

## МАТЕМАТИКА

УДК

DOI 10.17223/19988621/73/1

MSC 60J80

Х.Э. Кудратов., Я.М. Хусанбаев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ  
ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Исследуется асимптотика критического процесса Гальтона – Ватсона, начинающегося со случайного числа частиц. Доказаны аналог теоремы Колмогорова и теоремы Яглома и получены асимптотические разложения для вероятности вырождения процесса.

**Ключевые слова:** процесс Гальтона – Ватсона, вероятность продолжения процесса, производящая функция, теорема Колмогорова, теорема Яглома.

## 1. Введение

Хорошо известно (см., например, [1]), что математический объект, называемый «ветвящимся процессом», является математической моделью многих прикладных задач, возникающих в физике, химии, биологии, демографии и других направлениях науки. Ветвящиеся процессы особенно хорошо отражают эволюцию биологических систем, что продемонстрировано, например, в книгах Р. Нассоу, Р. Jagers, V. Vatutin [2] и Р. Jagers [3], в которых математические результаты по ветвящимся процессам применены к исследованию роста популяции.

Пусть  $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$  взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение  $p_i = P(\xi(k, j) = i), i = 0, 1, \dots$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$  и производящую функцию  $f(s) := E s^{\xi(k, j)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, 0 \leq s \leq 1$ . Рассмотрим процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$ , определенный рекуррентными соотношениями

$$Z(0) = \eta, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \in N. \quad (1.1)$$

Здесь  $\eta$  – случайная величина, принимающая целые положительные значения и независимая от случайных величин  $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$ . Процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  называют процессом Гальтона – Ватсона, начинающегося с  $\eta$  частиц. В дальнейшем будем предполагать, что  $A = E\xi(1, 1) < \infty$  и  $a = E\eta < \infty$ .

Если  $A < 1$ , то процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  называется докритическим, при  $A = 1$  он называется критическим, а если  $A > 1$ , то процесс называется надкритическим.

Хорошо известно (см. например, теорему 6.1 [1]), что в случае, когда  $\eta \equiv 1$ , при  $A \leq 1$  ветвящийся процесс  $Z(n)$  вырождается с вероятностью 1, а если  $A > 1$ , то вероятность вырождения равна единственному неотрицательному решению уравнения  $f(s) = s$ , меньшему 1.

Обозначим через  $\{Z_i(n), n \geq 0\}$  ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, порожденный  $i$ -й частицей начального состояния. Ясно, что в силу сделанных предположений процессы  $\{Z_i(n), n \geq 0, i \geq 1\}$  являются взаимно-независимыми и одинаково распределенными ветвящимися процессами Гальтона – Ватсона, начинающиеся с одной частицы. Через  $Q(n)$  обозначим вероятность продолжения процесса  $\{Z(k), k \geq 0\}$  на  $n$ -м шаге, т.е.  $Q(n) = P(Z(n) > 0)$ , а через  $R(n)$  обозначим вероятность продолжения процесса  $\{Z_1(n), n \geq 0\}$  (начинающегося с одной частицы) на  $n$ -м шаге, т.е.  $R(n) = P(Z_1(n) > 0)$ . Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - R(n))$  называется вероятностью вырождения ветвящегося процесса  $Z_1(n)$ .

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$W(n) = P(Z(n) = 0) = 1 - Q(n), \quad h(s) := Es^\eta, \quad H_n(s) := Es^{Z(n)},$$

$$B = f''(1), \quad C = f'''(1), \quad D = f^{IV}(1), \quad \sigma^2 = \text{Var}\xi(1,1),$$

$$b = h''(1), \quad c = h'''(1), \quad d = h^{IV}(1), \quad \tau^2 = \text{Var}\eta.$$

$$f_0(s) = s, \quad f_1(s) = f(s), \quad f_n(s) = f(f_{n-1}(s)) - n\text{-я итерация } f(s).$$

Символ  $a_n \sim b_n$  будет обозначать соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .

В случае когда  $\eta \equiv 1$ , случайный процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  изучен многими авторами (см. [1, 4–6]). При этом одной особенно интересной математической задачей для ветвящихся процессов является определение асимптотики вероятности  $R(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . В 1938 году А.Н. Колмогоровым [7], был получен следующий замечательный результат для асимптотики вероятности  $R(n)$ :

$$R(n) \sim \begin{cases} KA^n, & \text{если } A < 1, B < \infty, \\ \frac{2}{Bn}, & \text{если } A = 1, B > 0, C < \infty, \\ 1 - \lambda, & \text{если } A > 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь  $K$  – положительная постоянная, зависящая только от распределения  $p_i$ ,  $i \geq 0$ ;  $\lambda$  – неотрицательный корень уравнения  $f(s) = s$ , отличный от единицы.

Отметим, что в случае  $A > 1$  и  $p_0 = 0$  для любого  $n \in N$  имеет место событие  $Z_n > 0$  с вероятностью 1, так что в этом случае  $R(n) = 1$  для любого  $n \in N$ .

Результат, аналогичный (1.2), для ветвящихся процессов с непрерывным временем был получен Б.А. Севастьяновым [8]. Напомним, что однородный во времени марковский процесс в фазовом пространстве  $\{0, 1, 2, \dots\}$  и с переходными вероятностями  $P_{ij}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , называют ветвящимся процессом с непрерывным

временем, если имеет место соотношение  $P_{ij}(t) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=j} P_{j_1}(t)P_{j_2}(t)\dots P_{j_i}(t)$

(условие ветвления) (более подробно см. гл. 1 из [9]). В.М. Золотаревым [10], в случае  $p_0 > 0$ , был получен следующий результат для ветвящихся процессов с непрерывным временем:

$$R(t) = \begin{cases} Ke^{\bar{a}t} - \frac{\bar{b}}{2\bar{a}} K^2 e^{2\bar{a}t} + o(e^{2\bar{a}t}), & \text{если } \bar{a} < 0, \bar{b} < \infty, \\ \frac{2}{\bar{b}t} + \frac{4c}{3\bar{b}^3} \frac{\log t}{t^2} + o\left(\frac{\log t}{t^2}\right), & \text{если } \bar{a} = 0, \bar{b} > 0, \bar{c} < \infty; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$R_\lambda(t) = K_\lambda e^{\bar{a}_\lambda t} - \frac{\bar{b}_\lambda}{2\bar{a}_\lambda} K_\lambda^2 e^{2\bar{a}_\lambda t} + o(e^{2\bar{a}_\lambda t}), \quad \text{если } \bar{a} > 0,$$

где

$$\begin{aligned} R_\lambda(t) &= \lambda - P(t), \quad \bar{a} = g'(1), \quad \bar{b} = g''(1), \quad \bar{c} = g'''(1), \\ \bar{a}_\lambda &= g'(\lambda), \quad \bar{b}_\lambda = g''(\lambda), \quad \bar{c}_\lambda = g'''(\lambda), \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k, \quad \gamma_k = \frac{dP_k(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь  $P_k(t)$  – вероятность того, что одна частица за время  $t$  производит  $k$  частиц. В.П. Чистяков [11] получил следующий член в разложении (1.3), когда  $\bar{a} = 0$  и  $\bar{d} = g^{IV}(1) < \infty$ ; асимптотическое разложение для  $\bar{a} < 0$  и конечности  $k$ -факториального момента получено Р. Мухамедхановой [12]. Результат, аналогичный разложению (1.3) для дискретного случая получен А.В. Нагаевым [13].

В 1966 г. С.В. Нагаевым и Р. Мухамедхановой [14] для ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона получен следующий результат, который является аналогом (1.3) для дискретного случая при  $n \rightarrow \infty$ :

$$R(n) \sim \begin{cases} K_1 A^n + K_2 A^{2n} + \dots + K_m A^{mn} + o(A^{mn}), & \text{если } A < 1, \alpha_m < \infty, m > 1, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), & \text{если } A = 1, B > 0, C < \infty, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2 n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right), & \text{если } A = 1, B > 0, D < \infty, \end{cases} \quad (1.4)$$

и если  $A > 1$ , то для любого фиксированного  $m \in \mathbb{N}$

$$R_\lambda(n) \sim K_{1\lambda} A_\lambda^n + K_{2\lambda} A_\lambda^{2n} + \dots + K_{m\lambda} A_\lambda^{mn} + o(A_\lambda^{mn}),$$

где  $R_\lambda(n) = \lambda - P(n)$ ,  $\alpha_k^\lambda = f^{(k)}(\lambda)$ ,  $\alpha_1^\lambda = A_\lambda$ ,  $K_{j\lambda}$  и  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – положительные постоянные, зависящие только от распределения  $p_i$ ,  $i \geq 0$ ,  $\lambda$  – отличный от единицы корень уравнения  $f(s) = s$ .

