

УДК 51-76

DOI: 10.17223/19988605/56/9

П.Н. Подкур, Н.К. Смоленцев

ВЕЙВЛЕТЫ МЕЙЕРА С КОЭФФИЦИЕНТОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ $N > 2$

Определяются ортогональные вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные классическим вейвлетам Мейера для $N = 2$. Построенные вейвлеты используются для анализа электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Получено разложение сигнала ЭЭГ на отдельные компоненты, локализованные по частоте.

Ключевые слова: вейвлеты Мейера; вейвлет-анализ ЭЭГ; вейвлеты с коэффициентом масштабирования N .

Вейвлет-анализ предоставляет мощный инструмент для изучения различных медицинских данных. В настоящее время широко используются методы непрерывного вейвлет-анализа (см. напр.: [1, 2]). Также исследуются и числовые характеристики сигналов электрокардиограмм (ЭКГ) и электроэнцефалограмм (ЭЭГ), получаемые методами дискретного вейвлет-преобразования [3–7]. Использование степеней двойки для вейвлет-анализа и при построении теории вейвлетов удобно во многих отношениях, хотя и не является обязательным. Можно вместо коэффициента масштабирования 2 использовать любое целое число N и даже рациональное, большее единицы [8]. Основы теории вейвлетов с целым коэффициентом $N > 2$ представлены в работах [9] и [10]. В [10] показано использование вейвлетов Хаара с коэффициентами масштабирования 4, 5, 8 для анализа экономических данных. Однако других практических применений вейвлетов с коэффициентом $N > 2$ в настоящее время нет. Более того, нет даже примеров дифференцируемых вейвлетов с коэффициентом масштабирования $N > 2$.

В данной работе построены вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные обычным ($N = 2$) вейвлетам Мейера. В случае $N = 3$ показано их применение для исследования ЭЭГ. Получено разложение сигнала ЭЭГ на основные частотные ритмы. Результаты показывают, что вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования больше двух позволяет получить новые числовые характеристики ЭЭГ, что подтверждает перспективность использования таких вейвлетов для анализа данных.

1. Предварительные сведения

Напомним основные положения вейвлет-анализа с масштабным коэффициентом $N > 2$. Развитие этой темы см.: [10]. Предположим, что задана интегрируемая с квадратом функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая следующему масштабирующему соотношению:

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(Nx - n).$$

Такая функция $\varphi(x)$ называется масштабирующей, а набор коэффициентов разложения $\{h_n\}$ называется фильтром функции $\varphi(x)$. Кроме того, предположим, что целочисленные сдвиги $\{\varphi(x - n)\}$ попарно L_2 -ортогональны и нормированы. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ функции

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{N^j} \varphi(N^j x - n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

образуют ортонормированную систему. Пусть $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ – подпространство, порожденное функциями $\varphi_{j,n}(x)$, $n \in \mathbb{Z}$. Для масштабирующей функции $\varphi(x)$ определяется частотная функция формулой

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-i n \omega}.$$

После преобразования Фурье масштабирующего соотношения оно принимает вид:

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Масштабирующей функции $\phi(x)$ соответствует $N-1$ вейвлетов $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$, определенных равенствами

$$\psi^k(x) = \sqrt{N} \sum_n g_n^k \phi(Nx-n), \quad k=1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

где коэффициенты разложения $\{g_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ называются фильтрами вейвлетов. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ сдвиги масштабированных вейвлетов $\psi_{j,n}^k(x) = \sqrt{N^j} \psi^k(N^j x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k=1, 2, \dots, N-1$, образуют ортонормированные базисы пространств вейвлетов $W_j^k \subset V_j$, $k=1, 2, \dots, N-1$. Определим соответствующие вейвлетам $\psi^k(x)$ частотные функции:

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n g_n^k e^{-in\omega}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

В частотной области равенство (1) принимает вид:

$$\hat{\psi}^k(\omega) = H_k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Частотные функции вейвлетов удовлетворяют свойству унитарности матрицы [9, 10]:

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega) & H_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_0\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ H_1(\omega) & H_1\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_1\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N-1}(\omega) & H_{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вейвлет-преобразование. Пусть $P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j,n} \phi_{j,n}(x)$ – приближение функции $f(x)$ в пространстве $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$. Тогда вейвлет-разложение $P_j(f)$ есть представление $P_j(f)$ в виде

$$P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-1,n} \phi_{j-1,n}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1,n}^k \psi_{j-1,n}^k(x). \quad (5)$$

