

МЕТОДОЛОГИЯ

УДК 330.42

DOI: 10.17223/19988648/55/2

В.Г. Гребенников

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ЦЕНОВЫХ И ОТРАСЛЕВЫХ ПРОПОРЦИЙ

Целью настоящей работы является исследование одного из наиболее интересных, на наш взгляд, приложений двухсекторной модели общественной технологии для выявления соотношения между траекториями относительной цены и относительной доли продукта в совокупном выпуске на основе концепции Парето-оптимальных, или «эффективных», траекторий экономического роста (т.е. траекторий, каждая точка которых принадлежит поверхности производственных возможностей). Выведенное уравнение, которое можно интерпретировать как выражение тенденции, определяющей форму взаимосвязи между пропорциями отраслевых выпусков и цен в экономике, открывает путь к содержательному макроэкономическому анализу соотношений между указанными пропорциями в зависимости от конфигурации параметров общественной технологии A_i, α_i, a_{ij}, B и сценариев их изменений во времени.

Ключевые слова: макроэкономическая модель, кривая трансформации, выпуск, экономический рост, динамическая модель, динамический режим, модель производственных возможностей, стационарная траектория

Хорошо известны свойства макроэкономической модели, называемой в литературе как «поверхность производственных возможностей» или, для двух продуктов, – «кривая трансформации» [2, 4–6]. Линейная спецификация этой модели изучена, так сказать, вдоль и поперек, чего не скажешь о спецификациях, где выпуск отраслей задается нелинейными производственными функциями. Для экономических приложений представляется полезным выполнить соответствующий анализ хотя бы применительно к сравнительно простому варианту модели с двумя продуктами, двумя ресурсами и отраслевыми производственными функциями в спецификации Кобба–Дугласа (линейно-однородный случай). Впрочем, даже в упрощенном варианте нелинейной модели производственных возможностей анализ оказался сопряжен с довольно трудоемкими выкладками. Главное же, эта работа привела к нетривиальному выводу о том, что кривая трансформации находится в явной связи с однопродуктовой моделью технологии. Выяснилось, что кривую трансформации можно трактовать как изокванту суммарного реального чистого выпуска при заданных ресурсах, если для получения агрегатного выпуска пользоваться относительными ценами, определяемыми предельной нормой замещения чистых продуктов. Этот вывод мы считаем достаточно важным, чтобы в данной статье подвергнуть его более основательному анализу, чем это было сделано ранее [1].

Основной целью настоящей работы является исследование одного из наиболее интересных, на наш взгляд, приложений двухсекторной модели общественной технологии [3]. Речь идет о том, как динамика относительных цен на продукцию отраслей связана с соотношением отраслевых чистых выпусков. Конечная цель анализа – выявить отношение между траекториями относительной цены и относительной доли продукта в совокупном выпуске.

Указанная проблема исследуется в работе на основе концепции Парето-оптимальных, или «эффективных», траекторий экономического роста (т.е. траекторий, каждая точка которых принадлежит поверхности производственных возможностей). В рамках этой концепции соотношения цен отдельных продуктов соответствуют предельным нормам замещения данных продуктов, зависящим, с одной стороны, от продуктовой (отраслевой) структуры ВВП, и с другой – от наличных ресурсов труда и производственных фондов. Связь между инвестиционной компонентой выпуска и приростом фондов порождает семейство эффективных траекторий в указанном выше смысле. Каждая из них характеризуется совместной динамикой отраслевых и ценовых пропорций, поэтому основная проблема исследования сводится к изучению общих свойств таких траекторий.

Как отмечено выше, главной особенностью рассматриваемой модели являются нелинейные производственные функции отраслей. Даже простейшая спецификация Кобба–Дугласа порождает динамику основных переменных модели, описываемую нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, не поддающимся интегрированию в общем виде. Поэтому анализ свойств эффективных траекторий (по крайней мере, когда интерес представляют конкретные параметры траекторий, а не только общие критерии существования и устойчивости) потребовал разработки программы численных экспериментов на компьютере, рассчитанной на достаточно объемную проверку гипотез и удобства представления и анализа результатов. Данная компьютерная программа, составленная в Excel'e, представляется полезной для использования в макроэкономических исследованиях аналогичной направленности. Для начала выбран вариант двухсекторной модели, в дальнейшем предполагается расширить ее на существенно большее число секторов. Проведен анализ свойств эффективных траекторий с постоянными параметрами: предельной нормой замещения продуктов (неизменным соотношением цен), постоянной предельной нормой замещения ресурсов (постоянным соотношением ставок оплаты факторов), постоянным соотношением чистых выпусков отраслей, постоянной долей инвестиций в ВВП и т.п. Получены общие выводы об условиях сходимости таких «изотраекторий» к траекториям с постоянным темпом прироста ВВП и о характеристиках стационарных траекторий. Наибольший интерес, на наш взгляд, представляет вывод о том, что существование и устойчивость стационарных траекторий определяется межотраслевым соотношением эластичностей выпуска по фондам рассматриваемых отраслей: для отрасли, производящей продукцию инвестиционного назначения, этот параметр должен иметь меньшее значение.

1. Основные свойства кривой трансформации (статистический аспект). Прежде чем перейти непосредственно к предмету данного исследования – свойствам эффективных траекторий экономического роста, изложим в сжатой форме основные результаты анализа свойств кривой трансформации, остановившись специально на представлении последней как изокванты агрегированного реального чистого выпуска экономики в целом.