Как уже было сказано, критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с одной частицы, с вероятностью 1 рано или поздно попадает в состояние ноль и останется в нем навсегда, так что при этом нет никаких интересных предельных теорем. Заметим, что для таких процессов  $EZ(n) = 1$ . Однако трудно убедиться в том, что

$$E(Z(n)/Z(n) > 0) = \frac{EZ(n)}{P(Z(n) > 0)} \sim \frac{Bn}{2} \rightarrow \infty$$

в силу теоремы Колмогорова. Значит, должно иметь смысл исследование асимптотики условного распределения случайной величины  $Z(n)$ , когда  $Z(n) > 0$ . Так, в 1947 году А.М. Ягломом [15], в случае  $A=1$ ,  $C < \infty$ , был получен следующий результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - f_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-y}. \quad (1.5)$$

В работе [16] Spitzer, Kesten, Ney доказали что для справедливости результата (1.5) достаточно требовать  $A=1$ ,  $B < \infty$ . Аналогичный результат для ветвящихся процессов с непрерывным временем был установлен В.М. Золотаревым [10]. Отметим, что интерес к установлению аналогов результата Колмогорова и Яглома для различных схем до сих пор не ослабевает, что доказывают, в частности, недавно опубликованные работы G. Kersting [17] и N. Cardona, S. Palau [18] по ветвящимся процессам в изменяющейся среде, а также книга G. Kersting, V.A. Vatutin [19], посвященная ветвящимся процессам в случайной среде.

Во всех работах, приведенных в обзоре, рассматриваются процессы начинающиеся с одной частицы. Однако очевидно, что в практических задачах это условие не всегда выполняется. Нашей основной целью является выявление влияния числовых характеристик начального состояния на развитие ветвящегося процесса. Отметим, что если начальное состояние  $\eta$  принимает конечное число значений, то применяя формулу полной вероятности, асимптотика, например  $Q(n)$ , легко определяется через асимптотику  $R(n)$  вероятности невырождения ветвящегося процесса, начинающегося с одной частицы, и среднее значение  $\eta$ . Полученные результаты показывают, что и в общем случае «принцип усреднения» имеет место. В настоящей работе процесс (1.1) изучен в критическом случае, и для этого случая получены результаты, аналогичные (1.2), (1.4) и (1.5).

## 2. Основные результаты

Пусть задан процесс (1.1). Имеют место следующие теоремы:

**Теорема 2.1.** Если  $A=1$ ,  $0 < B < \infty$ ,  $a < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) \sim \frac{2a}{Bn}(1 + o(1)).$$

**Теорема 2.2.** Если  $A=1$ ,  $B > 0$ ,  $C < \infty$ ,  $c < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^2} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left( \frac{\ln n}{n^2} \right).$$

**Теорема 2.3.** Если  $A=1$ ,  $B > 0$ ,  $D < \infty$ ,  $d < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(2Ka - b)}{B^2 n^2} + \left( \frac{4b}{B^2} - \frac{8Cb}{3B^4} \right) \frac{\ln n}{n^3} + o\left( \frac{\ln n}{n^3} \right),$$

где  $K$  – постоянная, зависящая только от распределений  $\xi(1,1)$  и  $\eta$ .

**Теорема 2.4.** Если  $A=1$ ,  $B \in (0, \infty)$ , то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1-H_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}.$$

**Замечание.** Если  $a = a(n) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то в случае  $a(n) = o(n)$  из теоремы 2.1 при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $Q(n) \rightarrow 0$ , т.е. даже в случае, когда в начальном состоянии имеется большое количество частиц, критический процесс Гальтона – Ватсона вырождается с вероятностью единица. Но в этом случае стремление  $Q(n)$  к нулю может быть достаточно медленным.

Следующие примеры показывают, что даже в случае  $E\eta = \infty$  вероятность невырождения  $Q(n)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , однако со скоростью сходимости в разных случаях по-разному.

