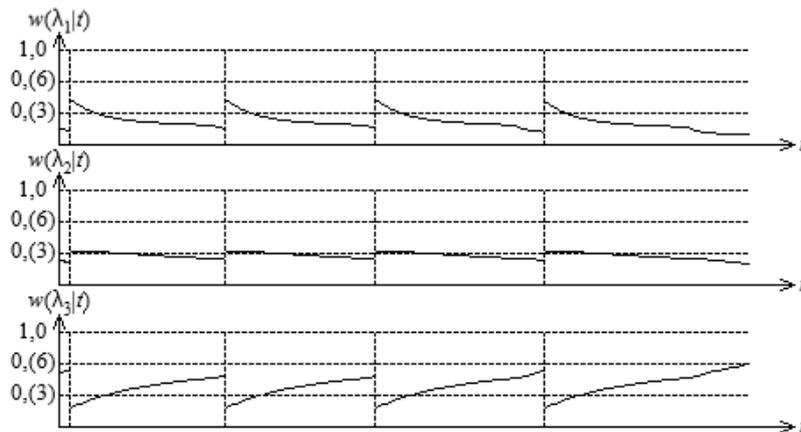


Рис. 3. Траектории апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, 3}$

Fig. 3. Trajectories of posterior probabilities $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, 3}$

Результатом реализации вышеприведенного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений при проведении N экспериментов. На основании полученных данных вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочно принятого решения $\hat{P}_{\text{ош}} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \hat{p}_v$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_{\text{ош}} = \frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (\hat{p}_v - \hat{P}_{\text{ош}})^2$.

Эксперимент 1. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значение длительности мертвого времени $T = 0,17$ и переходные вероятности процесса $\lambda(t)$, заданные произвольно (табл. 1). Целью эксперимента является установление зависимости $\hat{P}_{\text{ош}}$ от длительности времени моделирования T_m , где $T_m \in \{100; 200; \dots; 1000\}$. Полученные результаты первого статистического эксперимента продемонстрированы в табл. 2.

Таблица 2

Результаты первого статистического эксперимента

T_m	$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$	
	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$
100	0,190598	0,233326	0,135726	0,164548	0,101226	0,094689
200	0,188431	0,121193	0,137610	0,069900	0,101258	0,048507
300	0,190477	0,097663	0,137746	0,044778	0,101435	0,033193
400	0,189772	0,045799	0,138334	0,039287	0,101186	0,016554
500	0,190016	0,031188	0,137480	0,026709	0,101556	0,012633
600	0,190599	0,024237	0,137827	0,016810	0,10147	0,013922
700	0,190222	0,033073	0,138078	0,011451	0,10132	0,010115
800	0,189895	0,024601	0,137343	0,016556	0,101181	0,008789
900	0,190018	0,019293	0,137997	0,011633	0,10171	0,006313
1000	0,190002	0,013740	0,137885	0,009393	0,101544	0,004877

Результаты свидетельствуют о том, что величина $P_{\text{ош}}$ с ростом T_m практически не изменяет своего значения. Однако значения $D_{\text{ош}}$ значительно убывают с ростом значения T_m . Таким образом, с ростом значения времени моделирования T_m можно предположить, что величина $P_{\text{ош}}$ сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения $P_{\text{ош}}$. Также результаты эксперимента показывают, что чем больше различимы состояния процесса $\lambda(t)$, тем меньше величина $P_{\text{ош}}$ и тем быстрее убывает $D_{\text{ош}}$ с ростом значения T_m .

Эксперимент 2. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значение времени моделирования $T_m = 500$ и переходные вероятности, представленные в табл. 1. В данном эксперименте устанавливается зависимость $P_{\text{ош}}$ от длительности мертвого времени T , где $T \in \{0,1; 0,6; \dots; 4,6\}$. Результаты эксперимента представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты второго статистического эксперимента

T	$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$	
	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$
0,1	0,193369	0,045538	0,139048	0,017312	0,100887	0,016390
0,6	0,187282	0,043709	0,138662	0,028811	0,103253	0,021228
1,1	0,190675	0,056735	0,14153	0,032023	0,105240	0,013553
1,6	0,194373	0,050363	0,143708	0,033002	0,107182	0,018838
2,1	0,196068	0,066667	0,145241	0,039105	0,108634	0,023785
2,6	0,197257	0,058733	0,146991	0,034911	0,109077	0,020624
3,1	0,199398	0,078848	0,148189	0,039074	0,109718	0,022814
3,6	0,199237	0,053270	0,149020	0,040718	0,110203	0,023633
4,1	0,200456	0,069986	0,148979	0,024693	0,111391	0,024411
4,6	0,201110	0,078916	0,149998	0,035062	0,111273	0,020970

Результаты свидетельствуют о том, что значение $P_{\text{ош}}$ растет с увеличением значения T , так как с увеличением длительности мертвого времени суммарный период ненаблюдаемости увеличивается и $P_{\text{ош}}$ стремится к постоянной величине на основании того, что апостериорные вероятности на участке ненаблюдаемости с ростом T стремятся к априорным вероятностям. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению числа наблюдаемых событий или, иными словами, к снижению количества информации о потоке, что является базой для алгоритма принятия решения о значении процесса $\lambda(t)$

в произвольный момент времени $t \geq t_0$. В табл. 3 с ростом значения мертвого времени можно наблюдать стабилизацию величины $D_{\text{ош}}^*$ в пределах некоторого постоянного значения $D_{\text{ош}}$. Также стоит отметить, что чем больше различимы состояния потока $\lambda(t)$, тем точнее оценивание.