Введем обозначения. Рассматриваются две отрасли с валовыми выпусками X_1 и X_2 . Отрасли используют производственные фонды K_1 и K_2 и труд L_1 и L_2 в пределах общих объемов этих ресурсов $K = K_1 + K_2$ и $L = L_1 + L_2$. Предполагается, что производственные ресурсы, как производственные фонды, так и труд, распределяются между отраслями в любой пропорции без ограничений на скорость перетока ресурсов из отрасли в отрасль. Обозначим через k долю фондов, используемых первой отраслью, через l – долю используемого ею труда. Соответственно, доли ресурсов, используемых второй отраслью, равны $1 - k$ и $1 - l$.

Пусть, далее, валовые выпуски отраслей заданы производственными функциями:

$$Y_1 = A_1 (K_1)^{\alpha_1} (L_1)^{1-\alpha_1},$$

$$Y_2 = A_2 (K_2)^{\alpha_2} (L_2)^{1-\alpha_2}.$$

В общем случае предполагается, что постоянные эластичности выпуска по фондам α_1 и α_2 , а также параметры эффективности A_1 и A_2 в отраслях различаются.

Если заданы совокупные объемы ресурсов (K, L) , то кривая трансформации, по определению, – это множество эффективных по Парето точек валовых выпусков отраслей. Иными словами, для любого допустимого значения X_1 точка (X_1, X_2) лежит на кривой трансформации, если X_2 достигает максимального значения. Проанализировав это требование, мы приходим к основному соотношению поверхности производственных возможностей для рассматриваемого случая:

$$k = \frac{l}{B \cdot (1-l) + l}, \text{ где } B = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2}{(1-\alpha_2)\alpha_1}.$$

Уточним смысл приведенной выше зависимости. Пусть задано произвольное распределение ресурсов K и L между отраслями k, l . Производственные функции отраслей однозначно связывают это распределение с выпусками X_1, X_2 . При заданном распределении труда в пропорции l критерию Парето отвечает только один способ распределения производственных фондов, зависящий от l в конфигурации, определяемой параметрами производственных функций отраслей. Все другие значения соответствуют точкам, лежащим внутри области, ограниченной кривой трансформации

(т.е. неэффективным). Выясняется, что в основе выбора эффективной пропорции распределения данного ресурса при известной пропорции распределения другого ресурса лежит простое правило – на кривой трансформации отраслевые предельные нормы замещения ресурсов совпадают:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \quad \eta_1 = \frac{dK_1}{dL_1}, \quad \eta_2 = \frac{dK_2}{dL_2}.$$

Нетрудно убедиться, что в противном случае перераспределением ресурсов можно добиться увеличения выпуска продукции одной отрасли, не уменьшая выпуска другой, что является критерием неэффективности исходного распределения ресурсов.

Положив $U(l) = B(1-l) + l(1-B) + B$, получаем выражения для валовых выпусков отраслей:

$$X_1 = C_1 \frac{l}{U^{\alpha_1}},$$

$$X_2 = C_2 \frac{1-l}{U^{\alpha_2}},$$

где

$$B = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2}{(1-\alpha_2)\alpha_1}, \quad C_1 = A_1 K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1}, \quad C_2 = A_2 K^{\alpha_2} L^{1-\alpha_2} B^{\alpha_2}.$$

Из вышеприведенного основного соотношения вытекают следующие (важные для экономических приложений) свойства кривой трансформации.

Введем понятие «вмененные издержки» производства i -й отрасли. Оно отражает предельную величину уменьшения выпуска другой отрасли на единицу увеличения продукции данной отрасли (иными словами, показывает утерянные выгоды альтернативного использования ресурсов K и L , связанные с увеличением производства продукции i -й отрасли). Вмененные издержки производства первой отрасли в нашей производственной модели определяются формулой:

$$\delta_X = \frac{dX_2}{dX_1} = - \frac{X_2 \cdot l(1-\alpha_2)}{X_1 \cdot (1-l)(1-\alpha_1)}.$$

Обозначим цену продукции первой отрасли через p_1 , цену продукции второй отрасли – через p_2 . Чтобы уточнить связь вмененных издержек с относительной ценой, перейдем к кривой трансформации, определенной для чистых выпусков отраслей (назовем ее «нетто-кривая», в отличие от «брутто-кривой», определенной для валовых выпусков). До сих пор предполагалось, что производство отраслей связано между собой лишь косвенно, через параметры распределения ресурсов труда и капитала. Усложняя картину нашей условной экономики, введем промежуточный оборот продукции, описываемый коэффициентами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Тогда аналитическое выражение нетто-кривой имеет вид:

$$\frac{Y_1 \cdot (1 - a_{22}) + Y_2 a_{12}}{D} = A_1 (kK)^{\alpha_2} \cdot (IL)^{1-\alpha_2},$$

$$k = \frac{l}{B \cdot (1-l) + l}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для нетто-кривой имеет смысл также ввести понятие вмененных издержек, трактуя его аналогично брутто-вмененным издержкам:

$$\delta_Y = \frac{\partial Y_2}{\partial Y_1} = \frac{\delta_X \cdot (1 - a_{22}) - a_{21}}{1 - a_{11} - \delta_X \cdot a_{12}}$$