**Пример 2.1.** Пусть случайная величина  $\eta$  имеет следующий закон распределения:

$$p_0 = P(\eta = 0) = \frac{5}{6}, \quad p_k = P(\eta = k) = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Понятно, что  $E\eta = \infty$ . Предположим, что  $E\xi(1, 1) = 1$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} h(f_n(0)) &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-R(n))^k}{k^2} = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-R(n))^k}{k^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1-R(n))^k}{k^2} = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Принимая во внимание хорошо известное неравенство Бернулли  $(1-x)^n \geq 1-nx$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $n \in N$ , воспользовавшись формулой Эйлера для гармонического ряда и результатом Колмогорова (1.2), для интеграла  $I_n^{(1)}$  имеем следующее:

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-R(n))^k}{k^2} \geq \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-\frac{2k}{Bn})}{k^2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{2}{\pi^2 Bn} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \\ &= 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} - \frac{2C}{\pi^2 Bn} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} - \frac{1}{\pi^2 n} \left(1 + \frac{2C}{B}\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $C$  – постоянная Эйлера. Воспользовавшись теперь неравенством  $(1-x)^k \leq 1-kx + \frac{k(k+1)}{2}x^2$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $k \in N$ , оценим интеграл  $I_n^{(1)}$  сверху:

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-R(n))^k}{k^2} \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{2k}{Bn} + \frac{2k(k+1)}{B^2 n^2}\right) = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{2}{\pi^2 Bn} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{2}{\pi^2 B^2 n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = 1 - \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn} + \frac{2}{\pi^2 B^2 n} + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \\ &\sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} + \frac{1}{\pi^2 n} \left(\frac{2}{B^2} - \frac{2C}{B} - 1\right) + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) заключаем, что

$$1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} - \frac{1}{\pi^2 n} \left( 1 + \frac{2C}{B} \right) \leq I_n^{(1)} \leq 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} + \frac{1}{\pi^2 n} \left( \frac{2}{B^2} - \frac{2C}{B} - 1 \right) + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 B n^2}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь  $I_n^{(2)}$ . Учитывая, что  $0 \leq R(n) \leq 1$ , получаем неравенство

$$0 \leq I_n^{(2)} \leq \frac{1}{\pi^2 n}.$$

Принимая во внимание (2.4) и последнее неравенство, согласно (2.1) приходим к следующему соотношению:

$$h(f_n(0)) \sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} (1 + o(1)).$$

Отсюда заключаем, что

$$Q(n) \sim \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} (1 + o(1)).$$

**Пример 2.2.** Пусть случайная величина  $\eta$  имеет следующий закон распределения:

$$p_0 = P(\eta = 0) = 1 - \frac{\beta}{\gamma}, \quad p_k = P(\eta = k) = \frac{\ln k}{\gamma k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ ,  $\gamma$  – любое число, удовлетворяющее условию  $\gamma > \beta$ .

Аналогичными рассуждениями, как в примере 2.1, получаем соотношение

$$Q(n) \sim \frac{\ln^2 n}{\gamma B n} (1 + o(1)).$$

### 3. Вспомогательные результаты

Пусть задан процесс (1.1).

**Лемма 3.1.** Для производящей функции процесса  $Z(n)$  имеет место следующее соотношение:

$$H_n(s) = h(f_n(s)), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Принимая во внимание независимость случайных величин  $\{\eta, \xi(1, j), j \in N\}$ , заключаем, что

$$H_1(s) = E s^{Z(1)} = E s^{\xi(1,1) + \dots + \xi(1,\eta)} = E \left( E s^{\xi(1,1) + \dots + \xi(1,\eta)} / \eta \right) = E (f(s))^{\eta} = h(f(s)).$$