В формуле (5) первая сумма дает более грубую аппроксимацию $P_{j-1}(f)$ функции $f(x)$ в пространстве $V_{j-1} \subset V_j$, а вторая сумма – это те детали, которые теряются при переходе от $P_j(f)$ к $P_{j-1}(f)$. Вместо набора коэффициентов $A_0 = \{a_{j,n}\}$ мы получили два: $A_1 = \{a_{j-1,n}\}$ и $D_1 = \{d_{j-1,n}^1, \dots, d_{j-1,n}^{N-1}\}$. Процедуру разложения можно повторить, применяя ее к $P_{j-1}(f) \in V_{j-1}$.

Практически мы имеем дело не функцией $f(x)$, а с цифровым сигналом S , который представлен массивом $S = A_0 = \{a_n\}$ значений функции $f(x)$. Тогда его вейвлет-разложение $S \rightarrow \{D_1, A_1\}$ производится по формулам [10]

$$a_{1,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} a_{n+Nm}, \quad d_{1,m}^k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_n^k} a_{n+Nm}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$

где $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\{g_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – фильтры вейвлетов $\phi(x)$ и $\psi^k(x)$, а черта сверху означает комплексное сопряжение. Таким образом, вместо $A_0 = \{a_n\}$ мы получили два массива: $A_1 = \{a_{1,m}\}$ – коэффициенты аппроксимации, и $D_1 = \{d_{1,m}^1, \dots, d_{1,m}^{N-1}\}$ – коэффициенты детализации. Процедуру разложения можно

повторить, применив ее к набору коэффициентов A_1 . Восстановление массива $A = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $A_1 = \{a_{1,m}\}$ и $D_1 = \{d_{1,m}^1, \dots, d_{1,m}^{N-1}\}$ производится следующим образом:

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{n-Nm} a_{1,m} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{n-Nm}^k d_{1,m}^k. \quad (7)$$

2. Вейвлеты Мейера

Вейвлеты Мейера строятся на основе вейвлетов Шеннона [10]. Масштабирующая функция Шеннона $\phi(x)$ определяется через ее образ Фурье $\hat{\phi}(\omega)$, который берется в виде ступенчатой функции в частотной области: $\hat{\phi}(\omega) = 1$ при $\omega \in [-\pi, \pi]$ и $\hat{\phi}(\omega) = 0$ при других ω . Тогда $\phi(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Для нахождения вейвлетов Шеннона $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ строятся их частотные функции (2), сначала $H_0(\omega)$, а затем остальные $H_k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (4).

Функция $H_0(\omega)$ может быть найдена из масштабирующего уравнения $\hat{\phi}(\omega) = H_0(\omega/N) \hat{\phi}(\omega/N)$. Действительно, поскольку функция $\hat{\phi}(\omega/N) = 1$ на промежутке $[-N\pi, N\pi]$ и равна нулю в противном случае, то $H_0(\omega/N) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-N\pi, N\pi]$, или $H_0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Поэтому $H_0(\omega) = 1$ при $\omega \in [-\pi/N, \pi/N]$ и $H_0(\omega) = 0$ при других $\omega \in [-\pi, \pi]$. Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H_0(\omega)$ продолжается периодически. Для $k = 1, 2, \dots, N-1$ положим

$$H_k(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \in [k\pi/N, (k+1)\pi/N], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \text{ промежутка } [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (8)$$

Вейвлеты Шеннона $\psi^k(x)$ с коэффициентом масштабирования N определяются из формулы (3). По построению вейвлеты Шеннона соответствуют идеальным фильтрам $H_0(\omega)$, $H_k(\omega)$. Вследствие разрывности этих функций масштабирующая функция $\phi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ убывают очень медленно, что затрудняет их практическое использование. Этот недостаток можно исправить «сглаживанием» разрывов. В результате получаются вейвлеты, которые мы называем именем Мейера по аналогии со случаем $N = 2$.

Построение масштабирующей функции Мейера. Разрывы масштабирующей функции $\hat{\phi}(\omega)$ вейвлетов Шеннона в точках $-\pi$ и π можно удалить сглаживанием многими способами. Однако нужно, чтобы сглаженная функция $\hat{\phi}(\omega)$ обладала свойством $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$, которое обеспечивает ортогональность системы функций $\phi(x - n)$. Проведем сглаживание на промежутках $[-\pi - \pi/N, -\pi + \pi/N]$ и $[\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$.

