11. *Деундяк В. М., Косолапов Ю. В.* О некоторых свойствах произведения Шура — Адамара для линейных кодов и их приложениях // Прикладная дискретная математика. 2020. № 50. С. 72–86.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/14/36

РЕГУЛЯРНОЕ ВЕРШИННОЕ 1-РАСШИРЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ РЕШЁТОК[1]

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Предлагается схема построения вершинного 1-расширения для двухмерной решётки $n \times m$ при $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$, которое является регулярным графом степени 4. Показано, что с помощью данной схемы для некоторых решёток можно построить минимальное вершинное 1-расширение. Приведён пример графа, для которого построенное по схеме расширение не является минимальным.

Ключевые слова: *граф, решётка, отказоустойчивость, вершинное расширение.*

Безопасность вычислительных систем имеет большое значение. Отказ элементов может привести к её полной неработоспособности. Для обеспечения отказоустойчивости таких систем может применяться графовая модель. Каждому вычислительному узлу системы сопоставляется вершина графа, а связь между двумя узлами представляется ребром между соответствующими вершинами. Далее граф дополняется вершинами и рёбрами до вершинного k-расширения, которое является представлением устойчивой к отказу k узлов вычислительной системы. Будем рассматривать случай с $k = 1$.

Граф G^* является вершинным 1-расширением (В-1-Р) графа G, если G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* удалением одной вершины. Если количество вершин в G^* на 1 больше, чем в G, и среди всех В-1-Р графа G с таким числом вершин количество рёбер в G^* минимально, то G^* называется минимальным вершинным 1-расширением (МВ-1-Р) графа G [1].

Задача построения расширений графа связана с построением отказоустойчивой вычислительной системы [2, 3]. В этих работах для некоторых классов графов, таких, как цепи и циклы, предложены способы построения МВ-1-Р, однако в целом задача нахождения МВ-1-Р заданного графа является вычислительно сложной [4].

Дадим определение рассматриваемым в работе графам.

Определение 1. *Двухмерной решёткой*, или просто *решёткой* $n \times m$, называется граф, множество вершин которого состоит из пар (i, j), $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, и множество рёбер состоит из всех возможных пар вершин (u_1, v_1) и (u_2, v_2), для которых $|u_1 - u_2| = 1$ и $v_1 = v_2$ или $|v_1 - v_2| = 1$ и $u_1 = u_2$.

Пример такого графа представлен на рис. 1.

Двухмерная решётка является интересной топологией с практической точки зрения.

Теорема 1. При $n, m \geqslant 2$ для каждой решётки $n \times m$ существует регулярный граф степени 4, который является её вершинным 1-расширением. Количество дополнительных рёбер в данном расширении равно $n + m + 2$.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения госзадания (проект № FSRR-2020-0006).

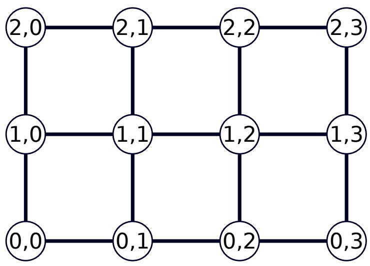


Рис. 1. Решётка 3×4

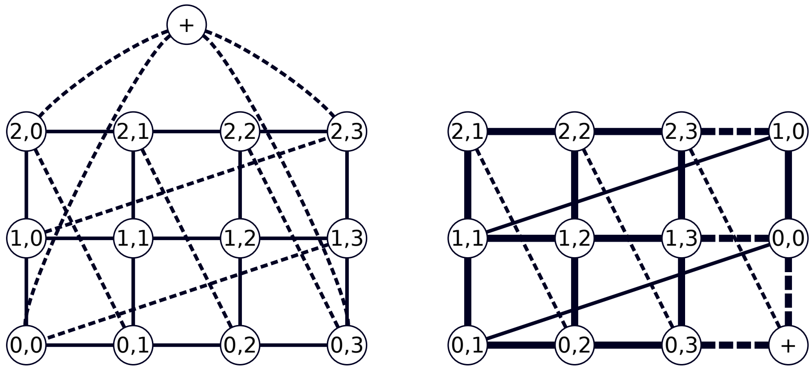
Для построения данного расширения необходимо выполнить следующие шаги:

1) Добавить рёбра между вершинами с метками $(0, i)$ и $(n-1, i-1)$, где $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.
2) Добавить рёбра между вершинами с метками $(i, m-1)$ и $(i-1, 0)$, где $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
3) Добавить вершину и соединить её с $(0, m-1)$, $(n-1, m-1)$, $(n-1, 0)$, $(0, 0)$.

Расширение, построенное по этой схеме, является вершинно-симметричным регулярным графом степени 4. Напомним, что регулярным называется граф, степени вершин которого равны, а вершинно-симметричным — граф, для каждой пары вершин u, v которого существует автоморфизм φ, такой, что $\varphi(u) = v$.

Расширения, получаемые по предложенной схеме, могут быть построены с помощью алгоритма А2 [5]. На примере решёток 3×3 и 4×5 это показано в [6]. Поэтому для реконфигурации таких 1-расширений графов можно использовать описанный в [5] способ. Под реконфигурацией понимается поиск вложения исходной решётки в полученный после удаления из расширения одной вершины граф.

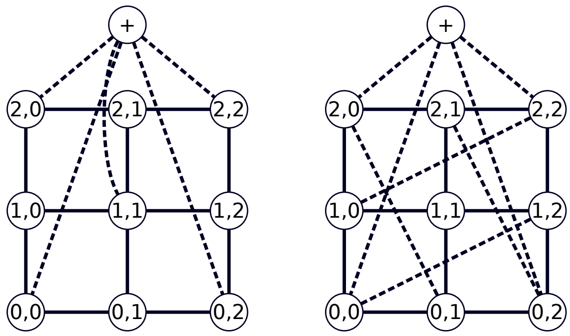
Построенное по схеме расширение решётки 3×4 представлено на рис. 2, *а*. Граф, полученный удалением любой вершины, изоморфен графу рис. 2, *б*. На рисунке выделена изоморфная исходной решётке часть.



а *б*

Рис. 2. Расширение решётки 3×4 (*а*) и её реконфигурация после отказа (*б*)

Для решётки 3×4 построенное по предложенной схеме расширение является минимальным, что подтверждено вычислительным экспериментом [7]. Однако в общем случае это неверно. Например, для решётки 3×3 минимальное расширение имеет пять дополнительных рёбер, а у расширения, построенного по схеме, их восемь. Данные расширения изображены на рис. 3.



а *б*

Рис. 3. МВ-1-Р (*а*) и построенное по предложенной схеме расширение решётки 3×3 (*б*)

Следует отметить, что для рассматриваемых в [7] решёток $2 \times m$ построенное по предложенной схеме расширение также не является минимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. No. 9. P. 875–884.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Абросимов М.Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
5. *Каравай М. Ф.* Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. I // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 159–178.
6. *Каравай М. Ф.* Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. II. Решетки и k-отказоустойчивость // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 175–189.
7. *Камил И. А. К.* Вычислительный эксперимент по построению отказоустойчивых реализаций графов с числом вершин до 9 // Intern. J. Open Inform. Technol. 2020. V. 8. No. 9. P. 43–47.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/14/37

ОБ АТТРАКТОРАХ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВОИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДВУДОЛЬНЫМ ГРАФОМ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Р. И. Пантелеев, А. В. Жаркова

Рассматривается дискретная двоичная динамическая система (S_n, f), $n > 1$, состояниями которой являются все возможные двоичные векторы длины n, с эволюционной функцией вида $f = (x_n, 0, \ldots, 0, x_1)$ и двудольным графом зависимостей.