Следовательно, равенство (3.1) имеет место при  $n=1$ . Предположим теперь, что равенство имеет место при  $n=k$ . Докажем его справедливость для  $n=k+1$ . Опять принимая во внимание взаимную независимость случайных величин  $\{\xi(k+1, j), j \in N\}$  и независимость от  $Z(k)$ , имеем

$$\begin{aligned} H_{k+1}(s) &= E s^{Z(k+1)} = E s^{\xi(k+1,1) + \dots + \xi(k+1, Z_k)} = \\ &= E \left( E s^{\xi(k+1,1) + \dots + \xi(k+1, Z_k)} / Z_k \right) = E (f(s))^{Z_k} = h(f_{k+1}(s)). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.1) имеет место для любого  $n \in N$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Для математического ожидания, дисперсии и ковариации  $Z(n)$  имеют место следующие соотношения:

$$EZ(n) = aA^n; \quad (3.2)$$

$$VarZ(n) = \begin{cases} \sigma^2 aA^{n-1} \frac{A^n - 1}{A - 1} + \tau^2 A^{2n}, & \text{если } A \neq 1, \\ \sigma^2 an + \tau^2, & \text{если } A = 1; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$Cov(Z(k), Z(n)) = A^{|n-k|} VarZ(\min(k, n)). \quad (3.4)$$

**Доказательство.** Сначала докажем равенство (3.2). Продифференцировав обе части равенства (3.1), получим

$$H'_n(s) = h'(f_n(s))f'_n(s). \quad (3.5)$$

Теперь равенство (3.2) следует из равенства (3.5), если в нем положить  $s = 1$  и учесть, что  $f_n(1) = 1$ ,  $h'(1) = a$ ,  $f'_n(1) = A^n$ .

Покажем теперь справедливость равенства (3.3). Продифференцировав для этого обе части равенства (3.5), получим

$$H''_n(s) = h''(f_n(s))(f'_n(s))^2 + h'(f_n(s))f''_n(s). \quad (3.6)$$

Равенство (3.3) следует из равенства (3.6), если в нем положить  $s = 1$  и учесть, что

$$f_n(1) = 1, h'(1) = a, f'_n(1) = A^n, f''_n(1) = f''(1) \frac{A^{n-1}(A^n - 1)}{A - 1}.$$

Очевидно, что равенство (3.4) следует из рекуррентного соотношения

$$Cov(Z(k), Z(n)) = ACov(Z(k), Z(n-1)), \quad 0 \leq k < n. \quad (3.7)$$

Поэтому покажем справедливость соотношения (3.7). Положим для определенности  $k < n$ , и пусть  $\mathfrak{Z}(k)$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайными величинами  $\{Z(1), Z(2), \dots, Z(k)\}$ . Принимая во внимание независимость величин  $\{\xi(n, j), j \in N\}$  от  $\mathfrak{Z}(n-1)$ , имеем

$$\begin{aligned} & E((Z(k) - EZ(k))(Z(n) - EZ(n)) / \mathfrak{Z}(n-1)) = \\ & = (Z(k) - EZ(k))E((Z(n) - EZ(n)) / \mathfrak{Z}(n-1)) = \\ & = (Z(k) - EZ(k))E\left(\left(\sum_{j=1}^{Z(n-1)} (\xi(n, j) - A) + A(Z(n-1) - EZ(n-1))\right) / \mathfrak{Z}(n-1)\right) = \\ & = A(Z(k) - EZ(k))(Z(n-1) - EZ(n-1)). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (3.7). Лемма доказана.

**Лемма 3.3.** Если  $A \leq 1$ , то вероятность вырождения процесса (1.1) равна единице, т.е.  $W(n) \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $W(n) = P(Z(n) = 0) = H_n(0) = h(f_n(0))$ . Согласно теореме Стеффенсена [1] (теорема 6.1, с. 19),  $f_n(0) \uparrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как производящая функция  $h(s)$  непрерывна при  $0 \leq s \leq 1$  и  $h(1) = 1$ , то отсюда следует, что  $h(f_n(0)) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $W(n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Отметим, что в лемме 3.3 не ставится условие существования среднего значения случайной величины  $\eta$ .

#### 4. Доказательство основных результатов

**Доказательство теоремы 2.1.** Согласно лемме 2.1,

$$Q(n) = 1 - H_n(0) = 1 - h(f_n(0)). \quad (4.1)$$

Так как  $a = h'(1) < \infty$ , то согласно теореме Лагранжа о среднем значении

$$h(s) = h(1) + h'(\theta(s))(s-1) = 1 + a(s-1) + [h'(\theta(s)) - a](s-1), \quad (4.2)$$

где  $s \leq \theta(s) \leq 1$ . Подставляя в (4.2)  $s = f_n(0)$ , получаем

$$h(f_n(0)) = 1 + a(f_n(0) - 1) + [h'(\theta(f_n(0))) - a](f_n(0) - 1). \quad (4.3)$$

Так как  $f_n(0) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\theta(f_n(0)) \rightarrow 1$ .