Масштабирующую функцию Мейера $\phi(x)$ коэффициента масштабирования N определим через ее преобразование Фурье $\hat{\phi}(\omega)$ равенством

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \pi - \frac{\pi}{N}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N}{2\pi} |\omega| - \frac{N-1}{2}\right)\right), & \pi - \frac{\pi}{N} \leq |\omega| \leq \pi + \frac{\pi}{N}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $v(x)$ есть вспомогательная функция, которая равна нулю при $x \leq 0$, равна единице при $x \geq 1$ и удовлетворяет условию $v(x) + v(1-x) = 1$. Мы используем следующую полиномиальную интерполяцию между 0 и 1 на промежутке $[0, 1]$: $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$, принятую в MATLAB.

Покажем, что сдвиги $\phi(x - n)$ функции $\phi(x)$ образуют ортонормированную систему. Для этого достаточно проверить равенство $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$ [10]. По построению $\hat{\phi}(\omega)$ мы видим, что достаточно показать равенство

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|\omega|-\frac{N-1}{2}\right)\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|\omega-2\pi|-\frac{N-1}{2}\right)\right)=1$$

только на промежутке $[\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ – там, где пересекаются носители соседних функций $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\phi}(\omega - 2\pi)$ при суммировании. Это равенство верно, так как второй член в левой части уравнения с использованием равенства $v(1-x) = 1 - v(x)$ может быть легко преобразован к квадрату синуса:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}(2\pi-\omega)-\frac{N-1}{2}\right)\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(-\frac{N}{2\pi}\omega+\frac{N-1}{2}+1\right)\right)= \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}\omega-\frac{N-1}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}\omega-\frac{N-1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Частотную функцию $H_0(\omega)$ найдем из масштабирующего уравнения

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Функция $\hat{\phi}(\omega)$ равна 1 на $[-\pi + \pi/N, \pi - \pi/N]$ и обращается в нуль вне промежутка $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$. Поэтому $\hat{\phi}(\omega/N) = 1$ на промежутке $[-N\pi + \pi, N\pi - \pi]$ и обращается в нуль вне промежутка $[-N\pi - \pi, N\pi + \pi]$. Поскольку промежуток $[-N\pi + \pi, N\pi - \pi]$ включает в себя носитель $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ функции $\hat{\phi}(\omega)$, то сомножитель $\hat{\phi}(\omega/N)$ можно убрать (он равен единице на носителе функции $\hat{\phi}(\omega)$). Таким образом, $H_0(\omega/N) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ и $H_0(\omega/N) = 0$ вне $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$, т.е. $H_0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$ и $H_0(\omega) = 0$ вне промежутка $[-\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$:

$$H_0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\pi/N + \pi/N^2, \pi/N - \pi/N^2], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|N\omega|-\frac{N-1}{2}\right)\right), & \pi/N - \pi/N^2 \leq |\omega| \leq \pi/N + \pi/N^2, \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases} \quad (10)$$

Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H_0(\omega)$ продолжается периодически.

Построение частотных функций и вейвлетов. Для построения вейвлетов Мейера найдем сначала их частотные функции $H_k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (4). Для этого проведем сглаживание частотных функций (8) вейвлетов Шеннона, аналогичное сглаживанию (10) частотной функции $H_0(\omega)$. Частотная функция Шеннона $H_k(\omega)$ четная и имеет носитель на двух симметричных промежутках:

$\frac{k\pi}{N} \leq |\omega| < \frac{(k+1)\pi}{N}$. Проведем сглаживание вблизи концов сначала для неотрицательных ω , т.е. на

промежутках $\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}$ и $\frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}$. Тогда получаются следующие выражения сглаженных функций $H_{k+}(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, N-2$, при $\omega > 0$:

$$H_{k+}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \text{ или } \omega \geq \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N^2}{2\pi}|\omega|-\frac{kN-1}{2}\right)\right), & \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \\ 1, & \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N^2}{2\pi}|\omega|-\frac{(k+1)N-1}{2}\right)\right), & \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}. \end{cases} \quad (11)$$