Заключение

В данной статье приведены явные виды апостериорных вероятностей и априорных вероятностей состояний потока на интервалах наблюдаемости за исследуемым потоком, также получены явные выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний S_i , $i = \overline{1, n}$, обобщенного МАР-потока событий с n состояниями на временных интервалах, на которых поток событий недоступен наблюдению. Предложен алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях частичной наблюдаемости, приведены численные результаты ряда экспериментов по выявлению зависимости значений $P_{\text{ош}}^*$ от изменений некоторых параметров потока. В ходе экспериментов установлено:

- 1) с ростом T_m величина $P_{\text{ош}}^*$ стремится к некоторой постоянной величине, которая близка к истинной вероятности ошибки принятия решения $P_{\text{ош}}$;
- 2) значение $P_{\text{ош}}^*$ возрастает с увеличением значения T ;
- 3) чем больше различимы состояния потока $\lambda(t)$, тем точнее оценивание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes. New York : Wiley, 1965. 398 p.
3. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1976. 240 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
8. Nezhelskaya L., Sidorova E. Optimal state estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 157–178.
9. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event of flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
10. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, № 4. С. 115–120.
11. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17 (4). P. 1326–1339.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
13. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes // Advanced textbooks in control and signal processing. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
14. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
15. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
16. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2018. Т. 302. С. 157–164.
17. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2019. Т. 304. С. 23–32.
18. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

19. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. 504 с.
20. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
21. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 30 марта 2021 г.

Keba A.V., Nezhel'skaya L.A. (2021) OPTIMAL STATE ESTIMATION OF GENERALIZED MAP WITH AN ARBITRARY NUMBER OF STATES UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 68–80

DOI: 10.17223/19988605/56/8

The paper deals with a generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time of fixed duration T (each registered event generates dead time period of duration T , events that occurred during the non-observability period are lost and do not cause an extension of the dead time period). The accompanying random process $\lambda(t)$ of the flow is an unobservable piecewise constant process with n states: S_1, \dots, S_n . The process $\lambda(t)$ is unobservable in principle, the moments of occurrence of events t_1, t_2, \dots are observable.

It is necessary to estimate the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t provided that a sample of the moments of occurrence of events t_1, \dots, t_m in the observed flow over the time interval (t_0, t) is known, where t_0 is the beginning of observation, t is the end of observation, m is the number of observed events over the time interval (t_0, t) . It is assumed that $\lambda(t)$ is stationary.

The optimal estimation of the states of the process $\lambda(t)$ in terms of the minimum of the total probability of making the erroneous decision is made according to the maximum a posteriori probability criterion. At an arbitrary moment t , the values $w(\lambda_i|t) = w(\lambda_i|t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i|t_1, \dots, t_m, t)$, $i = \overline{1, n}$ are compared: if $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, then $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

In the paper we present the formula for posterior probabilities on the intervals of the flow observability. The explicit form for posterior probabilities on the intervals of the flow unobservability is found. Based on these formulas, the algorithm for calculating the posterior probability $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, and the algorithm for deciding on the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t are proposed. The algorithms were implemented by C# programming language in the Visual Studio 2015. Statistical experiments were conducted on the simulation model to establish the frequency of making erroneous decisions about the state of the process $\lambda(t)$. The numerical results of these experiments are given in the paper and illustrate an acceptable estimate of the total probability of making the erroneous decision.

Keywords: generalized MAP with an arbitrary number of states; unextendable dead time; optimal state estimation; posterior probabilities; maximum a posteriori probability criterion.

KEBA Anastasia Vladimirovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

NEZHHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.ru

REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
2. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
3. Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Poisson Processes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143

7. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
8. Nezhelskaya, L. & Sidorova, E. (2018) Optimal state estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 157–178. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_13
9. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8
10. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2009) Parameter estimation for product-form distributions of queueing networks. *Problemy Peredachi Informatsii – Problems of Information Transmission*. 45(4). pp. 115–120.
11. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
12. Feller, W. (1967) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An Introduction to Probability Theory and its Applications]. Vol. 2. Moscow: Mir.
13. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of Dead-Time Process*. London: Springer-Verlag.
14. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
15. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
16. Кеба, А.В. & Нежельская, Л.А. (2018) Statisticheskie eksperimenty na imitatsionnoy modeli obobshchennogo MAP-potoka sobytii s proizvolnym chislom sostoyaniy [Statistical experiments on a simulation model of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 157–164.
17. Кеба, А.В. & Нежельская, Л.А. (2019) Aposteriornye veroyatnosti sostoyaniy obobshchennogo MAP-potoka sobytii s proizvolnym chislom sostoyaniy [Posterior probabilities of states of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 23–32.
18. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
19. Levin, B.R. (1968) *Teoriticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
20. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of Optimal Statistical Decisions]. Moscow: Sovetskoe radio.
21. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.