или

$$\delta_X = \frac{\delta_Y \cdot (1 - a_{11}) + a_{21}}{\delta_Y a_{12} + (1 - a_{22})}.$$

Рассмотрим цены p_1 и p_2 , для которых отраслевые выпуски максимизируют сумму $Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2$. Необходимое условие для этого выражается соотношением:

$$-\frac{p_1}{p_2} = \delta_Y.$$

Будем называть такие цены сопряженными. Рассмотрим, как выражается через относительную сопряженную цену и, соответственно, через вмененные издержки соотношение удельных добавленных стоимостей продукции, производимой отраслями. По определению, вектор удельной добавленной стоимости есть

$$V_1 = p_1(1 - a_{11}) - p_2 a_{21},$$

$$V_2 = p_2(1 - a_{22}) - p_1 a_{12}.$$

Учтя необходимое условие сопряженности цен, имеем

$$\frac{V_1}{V_2} = -\delta_X.$$

Следовательно, если мы находимся на кривой трансформации, нетто-вмененные издержки по модулю совпадают с соотношением сопряженных цен, а брутто-вмененные издержки – с соотношением удельных добавленных стоимостей продуктов.

Таким образом, произвольная точка на кривой трансформации валовых выпусков максимизирует суммарную добавленную стоимость отраслей (весами линейной целевой функции, в отношении которой вектор валовых выпусков является оптимальным, т.е. лежит на кривой трансформации, является вектор удельных добавленных стоимостей). Соответствующая точка на кривой трансформации чистых выпусков максимизирует национальный доход или скалярное произведение векторов чистых выпусков и цен продукции (весами целевой функции являются цены). В результате выполняется одно из главных макроэкономических тождеств: национальный доход равен суммарной добавленной стоимости отраслей экономики.

Это тождество, очевидно, должно сохраняться для всех точек пространства производственных возможностей.

Следующее утверждение касается связи между собой цен и факторных издержек. Пусть известны цены p_1 и p_2 , сопряженные с вектором чистого выпуска (Y_1, Y_2) на нетто-кривой трансформации, т.е. удовлетворяющие условию равенства относительной цены и вмененных издержек. Введем величины λ_K, λ_L , удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_K} = \eta, \quad \eta = \frac{K}{L} \cdot \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{U(I)},$$

где η – предельная норма замещения труда капиталом [напомним, что выравнивание этой нормы по отраслям – необходимое условие эффективности выпуска (X_1, X_2) , следовательно, и (Y_1, Y_2)]. Величины λ_K, λ_L можно интерпретировать как средние для нашей двухсекторной экономики предельные продукты труда и капитала (в номинальном измерении).

Далее, определим вектор удельных факторных издержек (V'_1, V'_2) :

$$V'_1 = \frac{\lambda_L L_1 + \lambda_K K_1}{X_1}, \quad V'_2 = \frac{\lambda_L L_2 + \lambda_K K_2}{X_2},$$

где (X_1, X_2) – вектор валового выпуска, соответствующий вектору чистого выпуска (Y_1, Y_2) .

Наконец, определим вектор факторных цен (p'_1, p'_2) :

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_1 a_{11} + p'_2 a_{21} + V'_1, \\ p'_2 &= p'_2 a_{22} + p'_1 a_{12} + V'_2. \end{aligned}$$

Нас интересует, как соотносятся векторы p, V , с одной стороны, и p', V' – с другой.

Приведем (опуская промежуточные выкладки, основывающиеся на вышеуказанных определениях) выражения для p'_1 и p'_2 :

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{V'_1(1 - a_{22}) + V'_2 a_{21}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} a_{12}}, \\ p'_2 &= \frac{V'_1 a_{12} + V'_2(1 - a_{11})}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} a_{12}}. \end{aligned}$$

Отсюда соотношение цен $\frac{p'_1}{p'_2}$ равно

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{lX_2(1-a_{22}) + (1-l)X_1a_{21} \frac{(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_2)}}{lX_2a_{12} + (1-l)X_1(1-a_{11}) \frac{(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_2)}}.$$

Учитывая, что $\delta_X = -\frac{lX_2 \cdot (1-\alpha_2)}{(1-l)X_1 \cdot (1-\alpha_1)}$, имеем

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{(1-l)X_1[a_{21} - \delta_X(1-a_{22})] \frac{(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_2)}}{(1-l)X_1[(1-a_{11}) - \delta_X a_{12}] \frac{(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_2)}} = -\delta_Y.$$

Итак, поскольку $\frac{p_1}{p_2} = -\delta_Y$, окончательно получаем

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Соотношения сопряженных и факторных цен совпадают.

2. Кривая трансформации как изокванта агрегированного выпуска.

Перейдем теперь к важнейшему в нашем исследовании утверждению относительно кривой трансформации – ее трактовке как изокванты агрегированного выпуска. Пусть цена второго продукта p_2 является константой, т.е. не изменяется вдоль кривой трансформации, задавая масштаб цен для экономики в целом, а цена p_1 определяется из соотношения $p_1 = -p_2\delta_Y$. В этом случае нетрудно убедиться в том, что номинальная величина национального дохода $Y = p_1Y_1 + p_2Y_2$ не остается постоянной в различных точках нетто-кривой трансформации. Соотношение сопряженных цен определено для каждой отдельной точки, но можно ли найти такое правило учета изменения масштаба цен от точки к точке, что национальный доход, измеренный в таких ценах с непрерывно корректируемым масштабом, сохраняет постоянное значение во всех точках нетто-кривой, т.е. не зависит от l ?