На весь промежуток $[-\pi, \pi]$ функции $H_{k+}(\omega)$ можно продолжить как по четности, так и по нечетности. Далее мы уточним, как это сделать из требования унитарности матрицы (4). Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ они продолжаются по периодичности. Поскольку частотные функции периодические с периодом 2π , то последняя частотная функция сглаживается только внутри промежутка $[-\pi, \pi]$,

$$H_{N-1}(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} |\omega| - \frac{(N-1)N-1}{2}\right)\right), & |\omega| \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2}, \frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}\right], \\ 1, & |\omega| \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \pi\right], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (12)$$

Покажем, что указанные выше функции $H_0(\omega)$, $H_k(\omega)$ и (12) обладают тем свойством, что строки матрицы (4) имеют единичную норму. Для доказательства равенства $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H_0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = 1$ достаточно показать его только на промежутке $[\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$. Это следует из того, что сглаживание всех функций в точках разрыва проведено одинаково и симметрично. Кроме того, в приведенной сумме носители соседних функций пересекаются именно по тем промежуткам, где производилось сглаживание. На промежутке $[\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$ в сумме имеется только два ненулевых слагаемых, $H_0(\omega)$ и $H_0(\omega - 2\pi/N)$. Тогда получаем с использованием равенства $v(1-x) = 1 - v(x)$

$$\begin{aligned} & |H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H_0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = |H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} (-\omega + 2\pi/N) - \frac{N-1}{2}\right)\right) = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично показывается нормированность остальных строк для $H_k(\omega)$ как для четного продолжения $H_{k+}(\omega)$, так и для нечетного. Обеспечим эрмитову ортогональность строк матрицы (4) частотных функций вейвлеты Мейера. Поскольку носитель функции $H_k(\omega)$ имеет непустое пересечение с носителями только соседних функций $H_{k-1}(\omega)$ и $H_{k+1}(\omega)$, то достаточно обеспечить ортогональность только соседних строк. Для этого, как нетрудно увидеть, достаточно частотные функции $H_k(\omega)$ с четными номерами считать четными функциями, а нечетные $H_k(\omega)$ сделать нечетными функциями исходя из функций $H_{k+}(\omega)$, определенных на промежутке $[0, \pi]$.

Таким образом, искомые частотные функции вейвлетов $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ имеют следующий вид: для четных значений k функция $H_k(\omega)$ является четной и на промежутке $[0, \pi]$ определяется формулой (11), а для нечетных значений k функция $H_k(\omega)$ является нечетной и на промежутке $[0, \pi]$ также определяется формулой (11). Соответственно определяется и последняя частотная функция $H_{N-1}(\omega)$ в зависимости от четности числа $N-1$.

Вейвлеты $\psi^k(x)$ определяются своими частотными функциями из формулы (3). Масштабирующая функция $\phi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ в пространственной области получаются при помощи обратного преобразования Фурье. Поскольку $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\psi}^k(\omega)$ имеют компактные носители, то функции $\phi(x)$ и $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми.

Из вида частотных функций Мейера $H_k(\omega)$ следует, что при вейвлет-разложении функция $\phi(x)$ обеспечивает сглаживание сигнала, пропуская низкие частоты, соответствующие промежутку $[-\pi/N, \pi/N]$, а вейвлеты $\psi^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, разбивают сигнал последовательно на компоненты, соответствующие частотным диапазонам $k\pi/N \leq |\omega| < (k+1)\pi/N$. Чем больше k , тем более высокие частоты сигнала отражают коэффициенты деталей $\{d_{j-1,n}^k\}$.

Масштабирующий фильтр $\{h_n\}$ и фильтры вейвлетов $\{g_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H_0(\omega)$ и $H_k(\omega)$.

3. Вейвлет-анализ сигнала ЭЭГ

В данном разделе мы рассмотрим вейвлет-анализ сигнала ЭЭГ с использованием вейвлетов Мейера $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ с коэффициентом масштабирования 3. Для анализа берется оцифрованный сигнал ЭЭГ, снятый на электроэнцефалографе высокого разрешения (500 отсчетов в секунду) и его фрагмент длительности 6 с.

Для разложения и восстановления сигнала вычислены фильтры $\{h_n\}$, $\{g_n^k\}$, $k = 1, 2$, вейвлетов Мейера. Вообще эти фильтры имеют бесконечное число элементов, но для номеров $|n| > 100$ коэффициенты имеют значения порядка 10^{-6} и меньше. Поэтому были вычислены значения фильтров в пределах $-100 \leq n \leq 100$.