Теперь, учитывая, что  $h'(s) \rightarrow a$  при  $s \rightarrow 1$  и соотношения (4.1), (4.3) и результат Колмогорова (1.2), получаем следующее соотношение:

$$Q(n) = a(1 - f_n(0)) + o(1 - f_n(0)) = \frac{2a}{Bn}(1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

Теоремы 2.2 и 2.3 доказываются аналогичными рассуждениями, поэтому приведем только доказательство теоремы 2.3.

**Доказательство теоремы 2.3.** Так как  $h^{IV}(1) < \infty$ , то согласно формуле Тейлора

$$\begin{aligned} h(s) &= h(1) + h'(1)(s-1) + \frac{h''(1)}{2}(s-1)^2 + \frac{h'''(1)}{6}(s-1)^3 + \frac{h^{IV}(\theta_s)}{24}(s-1)^4 = \\ &= h(1) + a(s-1) + \frac{b}{2}(s-1)^2 + \frac{c}{6}(s-1)^3 + \frac{h^{IV}(\theta_s)}{24}(s-1)^4, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $s \leq \theta_s \leq 1$ . Ясно, что производные функции  $h(s)$  монотонно возрастают на  $s \in [0, 1]$ . Следовательно,

$$h^{IV}(\theta_s) \leq h^{IV}(1) < \infty. \quad (4.5)$$

Тогда, принимая во внимание (4.1), (4.4), (4.5) и (1.4), получаем

$$\begin{aligned} Q(n) &= a(1 - f_n(0)) - \frac{b}{2}(1 - f_n(0))^2 + \frac{c}{6}(1 - f_n(0))^3 + O((1 - f_n(0))^4) = \\ &= \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(2Ka - b)}{B^2 n^2} + \left( \frac{4b}{B^2} - \frac{8Cb}{3B^4} \right) \frac{\ln n}{n^3} + o\left( \frac{\ln n}{n^3} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.4.** Для доказательства теоремы достаточно показать выполнение соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-\lambda(1 - H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0] = \frac{1}{1 + a\lambda}.$$

Докажем это. Имеем

$$\begin{aligned}
E[\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}] &= E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\})I(Z(n)=0) + \\
&\quad + E(\exp\{-\lambda(1-h(f_n(0)))Z(n)\})I(Z(n)>0) = \\
&= P(Z(n)=0) + P(Z(n)>0)E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}/Z(n)>0). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение

$$\begin{aligned}
&E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}/Z(n)>0) = \\
&= \frac{1}{1-P(Z(n)=0)}\{E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) - P(Z(n)=0)\}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Определим асимптотику  $E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\})$ . Известно [1], что  $Z(n)$  можно представить в виде

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n), \quad n \in N.$$

Из независимости случайных величин  $\eta$  и  $\{\xi(i, j), i \geq 1, j \geq 1\}$  следует также независимость  $Z_i(n)$  от случайной величины  $\eta$ . Теперь, принимая во внимание независимость и одинаковую распределенность случайных величин  $Z_i(n)$ , получаем

$$\begin{aligned}
E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) &= E\left(\exp\left\{-\lambda(1-H_n(0))\sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n)\right\}\right) = \\
&= E\left[E\left(\exp\left\{-\lambda(1-H_n(0))\sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n)\right\}\right)/\eta\right] = E\prod_{i=1}^{\eta} E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_i(n)\}) = \\
&= E(f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}))^{\eta}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Согласно формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
&f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}) = E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}) = \\
&= P(Z_1(n)=0) + P(Z_1(n)>0)E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0) = \\
&= f_n(0) + (1-f_n(0))E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0). \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Согласно теореме 2.1 и результату Колмогорова (1.2), получаем

$$\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} \sim a. \quad (4.12)$$

Из неравенства  $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ ,

(4.12) и хорошо известного соотношения для критических процессов

$$E(Z_1(n)/Z_1(n)>0) = \frac{1}{(1-f_n(0))}$$

получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&|E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0) - \\
&- E(\exp\{-\lambda a(1-f_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0)| \leq \\
&\leq E\left(\left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right|(1-f_n(0))Z_1(n)/Z_1(n)>0\right) = \\
&= \left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right|(1-f_n(0))E(Z_1(n)/Z_1(n)>0) = \left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right| \rightarrow 0. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.13), а также теоремы Яглома и Колмогорова, из равенства (4.11) получим

$$\begin{aligned} f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}) &\sim 1 - \frac{2}{Bn}(1+o(1)) + \frac{2}{Bn} \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1)) = \\ &= 1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.10) и (4.14) заключаем, что

$$E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) = E\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)^\eta. \quad (4.15)$$