Прежде всего мы убеждаемся в том, что если соотношение цен удовлетворяет условию $\frac{p_1}{p_2} = -\delta_Y$, величина $p_1dY_1 + p_2dY_2$ равна 0 в любой точке нетто-кривой трансформации. Это очевидно следует из определения вмененных издержек, причем для произвольной p_2 . Действительно,

$$p_1 \frac{dY_1}{dl} + p_2 \frac{dY_2}{dl} = p_2 \left(\frac{dY_2}{dl} - \delta_Y \frac{dY_1}{dl} \right),$$

и сумма в скобках равна 0¹.

¹ В работе [1] выбран неоправданно сложный путь доказательства этого вывода, исходя из индекса физического объема Ласпейраса.

Указанный факт можно интерпретировать как постоянство «физического объема» совокупного чистого продукта во всех точках нетто-кривой трансформации. Если pY – это совокупная величина номинального чистого выпуска отраслей экономики, где p есть вектор цен и Y есть вектор выпусков, то прирост этой величины при переходе от l к $l + dl$ складывается как сумма $dpY + p dY$, где первое слагаемое – прирост номинального чистого продукта за счет изменения цен, второе – за счет изменения отраслевых выпусков. На кривой трансформации второе слагаемое равно 0.

Отсюда возникает идея подхода к определению величины «физического объема выпуска» в агрегированном выражении (обозначим ее как Y) – это такое значение номинальной величины совокупного чистого продукта, которое определяется путем пересчета p_2 таким образом, чтобы элиминировать фактор изменения цен, т.е. обеспечить условие $dpY = 0$.

Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению:

$$Y_1 \frac{dp_1}{dl} + Y_2 \frac{dp_2}{dl} = (Y_2 - \delta_y Y_1) \frac{dp_2}{dl} - p_2 Y_1 \frac{d\delta_y}{dl} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения даст «откорректированные» значения цены p_2 в любой точке нетто-кривой трансформации, с помощью которых определяется искомая величина Y . Заметим, однако, что для получения аналитического выражения этой величины (что нас прежде всего интересует) нет необходимости прибегать к интегрированию¹. Поскольку Y не зависит от l , можно воспользоваться его выражением для точки $l = 0$, соответственно $p_2(0)$, где последняя величина задана в качестве произвольной постоянной. Итак, по определению, величина Y равна номинальному значению чистого выпуска в точке $l = 0$. Опуская промежуточные выкладки, приходим к выражению:

$$Y = C \frac{X_2}{1 - a_{11} - \delta_x a_{12}},$$

где $C = D(E - A)p_2$, D – определитель технологической матрицы $E - A$.

Величины X_2 и δ_x взяты в значениях, соответствующих $l = 0$. Выразив их через параметры модели и ресурсы K, L , получаем формулу:

$$Y = CB^{\alpha_2} \frac{a_1 K^{\alpha_2} L^{(1-\alpha_2)}}{1 - a_{11} + a_{12} \left(\frac{K}{L} \right)^{(\alpha_2 - \alpha_1)} B^{\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_1)}}}.$$

¹ При выполнении численных экспериментов на компьютерной модели для определения откорректированных значений p_2 мы применили рекуррентное соотношение, вытекающее из приравнивания цепного индекса цен единице.

Данное выражение не преобразуется ни в одну из известных спецификаций макроэкономической производственной функции. Определенными ухищрениями можно свести его к своего рода «гибриду» нелинейно однородных функций Кобба–Дугласа и ПЭЗ (с постоянной эластичностью замещения), но мы на этой процедуре останавливаться не будем. Важно констатировать другое: предположение о Парето-оптимальности комбинаций отраслевых выпусков дает возможность решить задачу агрегирования отраслевых производственных функций в макроэкономической функции чистого выпуска, параметры которой достаточно очевидно связаны с отраслевыми параметрами потенциальных валовых выпусков и коэффициентами межотраслевых связей. Аналитическое выражение этой связи, несомненно, полезно как инструмент интеграции отраслевого и макроэкономического уровней исследований процессов воспроизводства. Заметим также, что подход, примененный в данной работе, пригоден и для построения агрегированной производственной функции для валового выпуска, с той разницей, что вместо цен p_1 и p_2 используется вектор добавленных стоимостей V_1, V_2 .

Рассмотрим эластичности предложенной выше агрегированной функции реального чистого выпуска по K и L (α и δ соответственно):

$$\alpha = \frac{K}{Y} \frac{dY}{dK} = \frac{\alpha_2(1 - a_{11}) - \alpha_1 \delta_x a_{12}}{1 - a_{11} - \delta_x a_{12}},$$

$$\beta = \frac{L}{Y} \frac{dY}{dL} = \frac{(1 - \alpha_2)(1 - a_{11}) - (1 - \alpha_1) \delta_x a_{12}}{1 - a_{11} - \delta_x a_{12}}.$$

Поскольку $\delta_x < 0$, параметры α и β суть арифметические средние (с переменными весами, зависящими от K и L) постоянных отраслевых эластичностей по фондам (α_1 и α_2) и труду ($1 - \alpha_1$, $1 - \alpha_2$). Изменение указанных «макропараметров» во времени определяется динамикой ресурсов, порождающей ряд сменяющих друг друга кривых трансформации. Некоторые результаты исследования, посвященного динамическому аспекту «модели производственных возможностей», изложены в следующем разделе.