По формулам (6), (7) составлены функции разложения и восстановления сигнала (в нашем случае $N = 3$) в системе MATLAB. Сигнал S представлен массивом $S = A_0 = \{a_n\}$. Тогда его вейвлет-разложение дает коэффициенты аппроксимации $A_1 = \{a_{1,n}\}$, коэффициенты детализации $D_1^1 = \{d_{1,m}^1\}$ вейвлета $\psi^1(x)$ и коэффициенты детализации $D_1^2 = \{d_{1,m}^2\}$ вейвлета $\psi^2(x)$. Разложение $S \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\}$ производится по формулам (6), а восстановление массива $A_0 = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $\{D_1^1, D_1^2, A_1\}$ производится по формулам (7) для $N = 3$ и $k = 1, 2$. При многоуровневом вейвлет-анализе процедура вейвлет-разложения применяется многократно к массивам A_k коэффициентов аппроксимации. Это может быть изображено схематично следующим образом:

$$S = A_0 \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\} \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, A_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, \dots, D_M^1, D_M^2, A_M\}.$$

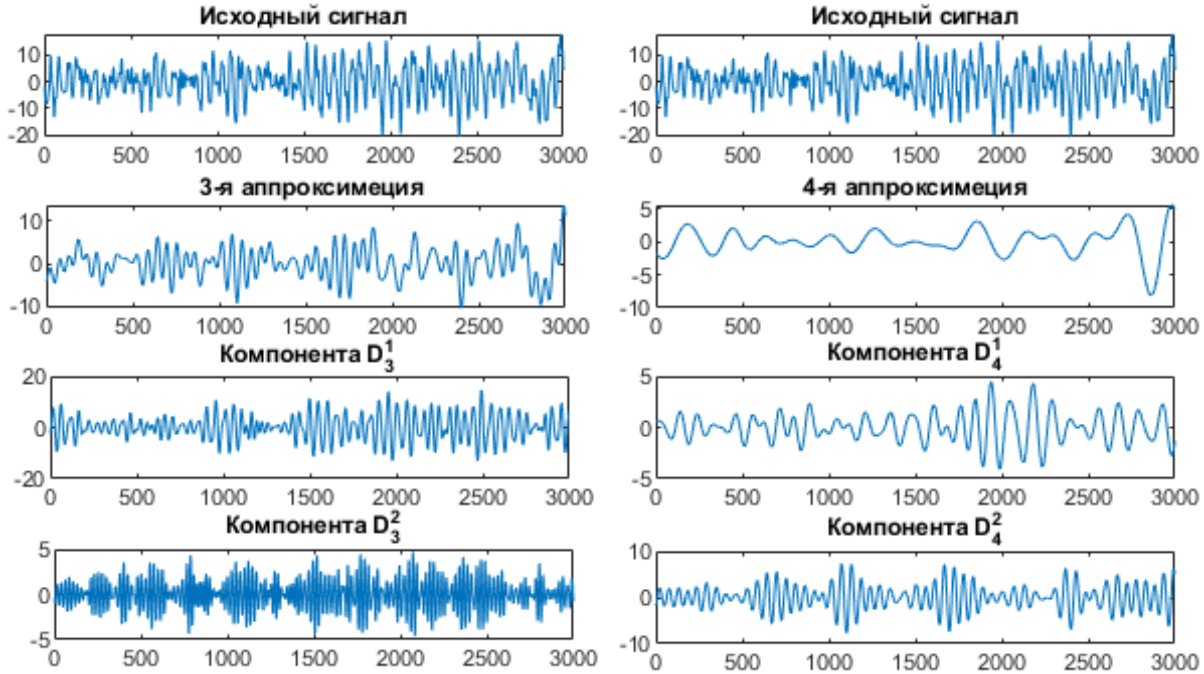


Рис. 1. Компоненты разложения ЭЭГ третьего и четвертого уровней разложения
Fig. 1. Components of EEG decomposition of the third and fourth levels of decomposition

Для изучения свойств сигнала S важно получить его компоненты $RecD_j^k$, которые восстанавливаются только из одного набора коэффициентов D_j^k , считая, что остальные коэффициенты равны ну-

лю. В нашем случае анализа ЭЭГ достаточно сделать разложение до 4-го уровня. Дело в том, что компонента сигнала с частотами в пределах от 0 до 4 Гц (Дельта-ритм), представлена как $RecA_4$. Вейвлет-коэффициенты D_1^1 , D_1^2 первого уровня разложения отражают шумовую компоненту сигнала и не рассматриваются.