Теперь, принимая во внимание асимптотические соотношения

$$\ln(1-x) = -x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 - x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} E\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)^\eta &= Ee^{\eta \ln\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)} = Ee^{-\frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))} = \\ &= E\left(1 - \frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right) \sim 1 - \frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь в силу (4.9), (4.15), (4.16) и теоремы 2.1 получаем следующее:

$$\begin{aligned} &E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) \sim \\ &\sim \frac{1}{\frac{2a}{Bn}(1+o(1))} \left\{ 1 - \frac{2a}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)) - 1 + \frac{2a}{Bn}(1+o(1)) \right\} = \\ &= \frac{1}{\frac{2a}{Bn}(1+o(1))} \left\{ \frac{2a}{Bn} \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1)) \right\} = \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1)), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 2.4.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М., 1966.
2. Haccou P., Jagers P., Vatutin V. Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
3. Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. London: John Wiley and Sons, 1975.
4. Athreya K.B., Ney P. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972. 287 p.
5. Asmussen S., Hering H. Branching Processes. Boston: Birkhauser, 1983. 461 p.
6. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. Limit theorems for critical randomly indexed branching processes // Workshop on Branching Processes and Their Applications. Springer, 2010.
7. Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи // Изв. НИИ мат. и мех. Томского университета. 1938. Т. 2. Вып. 1.
8. Севастьянов Б.А. Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. VI. Вып. 6.
9. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

10. Золотарев В.М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. Вып. 2.
11. Чистяков В.П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. Вып. 3.
12. Мухамедханова Р. Уточнение предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов // Труды Института математики им В.И. Романовского. Ташкент, 1961. Вып. 22.
13. Нагаев А.В. Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов // Труды Ташкентского госуниверситета. Ташкент, 1961. Вып. 189.
14. Нагаев С.В., Мухамедханова Р. Некоторые предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов // Пред. теор. и стат. выводы. Ташкент: Фан, 1966. С. 90–112.
15. Яглом А.М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // ДАН СССР. 1947. Т. 56. № 8. С. 795–798.
16. Spitzer F., Kesten H., Ney P. The Galton-Watson process with mean one and finite variance // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. С. 579–611.
17. Kersting G. A unifying approach to branching processes in a varying environment // Journal of Applied Probability. 2020. V. 57(1). P. 196–220.
18. Cardona-Tobon N., Palau S. Yaglom's limit for critical Galton-Watson processes in varying environment: A probabilistic approach // arXiv preprint arXiv:2005.10186v1, 2020.
19. Kersting G., Vatutin V.A. Discrete Time Branching Processes in Random Environment. Wiley Online Library, 2017.

Статья поступила 25.03.2021

Kudratov K.E., Khusanbaev Y.M. (2021) ON ASYMPTOTIC RELATIONS FOR THE CRITICAL GALTON – WATSON PROCESS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 5–16

**Keywords.** Galton–Watson process, probability of continuation of the process, generating function, Kolmogorov's theorem, Yaglom's theorem.