3. Модель экономического роста с эффективными траекториями.

Введя дифференциальные уравнения, задающие изменения производственных ресурсов K и L во времени, мы переходим к модели, где поверхность производственных возможностей приобретает динамику. В двухпродуктовом случае это означает сдвиг кривой трансформации в промежутке времени $[t, t + dt]$; тем самым обновляется спектр всех потенциальных комбинаций отраслевых выпусков, включая те из них, которые принадлежат границе области производственных возможностей, т.е. удовлетворяют критерию Парето-оптимальности (по принятой терминологии, являются ее «эффективными точками»). Понятно, что сам по себе сдвиг кривой трансформации не предрешает, как складывается конкретная траектория изме-

нения отраслевых выпусков. В каждый момент времени он определяет область потенциальных текущих перемещений из точки в точку.

В данной работе исследуются только траектории $(X_1(t), X_2(t))$, все точки которых являются эффективными в указанном выше смысле, т.е. принадлежат кривой трансформации для текущего момента времени. Такие траектории мы называем эффективными, или Парето-оптимальными (с той оговоркой, что совокупность точек любой отдельной траектории, строго говоря, не образует Парето-оптимального множества точек). Кроме того, рассматриваются только такие эффективные траектории, которые характеризуются постоянством значений некоторых важнейших структурных параметров модели (таких, как вмененные издержки δ_y или δ_x , предельная норма замещения труда фондами η , пропорция отраслевого распределения труда l и отраслевых выпусков X_1, X_2 и т.п.).

Подобные траектории поддаются аналитической обработке, тогда как снятие гипотезы постоянства структурного параметра усложняет эту задачу настолько, что для получения выводов, имеющих общий интерес для экономической теории, лучше пользоваться методами компьютерного экспериментирования. Упомянутая выше компьютерная программа была разработана нами специально для этой цели и рассчитана не только на получение достаточно доказательных (в смысле диапазона рассчитываемых вариантов) и точных с вычислительной точки зрения экспериментов, но и на удобства обработки результатов и наглядность их представления. Кроме того, если иметь в виду, что решение дифференциальных уравнений недостижимо даже для траекторий с постоянными структурными параметрами, исследование общих свойств эффективных траекторий также и этого типа целесообразно выполнять с участием компьютерного эксперимента: выявлять с его помощью заслуживающие внимания эффекты и свойства, а затем пытаться найти их аналитическое объяснение или обоснование (насколько это возможно). В данной работе была принята именно такая тактика исследования интересовавшего нас предмета. Наиболее интересным из эффектов, лежащих отнюдь не близко к поверхности, было «индуктивно», т.е. в серии численных экспериментов, выявленное необходимое условие существования стационарного режима экономического роста – имеется в виду рост с постоянным темпом, совпадающим с темпом прироста труда как экзогенного производственного фактора. Ниже приводится аналитическое обоснование этого условия.

Будем считать, что одна из отраслей (допустим, первая) производит только товары и услуги инвестиционного назначения, вторая – только потребительские блага. Это – обычное допущение для теоретических двухсекторных моделей. В компьютерном варианте, где возможности получения общих выводов сохраняются и при существенном усложнении конструкции, мы ввели более широкое предположение относительно вкладов отраслей в ресурсы для инвестиций, описав их в форме функции с постоянной эластичностью замещения, аргументами которой выступают отрас-

левые выпуски. Эксперименты, в ходе которых исследовалось, как вариации параметров указанной функции влияют на сходимость эффективных траекторий к стационарным режимам, не обнаружили принципиальных отличий от простейшего случая, когда отрасли не взаимозаменяемы в качестве поставщиков инвестиционных товаров. Во всяком случае, центральное необходимое условие сходимости к стационарной траектории из произвольных начальных точек, которое будет выведено ниже аналитическим путем для простого варианта, сохраняет силу и для усложненного. Разумеется, степень взаимозаменяемости отраслей сказывается на характеристиках стационарных режимов, что на данном этапе исследований было для нас менее важно.

Что касается динамики трудовых ресурсов, то в рассматриваемой модели (включая ее компьютерный вариант) принято простейшее предположение об их экзогенно определяемом росте с постоянным темпом n .

Таким образом, модель экономического роста с эффективными траекториями описывается системой уравнений, приведенной ниже. Часть их относится к статическому аспекту (они задают кривую трансформации для каждого текущего момента времени), другие – к динамическому аспекту (они задают текущий сдвиг кривой трансформации и выбор точки на новой кривой, т.е. функцию $l(t)$ со всеми определяемыми ею переменными – $X_1, X_2, Y_1, Y_2, \delta, \eta$ и др.):

$$\begin{aligned} X_i(K, L, l) &= A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{(1-\alpha_i)}, 0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, \\ K_1 &= kK, K_2 = (1-k)K, L_1 = lL, L_2 = (1-l)L, \\ k &= \frac{l}{U}, U = l(1-B) + B, Y_1 = (1-a_{11})X_1 - a_{12}X_2, \\ Y_2 &= -a_{21}X_1 + (1-a_{22})X_2, \frac{dK}{dt} = Y_1, \\ \frac{dL}{dt} &= nL, \delta_y(K, L, l) = \text{const}, K(0) = K_0, L(0) = L_0, l(0) = l_0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что, как следует из соотношений, связывающих структурные переменные $\delta_y, \eta, \frac{X_1}{X_2}$, гипотеза о постоянстве одной из них тождественна подобной гипотезе относительно любой другой. В рассмотренной спецификации модели выбрана постоянная δ_y . Имеется в виду, что при переходе от $l(t)$ к $l(t+dt)$ или, соответственно, от одного фиксированного положения на кривой трансформации к положению на сместившейся кривой всякий раз выбирается такое значение $l(t)$, что величина δ_y остается неизменной, т.е. такой же, какой она была в начальный момент времени соответственно «стартовому» значению l_0 . Разумеется, эффективные траектории, исходящие из разных точек на исходной кривой трансформации, будут сохранять неизменными разные значения издержек возмещения.