Из вида частотных функций Мейера следует, что при вейвлет-разложении функция $\varphi(x)$ обеспечивает сглаживание сигнала, отсекая большой диапазон высоких частот вне промежутка $[-\pi/3, \pi/3]$, вейвлет $\psi^1(x)$ выделяет компоненту сигнала, соответствующую средним частотам $\pi/3 \leq |\omega| < 2\pi/3$, а вейвлет $\psi^2(x)$ выделяет высокочастотную компоненту сигнала, соответствующую высоким частотам $2\pi/3 \leq |\omega| < \pi$. Это хорошо демонстрирует рис. 1.

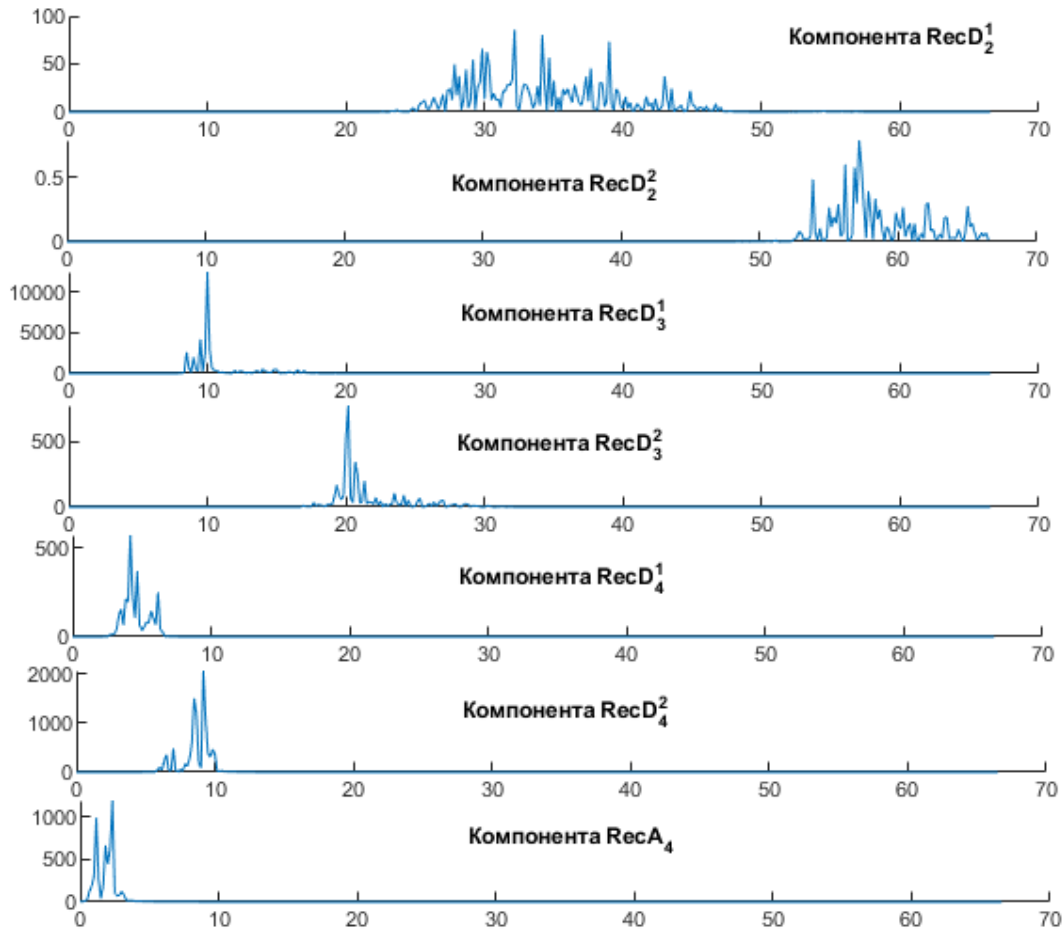


Рис. 2. Частотные спектры компонентов сигнала ЭЭГ (частота в Гц)

Fig. 2. Frequency spectra of the EEG signal components (frequency in Hz)