DOI 10.17223/19988621/73/1

Determining the asymptotics of the continuation probability for a Galton–Watson branching process is one of the most important problems in the theory of branching processes. This problem was solved by A.N. Kolmogorov (1938) in the case when the process starts with a single particle, and the classical result is obtained. A similar result for continuous branching processes was proved by B.A. Sevastyanov (1951). The next term in the expansion for continuous branching processes was obtained by V.M. Zolotarev (1957). The next term in the expansion for continuous branching processes in the critical case was obtained by V.P. Chistyakov (1957); the asymptotic expansion in the subcritical case under the condition of finiteness of the  $k$ -factorial moment was obtained by R. Mukhamedkhanova (1966). Asymptotic expansions for discrete branching processes in the subcritical and supercritical cases, provided that any  $m$ -factorial moment is finite, were obtained by S.V. Nagaev and R. Mukhamedkhanova (1966). In the critical case, the weak convergence of the conditional distribution of the quantity  $P(Z(n) > 0|Z(n))$  under the condition  $Z(n) > 0$  to the exponential distribution was proved by A.M. Yaglom (1947) for processes starting with a single particle in the case of finiteness of the third moment of the number of generations. Subsequently, Spitzer, Kesten, and Ney (1966) proved this result under the condition that the second moment is finite. A similar result for branching processes with continuous parameters was established by V.M. Zolotarev (1957).

In this paper, we study the asymptotics of the probability of continuation of the critical Galton-Watson process, starting with  $\eta$  particles. In addition, we prove an analogue of Yaglom's theorem for critical Galton – Watson processes starting with a random number of particles.

AMS Mathematical Subject Classification: 60J80

Khamza E. KUDRATOV (PhD student, National University of Uzbekistan, Uzbekistan). E-mail: qudratovh\_83@mail.ru

Yakubdjani M. KHUSANBAEV (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, V.I. Romanovskiy Institut of Mathematics, Uzbekistan). E-mail: yakubjank@mail.ru

## REFERENCES

1. Harris T.E. (1963) *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Haccou P., Jagers P., Vatutin V. (2005) *Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Jagers P. (1975) *Branching Processes with Biological Applications*. London: John Wiley and Sons.
4. Athreya K.B., Ney P. (1972) *Branching Processes*. Berlin: Springer.
5. Asmussen S., Hering H. (1983) *Branching Processes*. Boston: Birkhauser.
6. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. (2010) Limit theorems for critical randomly indexed branching processes. *Workshop on Branching Processes and Their Applications*. Springer.
7. Kolmogorov A.N. (1938) K resheniyu odnoy biologicheskoy zadachi [A contribution to the solution of a biological problem]. *Izvestiya NII matematiki i mekhaniki Tomskogo universiteta – Bulletin of the Scientific Research Institute of Mathematics and Mechanics of Tomsk state University*. 2(1).
8. Sevast'yanov B.A. (1951) The theory of branching random processes. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 6(6). pp. 47–99.
9. Sevast'yanov B.A. (1971) *Vetvyashchiyesya protsessy* [Branching processes]. Moscow: Nauka.
10. Zolotarev V.M. (1957) More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(2). pp. 245–253.
11. Chistyakov V.P. (1957) Local limit theorems in the theory of branching random processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(3). pp. 345–363.
12. Mukhamedkhanova R. (1961) Utochneniye predel'noy teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [More exact statement of the limit theorem from the theory of branching random processes]. *Trudy Instituta matematiki im. V.I. Romanovskogo – Transactions of V.I. Romanovskii Institute of Mathematics*. 22.
13. Nagayev A.V. (1961) Utochneniye nekotorykh teorem teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [More exact statements of some theorems of the theory of branching random processes]. *Trudy Tashkentskogo gosuniversiteta – Transactions of Tashkent State University*. 189.
14. Nagayev S.V., Mukhamedkhanova R. (1966) Nekotoryye predel'nyye teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [Some limit theorems from the theory of branching random processes]. *Predel'nyye teoremy i statisticheskiye vyvody – Limit theorems and statistical inference*. Tashkent: Fan. pp. 90–112.
15. Yaglom A. M. (1947) Nekotoryye predel'nyye teoremy teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [Certain limit theorems of the theory of branching processes] *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 56(8). pp. 795–798.
16. Kesten H., Ney P., Spitzer F. (1966) The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Theory of Probability and its Applications*. 11(4). pp. 513–540.
17. Kersting G. (2020) A unifying approach to branching processes in a varying environment. *Journal of Applied Probability*. 57(1). pp. 196–220.
18. Cardona-Tobón N., Palau S. (2021) Yaglom's limit for critical Galton–Watson processes in varying environment: A probabilistic approach. *Bernoulli*. 27(3). pp. 1643–1665.
19. Kersting G., Vatutin V.A. (2017) *Discrete Time Branching Processes in Random Environment*. Wiley Online Library.

Received: March 25, 2021