Доказываемое здесь утверждение состоит в том, что необходимым условием сходимости траектории экономического роста с постоянными структурными параметрами к стационарной траектории является выполнение неравенства $\alpha_2 > \alpha_1$.

Ясно, что знак указанного строгого неравенства зависит от того, какая отрасль выбрана в качестве «поставщика» инвестиционных ресурсов, формирующих прирост производственных фондов.

Чтобы не усложнять изложение доказательства приведенного утверждения громоздкими выкладками, возьмем сравнительно простой случай $Y_i = X_i$. Это упрощение не меняет сути дела.

Сначала рассмотрим, как гипотеза $\delta_y = \text{const}$ (а значит, $\delta_x = \text{const}$) сказывается на динамике базовой переменной $l(t)$.

Отправляясь от выражения:

$$\delta_x = \frac{A_1}{A_2} B^{\alpha_2} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha_2-\alpha_1} U^{\alpha_1-\alpha_2},$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\dot{\delta}_x}{\delta_x} = (\alpha_1 - \alpha_2) \left[n - \frac{\dot{K}}{K} + \frac{l(1-B)}{l(1-B)+B} \frac{\dot{l}}{l} \right],$$

где точка над символом, как обычно, обозначает производную соответствующей переменной по времени.

Дальнейший анализ ведется для $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Рассматривать случай $\alpha_1 = \alpha_2$ не имеет смысла, так как кривая трансформации вырождается в прямую, а δ_x сводится к постоянной величине $\delta_x = -A_2/A_1$. Следовательно, правило $\delta_x = \text{const}$ в этом случае не определяет однозначно переход от $l(t)$ к $l(t+dt)$, а значит, и траекторию рассматриваемой системы переменных в целом.

Итак, из предположения $\dot{\delta}_x = 0$ следует

$$\frac{\dot{l}}{l} = (k - n) \frac{l(1-B)+B}{l(1-B)}, \text{ где } k = \frac{\dot{K}}{K}.$$

Далее, используя выражение $X_1 = A_1 K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1} U^{-\alpha_1}$, приходим к дифференциальному уравнению для X_1 :

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} = \alpha_1 k + (1 - \alpha_1)n + \frac{l(1-B)(1-\alpha_1)+B}{l(1-B)+B} \frac{\dot{l}}{l}.$$

Подставив в него полученное ранее соотношение для $\frac{\dot{l}}{l}$, имеем:

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} - n = (k - n) \frac{l(1 - B) + B}{l(1 - B)}$$

или

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} - n = (k - n) \frac{l(\alpha_1 - \alpha_2) + (1 - \alpha_1)\alpha_2}{l(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

следовательно,

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} - k = (k - n) \frac{B}{l(1 - B)}.$$

До сих пор не учитывалась функция текущего прироста производственных фондов $\dot{K} = X_1$. Введя ее в рассмотрение, т.е. имея в виду, что

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{X}_1}{X_1} - k, \text{ мы приходим к соотношению:}$$

$$\dot{k} = \frac{B}{l(1 - B)}(k - n)k.$$

Из него очевидно следует, что $|k - n|$ уменьшается только при $1 - B < 0$. Поскольку $1 - B = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(1 - \alpha_2)\alpha_1}$, это значит, что сходимость эффективной траектории $X_1(t)$ к стационарной (характеризующейся постоянным темпом прироста n) требует соблюдения условия $\alpha_2 > \alpha_1$. Сформулированное выше утверждение доказано. Повторяем, что его обоснование для более общего случая $X_1 \neq Y_1$ отличается только громоздкостью выкладок¹, поэтому мы не приводим его ради экономии места.

Теперь обратимся к характеристикам стационарной траектории экономического роста. Ясно, что она характеризуется постоянным значением базовой переменной l . Обозначим его как l^* (звездочка везде указывает на стационарное значение соответствующей переменной). Ему соответствуют постоянные значения пропорций $K/L, X_1/X_2, Y_1/Y_2$. Задача заключается в аналитическом выводе формулы для l^* при известных начальных условиях – значениях K_0, L_0, l_0 в момент времени $t = 0$. Того, что в рассматриваемой версии модели известно о стационарной траектории – постоянный темп экономического роста n (вровень с ростом трудового ресурса)², а

¹ При этом, разумеется, должно быть принято допущение, что технологическая матрица является продуктивной.

² Это является очевидным следствием линейной однородности производственных функций обеих отраслей.

также совпадение величины δ_y на стационарной траектории (δ_y^*) с ее начальным значением $\delta_y(0)$, – оказывается достаточно для решения этой задачи.