Для каждой компоненты сигнала мы вычисляем частотный спектр. На рис. 2 показаны графики частотных спектров всех компонент сигнала ЭЭГ. Мы видим, что частотные спектры компонент сигналов достаточно хорошо локализованы и представляют основные диапазоны ЭЭГ: $RecA_4$ – это Дельта-ритм (0–4 Гц), $RecD_4^1$ – Тета-ритм (4–8 Гц), $RecD_4^2$ и $RecD_3^1$ – Альфа-ритм (8–16 Гц), $RecD_3^2$ – Бета-ритм (16–31 Гц), $RecD_2^1$ и $RecD_2^2$ – Гамма-ритм (более 31 Гц). В каждом из диапазонов имеются ярко выраженные основные частоты: Гамма-ритм ($RecD_2^1$ и $RecD_2^2$) – 32,17, 34,17 и 57,17 Гц; Бета-ритм ($RecD_3^2$) – 20,17 Гц; Альфа-ритм ($RecD_4^2$ и $RecD_3^1$) – 9,17 и 10 Гц; Тета-ритм ($RecD_4^1$) – 4,17 и 4,67; Дельта-ритм ($RecA_4$) – 2,33 и 1,17 Гц. Эти частоты отличаются от полученных в работе [3] при исследовании ЭЭГ обычным вейвлетом Мейера.

Заключение

В работе построены вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные обычным ($N = 2$) вейвлетам Мейера. В случае $N = 3$ показано их применение для исследования ЭЭГ. Получено разложение сигнала ЭЭГ на основные частотные ритмы и исследованы их частотные характеристики. На каждом этапе разложения сигнал разбивается на три компоненты, одна из которых является сглаженной версией сигнала, другая отражает высокочастотную часть сигнала, а третья отражает промежуточные частоты. В общем случае сигнал разбивается на N компонент с разными частотными характеристиками. Это дает более широкие возможности изучения частотных компонент сигнала, чем в обычном случае $N = 2$, когда сигнал раскладывается только на одну низкочастотную и одну высокочастотную части. Результаты показывают, что вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования больше двух позволяет получить новые числовые характеристики сигналов, что подтверждает перспективность использования таких вейвлетов для анализа данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А. Вейвлет-анализ в нейродинамике // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939
2. Yumatov E.A., Hramov A.E., Grubov V.V., Glazachev O.S., Dudnik E.N., Karatygin N.A. Possibility for recognition of psychic brain activity with continuous wavelet analysis of EEG // Journal of Behavioral and Brain Science (JBBS). 2019. V. 9, № 3. P. 67–77.
3. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 54–61.
4. Siddiqi A.H., Sevindir H.K., Yazici C., Kutlu A., Aslan Z. Spectral Analysis of Eeg Signals by Using Wavelet and Harmonic Transforms // İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi. 2014. V. 3 (9). P. 1–20.
5. Rahman M.A., Khanam F., Ahmad M., Uddin M.S. Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation // Brain Informatics. 2020. V. 7/7. P. 1–11.
6. Магруппов Т.М., Талатов Е.Т., Абдихаликов С.П., Рипка Д.С. Обработка и анализ показателей электрокардиограмм на основе вейвлет-преобразования // XIV Международная научная конференция «Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии ФРЭМЭ-2020»: доклады. Владимир; Суздаль, 2020. Кн. 1. С. 316–319.
7. Lung C.C., Sudirman R., Hussin S.S. Feature extraction of EEG signal using wavelet transform for autism Classification // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2015. V. 10, № 19. P. 8533–8540.
8. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с.
9. Podkur P.N., Smolentsev N.K. About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N . URL: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>
10. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2013. 628 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2020 г.

Podkur P.N., Smolentsev N.R. (2021) MEYER WAVELETS WITH SCALING FACTOR $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 81–89

DOI: 10.17223/19988605/56/9

In this paper, we construct wavelets with a scaling factor $N > 2$, similar to the usual ($N = 2$) Meyer wavelets, and give an example of their use for signal analysis. The first part of the work gives a brief introduction to the theory of wavelets with a scaling factor $N > 2$. In the main part of the work, Meyer wavelets with a scaling factor $N > 2$ are constructed and the results of their use for studying the electroencephalogram (EEG) are presented. Meyer wavelets are constructed by smoothing at the discontinuity points of the frequency functions of Shannon wavelets with a scaling factor N . Since the Shannon wavelets correspond to ideal filters, the constructed Meyer wavelets are also infinitely differentiable and provide very good frequency localization of signal components in the wavelet decomposition.