Для упрощения выкладок и итоговой формулы для l^* последнее условие более удобно заменить равенством $\eta^* = \eta_0$, так как выражение для η имеет существенно более простой вид по сравнению с δ_y , и, как уже отмечалось, гипотезы постоянства δ_y и η эквивалентны.

Итак, будем исходить из уравнений:

$$\frac{\dot{K}}{K} = n,$$

$$\eta^* = \eta_0.$$

Из первого уравнения следует (поскольку чистый прирост производственных фондов принят равным чистому продукту первой отрасли)

$$\frac{(1-a_{11})X_1 - a_{12}X_2}{K} = n.$$

Из второго уравнения:

$$\left(\frac{K}{L}\right)^* \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1} \frac{1}{U^*} = \frac{K_0}{L_0} \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1} \frac{1}{U_0},$$

т.е.

$$l = \left(C \left(\frac{K}{L} \right)^* - B \right) \frac{1}{1-B}, \text{ где } C = \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1} \frac{1}{\eta_0}, U^* = U(l^*), U_0 = U(l_0).$$

Отсюда получаем стационарные значения $\left(\frac{K}{L}\right)^*$ и l^* :

$$\left(\frac{K}{L}\right)^* = \frac{B(1-a_{11})A_1C^{-\alpha_1} + a_{12}A_2B^{\alpha_2}C^{-\alpha_2}}{(1-a_{11})A_1C^{1-\alpha_1} + a_{12}A_2B^{\alpha_2}C^{1-\alpha_2} - n(1-B)},$$

$$l^* = \frac{a_{12}A_2B^{\alpha_2}C^{1-\alpha_2} + nB}{(1-a_{11})A_1C^{1-\alpha_1} + a_{12}A_2B^{\alpha_2}C^{1-\alpha_2} - n(1-B)}.$$

Последняя формула хотя и не поддается дальнейшему упрощению, все же представляет полезный инструмент для теоретического анализа процесса экономического роста. Преобразуем ее к виду, где наглядно просматривается связь между стационарным и начальными значениями переменной l (соответственно l^* и l_0):

$$l^* = l_0 \frac{U_0 \left(a_{12} \frac{X_2^0}{K_0} + n \right) - l_0 n}{(1 - a_{11}) \frac{X_1^0}{K_0} U_0 - l_0 n},$$

где X_1^0, X_2^0 – начальные значения X_1, X_2 .

Когда $\left(\frac{\dot{K}}{K} \right)_0 = \frac{\dot{L}}{L} = n$, имеем $a_{12} \frac{X_2^0}{K_0} + n = (1 - a_{11}) \frac{X_1^0}{K_0}$, следовательно, в

этом случае $l^* = l_0$.

Таким образом, стационарное значение переменной l зависит от ее начального значения. Продemonстрируем эту зависимость на графике (рис. 1).

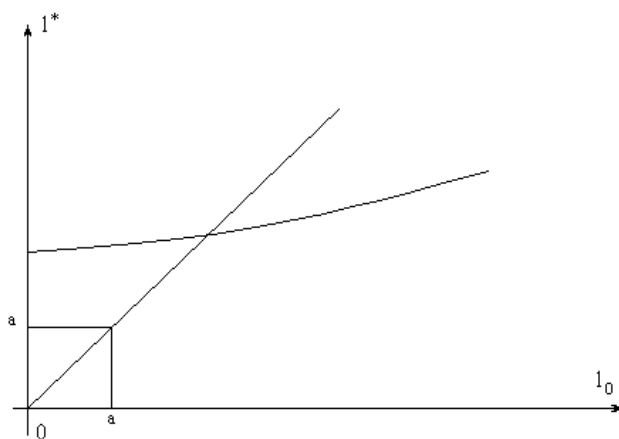


Рис. 1

Наконец, выведем соотношение, связывающее стационарные значения p_1/p_2 и X_1/X_2 .

Исходя из условия сопряженности цен $\frac{p_1}{p_2} = -\delta_y$ (где δ_y и δ_x связаны известным соотношением) и подставив сюда полученное выше выражение для l^* , заменив при этом η на δ_x , приходим к уравнению:

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{1}{\delta_x} \frac{a_{12} A_2 B^{\alpha_2} C^{1-\alpha_2} + nB}{(1 - a_{11}) A_1 C^{1-\alpha_1} - n},$$

где

$$C = \left[-\delta_x \frac{A_1}{A_2} B^{-\alpha_2} \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}}, \delta_x = \frac{a_{21} - \frac{p_1}{p_2} (1-a_{11})}{1 - a_{22} - \frac{p_1}{p_2} a_{12}}.$$

Выведенное уравнение, поскольку речь идет о стационарных значениях, можно интерпретировать как выражение тенденции, определяющей форму взаимосвязи между пропорциями отраслевых выпусков и цен в экономике, для которой применима концепция Парето-оптимальных состояний и траекторий. Это открывает путь к содержательному макроэкономическому анализу соотношений между указанными пропорциями в зависимости от конфигурации параметров общественной технологии A_i, α_i, a_{ij}, B и сценариев их изменений во времени.

Литература

1. Андреев А.Н., Гребенников В.Г., Николаев Л.К. Кривая трансформации: статический и динамический аспекты. М. : ЦЭМИ РАН, 2000. 33 с.
2. Бельский В.З. Стационарные динамические модели управления экономическими системами : Методология, аналитические и вычислительные методы : дис. ... д-ра физ.-мат. наук в форме научного доклада. М., 1992. 79 с.
3. Браун Мюррей. Теория и измерение технического прогресса / пер. с англ. В.В. Зотова. М. : Статистика, 1971. 208 с.
4. Винокуров Е.Ф. Куда может вывезти кривая трансформации // Теория и практика институциональных преобразований в России / под ред. Б.А.Ернзкяна. М. : ЦЭМИ РАН, 2016. Вып. 35. С. 32–44.
5. Мицек Е.Б., Мицек С.А. Анализ факторов динамики основных макроэкономических переменных Российской Федерации // Вопросы управления. 2020. № 1 (62). С. 47–62.
6. Харрод Рой. Теория экономической динамики / пер. с англ. В.Е. Маневича ; под ред. В.Г. Гребенникова. М. : ЦЭМИ РАН, 2008. 210 с.

Macroeconomic Modeling of the Relationship Between Price and Industry Proportions

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika – Tomsk State University Journal of Economics. 2021. 55. pp. 10–26. DOI: 10.17223/19988648/55/2

Valery G. Grebennikov, Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation). E-mail: valerygrebennikov@yandex.ru.

Keywords: macroeconomic model, transformation curve, release, economic growth, dynamic model, dynamic mode, production capabilities model, stationary trajectory.

The article aims to examine one of the most interesting, in the authors' opinion, applications of the two-sector model of social technology to identify the relationship between the trajectories of the relative price and the relative share of the product in the total output based on the concept of Pareto optimal, or "efficient", trajectories of economic growth (i.e. trajectories, each point of which belongs to the surface of production opportunities). Within the framework of this concept, the ratio of prices of individual products corresponds to the marginal rates of these products' substitution. The rates depend on the product (sectoral) structure of GDP, on the one hand, and on the available labor resources and production assets, on the other. The relationship between the investment component of the output and the growth of funds gives rise to a family of efficient trajectories, in the sense indicated above. Each of

the trajectories is characterized by the joint dynamics of industry and price proportions; therefore, the main problem of the study is to examine the general properties of such trajectories. The main feature of the model under consideration is the nonlinear production functions of industries. Even the simplest Cobb–Douglas specification generates the dynamics of the main variables of the model described by a nonlinear differential equation of the second order, which cannot be integrated in general form. Therefore, the analysis of the properties of effective trajectories (at least when specific parameters of trajectories are of interest, and not just general criteria for existence and stability) required the development of a program of numerical experiments on a computer, designed for a fairly extensive test of hypotheses and the convenience of presenting and analyzing the results. To begin with, a variant of the two-sector model was chosen, in the future it is planned to expand it to a significantly larger number of sectors. The properties of effective trajectories with constant parameters were analyzed: the marginal rate of product substitution (constant price ratio), constant marginal rate of resource substitution (constant ratio of factor payment rates), constant ratio of net output of industries, constant share of investments in GDP, etc. General conclusions are obtained about the conditions for the convergence of such “iso-trajectories” to trajectories with a constant GDP growth rate and about the characteristics of stationary trajectories. Of greatest interest, in the author’s opinion, is the conclusion that the existence and stability of stationary trajectories is determined by the intersectoral ratio of the elasticities of the output with respect to the funds of the sectors under consideration: for an industry producing investment products, this parameter should be of lesser importance. The derived equation, which can be interpreted as an expression of a trend that determines the form of the relationship between the proportions of industry outputs and prices in the economy, opens the way to a meaningful macroeconomic analysis of the relationships between these proportions, depending on the configuration of the parameters of social technology A_i , α_i , a_{ij} , B and scenarios of their changes over time.

References

1. Andreev, A.N., Grebennikov, V.G. & Nikolaev, L.K. (2000) *Krivaya transformatsii: staticheskiy i dinamicheskiy aspekty* [Transformation curve: static and dynamic aspects]. Moscow: Central Economics and Mathematics Institute RAS.
2. Belen'kiy, V.Z. (1992) *Statsionarnye dinamicheskie modeli upravleniya ekonomicheskimi sistemami: Metodologiya, analiticheskie i vychislitel'nye metody* [Stationary dynamic models of economic systems management: Methodology, analytical and computational methods]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Moscow.
3. Brown, M. (1971) *Teoriya i izmerenie tekhnicheskogo progressa* [On the Theory and Measurement of Technological Change]. Translated from English by V.V. Zotov. Moscow: Statistika.
4. Vinokurov, E.F. (2016) Kuda mozhet vyvezti krivaya transformatsii [Where the transformation curve can take]. In: Ernzyan, B.A. (ed.) *Teoriya i praktika institutsional'nykh preobrazovaniy v Rossii* [Theory and practice of institutional transformations in Russia]. Vol. 35. Moscow: Central Economics and Mathematics Institute RAS. pp. 32–44.
5. Mitsek, E.B. & Mitsek, S.A. (2020) Analysis of Dynamics Factors of the Basic Macroeconomic Variables of the Russian Federation. *Voprosy upravleniya*. 1 (62). pp. 47–62. (In Russian). DOI: 10.22394/2304-3369-2020-1-47-62
6. Harrod, R. (2008) *Teoriya ekonomicheskoy dinamiki* [Economic dynamics]. Translated from English by V.E. Manevich. Moscow: Central Economics and Mathematics Institute, RAS.