For EEG analysis, Meyer wavelets $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$ and $\psi^2(x)$ with a scaling factor $N = 3$ were used. The digitized EEG signal was recorded on a high-resolution electroencephalograph (500 samples per second), we use a fragment of it 3000 samples long (6 sec). When a signal is represented by an array $S = A_0 = \{a_n\}$, then its wavelet decomposition gives the approximation coefficients $A_1 = \{a_{1,n}\}$, the detail coefficients $D_1^1 = \{d_{1,m}^1\}$ of the wavelet $\psi^1(x)$, and the detail coefficients $D_1^2 = \{d_{1,m}^2\}$ of the wavelet $\psi^2(x)$.

In multilevel wavelet analysis, the wavelet decomposition procedure is applied repeatedly to the A_k weights of the approximation coefficients:

$$S = A_0 \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\} \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, D_2^2, A_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, \dots, D_M^1, D_M^2, A_M\}.$$

For studying the properties of the signal S , its components $RecD_j^k$ are of greater interest, which are obtained when the reconstruction procedure is applied to only one set of coefficients D_j^k , assuming that the remaining coefficients are equal to zero. In this work, the wavelet decomposition of the EEG signal to the 4th level is carried out. The components of signal decomposition are found using truncated Meyer wavelet filters. The results show that the frequency spectra of the signal components are well localized and represent the main rhythms that are usually detected in medical EEG studies using Fourier analysis methods. In our case: $RecA_4$ is the Delta rhythm (0–4 Hz); $RecD_4^1$ is the Theta rhythm (4–8 Hz); $RecD_4^2$ and $RecD_3^1$ is the Alpha rhythm (8–16 Hz); $RecD_3^2$ is the Beta rhythm (16–31 Hz); $RecD_2^1$, and $RecD_2^2$ is the Gamma rhythm (more than 31 Hz). Thus, wavelet analysis with a scaling factor of more than two allows one to decompose a signal into a number of components with good frequency localization and obtain new numerical characteristics of signal.

Keywords: Meyers wavelets; EEG wavelet analysis; wavelets with scaling factor N .

PODKUR Paulina Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: paulina.podkur@gmail.com

SMOLENTSEV Nikolay Konstantinovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kemerovo State University, Russian Federation).

E-mail: smolennk@mail.ru

REFERENCES

1. Pavlov, A.N., Khramov, A.E., Koronovsky, A.A., Sitnikova, E.Yu., Makarov, V.A. & Ovchinnikov, A.A. (2012) Wavelet analysis in neurodynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 182(9). pp. 905–939.
2. Yumatov, E.A., Hramov, A.E., Grubov, V.V., Glazachev, O.S., Dudnik, E.N. & Karatygin, N.A. (2019) Possibility for recognition of psychic brain activity with continuous wavelet analysis of EEG. *Journal of Behavioral and Brain Science (JBBS)*. 9(3). pp. 67–77. DOI: 10.4236/jbbs.2019.93006
3. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2016) Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 54–61.
4. Siddiqi, A.H., Sevindir, H.K., Yazici, C., Kutlu, A. & Aslan, Z. (2014) Spectral Analysis Of Eeg Signals By Using Wavelet And Harmonic Transforms. *İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi*. 3(9). pp. 1–20.
5. Rahman, M.A., Khanam, F., Ahmad, M. & Uddin, M.S. (2020) Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation. *Brain Informatics*. 7/7. pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40708-020-00108-y
6. Magrupov, T.M., Talatov, E.T., Abdikhalikov, S.P. & Ripka, D.S. (2020) [Processing and analysis of electrocardiogram indicators based on wavelet transform]. *Fizika i radioelektronika v meditsine i ekologii FREME-2020* [Physics and Radioelectronics in Medicine and Ecology – FREM'2020]. Vol. 1. Vladimir; Suzdal. pp. 316–319.
7. Lung, C.C., Sudirman, R. & Hussin, S.S. (2015) Feature extraction of EEG signal using wavelet transform for autism Classification. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 10(19). pp. 8533–8540.
8. Daubechies, I. (1992) *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM.
9. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2007) *About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N* . [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>.
10. Smolentsev, N.K. (2014) *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB]. Moscow: DMK Press.